BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Peluang

Dalam statistika istilah percobaan digunakan untuk menyatakan tiap proses yang menghasilkan data mentah (Walpole dan Myers, 1986). Kendati demikian perhatian akan lebih dicurahkan pada pengamatan yang diperoleh dari percobaan yang di ulang beberapa kali. Dalam kebanyakan hal hasilnya akan bergantung pada kebolehjadiannya, dan karena itu tidak dapat diramalkan secara pasti. Dari sini diperlukan sebuah ukuran yang digunakan untuk menyatakan tingkat kebolehjadian pengamatan tersebut.

Probabilitas atau peluang adalah ukuran bagi kebolehjadian atau kemungkinan timbulnya suatu kejadian (Andi dan Rambe , 1984). Jika suatu kejadian sangat tidak masuk akal untuk terjadi , dikatakan bahwa peluang timbulnya kejadian itu sangat kecil. Sebaliknya bila kejadian ini sangat besar kemungkinannya untuk timbul akibat diberikan suatu tindakan tertentu, dikatakan bahwa peluang timbulnya kejadian ini sangat besar.

Definisi 2.1.1 :

Himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan statistika disebut *ruang sampel* dan dinyatakan dengan lambang S.

Sebuah partisi S adalah koleksi A = $\{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m\}$ dari himpunan bagian-himpunan bagian $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m$ dengan memenuhi sifat-sifat :

$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ dan $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_m = S$

Definisi 2.1.2 :

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Definisi 2.1.3 :

Suatu kejadian yang hanya mengandung satu unsur dari ruang sampel disebut kejadian sederhana dan dinotasikan dengan ζ . Sedangkan kejadian yang dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa kejadian sederhana disebut suatu kejadian majemuk dan dinotasikan dengan $\mathcal{A} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$.

2.1.1 Peluang Suatu Kejadian

Statistikawan pada dasarnya berusaha menarik kesimpulan atau inferensi dari percobaan yang mengandung ketidakpastian. Agar kesimpulan dan inferensi ini cukup tepat, diperlukan pemahan teori peluang.Teori matematika peluang menetapkan suatu himpunan bilangan yang dinamakan bobot, yang berharga dari 0 sampai 1,sehingga kemungkinan terjadinya sutu kejadian yang berasal dari suatu percobaan statistika dapat dihitung. Untuk tiap titik pada ruang sampel dikaitkan dengan suatu bobot sedemikian sehingga jumlah semua bobot sama dengan 1.

Untuk menentukan peluang suatu kejadian $\mathcal{A}$, semua bobot titik sampel dalam $\mathcal{A}$ dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan ukuran $\mathcal{A}$ atau peluang $\mathcal{A}$ dan dinyatakan dengan $P(\mathcal{A})$ (Walpole dan Myers, 1986).

Definisi 2.1.1.1 :

Peluang suatu kejadian $\mathcal{A}$ adalah jumlah bobot semua titik sampel di dalam $\mathcal{A}$, dengan memenuhi sifat-sifat :

$$0 \leq P(\mathcal{A}) \leq 1, \quad P(\{\}) = 0, \quad P(S) = 1$$

Definisi 2.1.1.2 :

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, dan bila tepat sebanyak n dari hasil yang berkaitan dengan kejadian $\mathscr{A}$, maka peluang kejadian $\mathscr{A}$ adalah

$$P(\mathscr{A}) = \frac{n}{N}$$

2.2 Variabel Random

Istilah percobaan statistika telah digunakan untuk menjelaskan setiap proses yang menghasilkan pengukuran yang berkemungkianan. Sering yang menarik perhatian bukanlah titik sampel itu sendiri, melainkan hanya gambaran numerik dari hasil. Sebagai contoh, ruang sampel yang memberi gambaran menyeluruh dari hasil yang mungkin bila satu mata uang dilantunkan tiga kali, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$S = \{ MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB \}$$

Bila yang diperlukan hanya banyak muka(M) yang muncul, maka hasil numerik yang mungkin adalah 0,1,2 dan 3. Bilangan 0,1,2, dan 3 merupakan pengamatan acak yang ditentukan oleh hasil percobaan. Bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh suatu variabel random , yang dalam hal ini menyatakan banyak 'muka' yang muncul bila suatu mata uang di lantunkan tiga kali.

Definisi 2.2.1 :

Variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur dalam ruang sampel suatu percobaan ke suatu bilangan real.

Definisi 2.2.2 :

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan intejer, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskrit, dan variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah variabel random diskrit.

Definisi 2.2.3 :

Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu dan variabel random yang didefinisikan diatasnya disebut variabel random kontinu.

2.3 Distribusi Peluang

Definisi 2.3.1 :

Fungsi p(x) disebut distribusi peluang variabel random diskrit X bila, untuk setiap hasil x yang mungkin,

1. $p(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} p(x) = 1$
3. $P(X=x) = p(x)$

Definisi 2.3.2 :

Fungsi f(x) disebut fungsi densitas variabel randon kontinu X, yang didefinisikan diatas himpunan bilangan real, bila

1. $f(x) \geq 0$, untuk $x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

3. $P(a<x<b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

Apabila suatu variabel random X berdistribusi normal dengan rataan μ dan variansi σ^2 maka fungsi densitasnya dinyatakan dengan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$, untuk $-\sim < x < +\sim$.

Definisi 2.3.3 :

Distribusi kumulatif F(x) dari variabel random X dengan distribusi peluang f(x) dinyatakan oleh :

$$F_x(X) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} p(x_i) \text{ , untuk variabel random diskrit.}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \text{ , untuk variabel random kontinu.}$$

2.4 Entropi Partisi

Dalam Papoulis, A (1988), istilah Entropi sebagai konsep ilmiah pertama kali di gunakan dalam termodinamika oleh Clausius pada tahun 1850. Keterangan mengenai probabilitasnya dalam konteks mekanika statistika dikemukakan oleh Boltzman pada tahun 1877. Tetapi hubungan eksplisit antara entropi dan probabilitas dicatat beberapa tahun kemudian oleh Planck. Jaynes pada tahun 1957 menggunakan metode entropi maksimum untuk menyelesaikan sejumlah permasalahan dalam bidang fisika. Entropi adalah ukuran tentang ketidakpastian tentang terjadinya suatu peristiwa dalam suatu partisi.

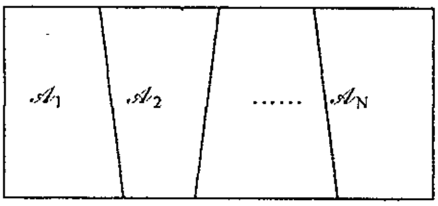
2.4.1 Pengertian Entropi Partisi

Definisi 2.4.1.1:

Di berikan ruang sampel S dan sebuah partisi $A = \{ \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_N \}$ dari S yang tersusun atas N elemen $\mathcal{A}_i$. Entropi partisi A didefinisikan sebagai penjumlahan,

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \mathrm{Ln} p_i \qquad \text{dimana } p_i = P(\mathcal{A}_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1.1)$$

A



Gambar 1 : Partisi A

Contoh 2.4.1.1 :

Dalam pelemparan sebuah koin peluang munculnya gambar adalah P(g) = 0,25 dan peluang muncul angka P(a) = 0,75 membentuk sebuah partisi A = { g,a } dengan nilai entropi :

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \mathrm{Ln} p_i$$

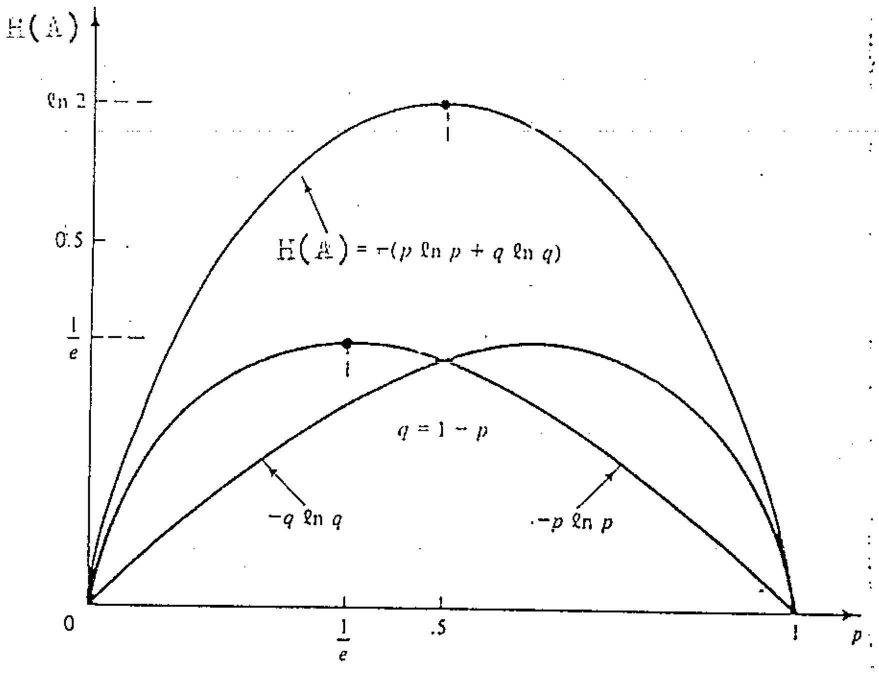
$$= -(0{,}25 \mathrm{\ Ln\ } 0{,}25 + 0{,}75 \mathrm{\ Ln\ } 0{,}75)$$

$$= 0{,}562$$

Di dalam sembarang eksperimen sebuah kejadian $\mathscr{A}$ dan komplemen $\overline{\mathscr{A}}$ membentuk sebuah partisi A = $\{\mathscr{A}, \overline{\mathscr{A}}\}$, yang tersusun atas dua kejadian $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$ dan $\mathscr{A}_2 = \overline{\mathscr{A}}$. Entropi dari partisi ini adalah

H(A) = - (pLnp + qLnq) , dimana p=P($\mathscr{A}_1$) dan q = P($\mathscr{A}_2$) = 1-p.

Grafik fungsi H(A) dari partisi yang tersusun atas dua kejadian dapat dilihat sebagai berikut :



Gambar 2 : Grafik fungsi H(A).

Dalam gambar 2, diplot fungsi –pLnp , -qLnq dan penjumlahannya H(A) = -(pLnp + qLnq) dengan q = 1-p . Fungsi H(A) cenderung ke 0 untuk p mendekati 0 atau 1 ; karena pLnp → 0 untuk p → 0 dan untuk p → 1.

Lebih jauh lagi $\Phi(p)$ simetrik pada titik 0,5. Dan ia maksimum untuk $p = 0,5$. Sehingga entropi dari partisi $A = [\mathscr{A}, \overline{\mathscr{A}}]$ akan maksimum jika kejadian $\mathscr{A}$ dan $\overline{\mathscr{A}}$ memiliki probabilitas yang sama. Dari kasus ini akan dibuat generalisasi untuk sebuah partisi yang tersusun atas N kejadian .

Teorema 2.4.1.1 :

Entropi dari suatu partisi A yang tersusun atas N kejadian memiliki nilai ekstrim untuk $p_i = 1/N$ untuk $i = 1,2, \ldots ,N$.

Bukti :

Karena partisi A tersusun atas N kejadian maka

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \mathrm{Ln} p_i$$

$$= -[\, p_1 \mathrm{Ln} p_1 + p_2 \mathrm{Ln} p_2 + \cdots + p_N \mathrm{Ln} p_N]\}.$$

karena $p_N = 1 - (\, p_1 + p_2 + \ldots + p_{N-1})$, sehingga

$$H(A) = -[\, p_1 \mathrm{Ln} p_1 + p_2 \mathrm{Ln} p_2 + \cdots p_{N-1} \mathrm{Ln} p_{N-1} + (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}) \mathrm{Ln}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1})]$$

Untuk mengetahui titik ekstrimnya maka H(A) didifferensialkan sekali terhadap p_i.

$$\frac{\partial H(A)}{\partial p_i} = \frac{\partial\{-[p_1 \mathrm{Ln} p_1 + p_2 \mathrm{Ln} p_2 + \ldots + (1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{N-1}) \mathrm{Ln}(1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{N-1})]\}}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial H(A)}{\partial p_i} = -\mathrm{Ln} p_1 - 1 + \mathrm{Ln}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}) + 1$$

$$= -\mathrm{Ln} p_1 + \mathrm{Ln}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1})$$

dengan mengambil $\frac{\partial H(A)}{\partial p_i} = 0$, maka

$$\mathrm{Ln} p_1 = \mathrm{Ln}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1})$$

$$p_1 = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}$$

dengan proses yang analog akan didapatkan juga

$$p_2 = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}$$

$$\vdots$$

$$p_{N-1} = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}$$

$$p_N = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{N-1}$$

sehingga diperoleh $p_1 = p_2 = \ldots. = p_N$

karena $p_1 + p_2 + \ldots. + p_N = 1$, maka $p_i = 1/N$ untuk $i = 1,2, \ldots ,N$.

Terbukti bahwa titik ekstrim dari entropi suatu partisi yang tersusun atas N kejadian berada pada $p_i = 1/N$ untuk $i = 1,2, \ldots ,N$.

Bukti selesai.

Untuk melihat jenis titik ekstrimnya maka diberikan teorema-teorema dibawah ini.

Teorema 2.4.1.2 :

Jika $c_i \geq 0$, untuk $i = 1,2, \ldots, N$ sedemikian sehingga $c_1 + c_2 + \ldots + c_N = 1$ maka

$$-\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \leq -\sum_{i=1}^{N} c_i \ln c_i$$

Bukti : Dari sifat kecembungan fungsi ln z menurut Gambar 3, maka $\ln z \leq z - 1$, sehingga dengan mengambil $z = \dfrac{c_i}{p_i}$,

$$\ln \frac{c_i}{p_i} \le \frac{c_i}{p_i} - 1$$

$$\Leftrightarrow p_i \ln \frac{c_i}{p_i} \le p_i \left[\frac{c_i}{p_i} - 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} p_i \ln \frac{c_i}{p_i} \le \sum_{i=1}^{N} (c_i - p_i)$$

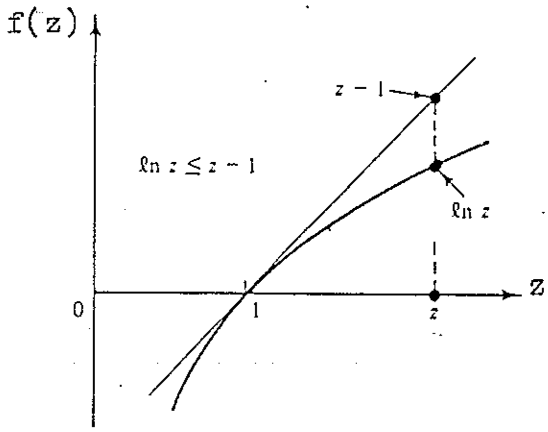
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} p_i (\ln c_i - \ln p_i) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} (p_i \ln c_i - p_i \ln p_i) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} p_i \ln c_i \le \sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \le -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln c_i \qquad \text{..................(2.4.1.2)}$$

Bukti selesai.



Gambar 3 : Grafik fungsi Ln z dan z – 1.

Teorema 2.4.1.3 :

Entropi dari suatu partisi yang tersusun atas N kejadian akan maksimum jika setiap kejadian memiliki probabilitas yang sama, yaitu 1/N dengan nilai entropi sama dengan Ln N.

Bukti : Misal sembarang partisi $A = \{ \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_N \}$ dari S yang tersusun atas N elemen $\mathcal{A}_i$ dengan $p_i = P(\mathcal{A}_i)$ maka dari teorema 2.4.1.2 dengan mengambil $c_i = 1/N$ maka diperoleh

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \leq -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln c_i = -\sum_{i=1}^{N} p_i \mathrm{Ln}\frac{1}{N} = -\mathrm{Ln}\frac{1}{N} = \mathrm{Ln}N$$

Karena untuk sembarang partisi A nilai entropinya selalu lebih kecil atau sama dengan Ln N maka entropi dari suatu partisi yang tersusun atas N kejadian akan maksimum apabila setiap kejadian memiliki probabilitas yang sama, yaitu 1/N.

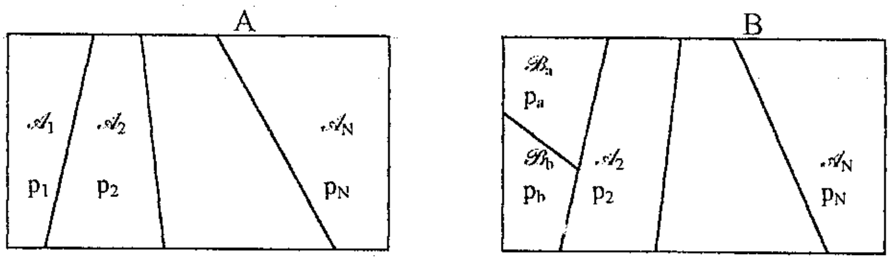
2.4.2 Sifat-Sifat Entropi

Sifat 2.4.2.1: Partisi A dan B menurut Gambar 5 , yang masing-masing tersusun atas N dan N+1 kejadian dengan N-1 kejadian $\mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_N$ yang sama untuk kedua partisi dan kejadian $\mathcal{B}_a$ dan $\mathcal{B}_b$ adalah saling terpisah dimana $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_a \cup \mathcal{B}_b$, maka entropi partisi A akan lebih kecil dari entropy partisi B,yaitu $H(A) < H(B)$.

Bukti :

Dari sifat kecembungan fungsi $w(p) = -pLnp$, maka

$w(p_a + p_b) < w(p_a) + w(p_b)$ atau $w(p_1) < w(p_a) + w(p_b)$



Gambar 4 : Partisi A dan B

Sehingga entropi partisi A adalah

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} p_i Lnp_i$$

$$= -p_1 Lnp_1 - \sum_{i=2}^{N} p_i Lnp_i$$

$$= w(p_1) - \sum_{i=2}^{N} p_i Lnp_i$$

$$< w(p_a) + w(p_b) - \sum_{i=2}^{N} p_i Lnp_i$$

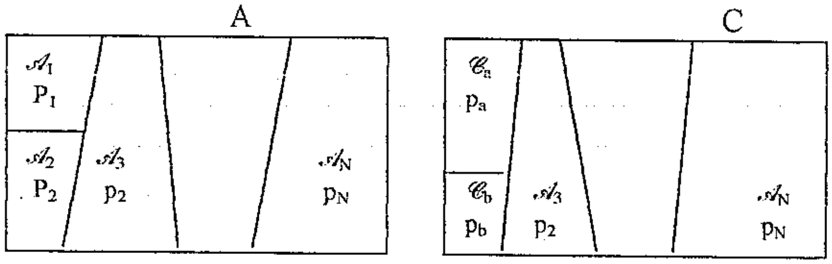
$$= -p_a Ln\, p_a - p_b Ln\, p_b - \sum_{i=2}^{N} p_i Lnp_i$$

$= H(B)$. Bukti selesai.

Sifat 2.4.2.2 : Partisi A dan C menurut Gambar 5, masing-masing tersusun atas N kejadian. N – 2 kejadian , yaitu $\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_N$ adalah sama pada masing-masing partisi. Tampak bahwa $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{C}_a \cup \mathcal{C}_b$ dan

$p_1 = P(\mathscr{A}_1)$ $p_2 = P(\mathscr{A}_2)$ $p_a = P(\mathscr{C}_a)$ $p_b = P(\mathscr{C}_b)$.

Jika $p_1 < p_a < p_b < p_2$, maka $H(A) < H(C)$



Gambar 5 : Partisi A dan C

Bukti : Jelas bahwa $p_1 + p_2 = p_a + p_b$; dari sini $p_a = p_1 + \varepsilon < p_2 - \varepsilon = p_b$. Dari sifat kecembungan fungsi w(p), jika $\varepsilon > 0$ maka

$$w(p_1) + w(p_2) < w(p_a) + w(p_b).$$

Dari sini

$$-p_1 \operatorname{Ln} p_1 - p_2 \operatorname{Ln} p_2 - \sum_{i=3}^{N} p_i \operatorname{Ln} p_i < -p_a \operatorname{Ln} p_a - p_b \operatorname{Ln} p_b - \sum_{i=3}^{N} p_i \operatorname{Ln} p_i$$

$$H(A) < H(C)$$

2.5 Metode Lagrange

Sebelum membahas mengenai metode Lagrange, terlebih dahulu disajikan sebuah teorema yang merupakan dasar dari metode Lagrange. Misal diambil C: r(t), $t \in I$.

Teorema 2.5.1 :

Jika $\mathbf{x}_0$ adalah titik yang memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi $f(\mathbf{x})$ pada kurva C, maka $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ tegak lurus terhadap C di titik $\mathbf{x}_0$.

Bukti :

Misal $\mathbf{x_0}$ = (x,y) disajikan dalam parameter t, yaitu $\mathbf{x_0} = (x(t_0), y(t_0)) = r(t_0)$, sehingga $f(\mathbf{x_0}) = f(r(t_0))$ mempunyai nilai maksimum atau minimum pada saat t_0.

Konsekuensinya

$$\frac{d}{dt}[f(r(t))] = \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Apabila ditulis dalam bentuk vektor maka

$$\frac{d}{dt}[f(r(t))] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j\right)\left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j\right) = \nabla[f(r(t))]r'(t)$$

Karena maksimum di x_0, maka haruslah $\frac{d}{dt}[f(r(t))] = 0$ untuk $t = t_0$. Sehingga

$$\frac{d}{dt}[f(r(t_0))] = \nabla[f(r(t_0))]r'(t_0) = 0$$

Ini menunjukkan bahwa $\nabla[f(r(t_0))] \perp r'(t_0) = 0$.

Karena $r'(t_0)$ merupakan arah dari C di titik x_0, maka $\nabla[f(r(t_0))]$ tegak lurus C pada titik x_0 (Sallas, Hille and Anderson , 1992).

Bukti selesai.

Teorema 2.5.2 : (Metode Lagrange)

Jika $\mathbf{x_0}$ memaksimumkan atau meminimumkan $f(\mathbf{x})$ pada kurva C, dengan memenuhi kondisi $g(\mathbf{x}) = 0$, maka $\nabla f(\mathbf{x_0})$ dan $\nabla g(\mathbf{x_0})$ adalah paralel. Sehingga jika $\nabla g(\mathbf{x_0}) \neq 0$, maka terdapatlah sebuah konstanta λ sedemikian sehinga

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x_0})$$

Bukti :

Misal $\mathbf{x}_0$ memaksimumkan atau meminimumkan f(x) pada kurva C sedemikian sehingga g(x) = 0. Karena $\mathbf{x}_0$ memaksimumkan (meminimumkan) f(x) pada C , maka menurut teorema (2.5.1) $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ tegak lurus terhadap suatu kurva C pada ($\mathbf{x}_0$). Karena $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ juga tegak lurus terhadap suatu kurva C pada ($\mathbf{x}_0$), maka $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ dan $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ adalah paralel, sehingga

$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$. Bukti selesai.

Bilamana ada lebih dari satu kendala yang di perlakukan pada peubah-peubah suatu fungsi yang harus dimaksimumkan atau di minimumkan, maka di gunakan pengali-pengali Lagrange tambahan (satu untuk tiap kendala). Misalnya, ingin dicari nilai ekstrem suatu fungsi f tiga peubah, terhadap dua kendala g(x,y,z) = 0 dan h(x,y,z) = 0, maka

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$$

Contoh 2.5.1 :

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi f(x,y) = xy pada lingkaran satuan $x^2 + y^2 = 1$ (Larson, R and Hostetler, 1989).

Penyelesaian :

Dengan menerapkan metode lagrange maka diperoleh $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Akan dimaksimumkan (minimumkan) fungsi f(x,y)=xy yang memenuhi kondisi g(x,y)= 0.

Gradien dari f(x,y) dan g(x,y) adalah

$$\nabla g(x,y) = yi + xj, \qquad \nabla f(x,y) = 2xi + 2yj.$$

Dengan mengambil

$$\nabla f(x,y) = \lambda\, \nabla g(x,y)$$

$$yi + xj = 2\lambda xi + 2\lambda yj.$$

maka diperoleh

$$y = 2\lambda x \quad \text{dan } x = 2\lambda y.$$

Dengan mengalikan persamaan pertama dengan y dan persamaan kedua dengan x maka didapat $y^2 = 2\lambda xy$ dan $x^2 = 2\lambda xy$, sehingga

$$y^2 = x^2.$$

Karena $x^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow\ 2x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Sehingga diperoleh titik-titik

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Untuk titik pertama dan ketiga diperoleh nilai f sama dengan ½ (maksimum). Serta pada titik kedua dan keempat diperoleh nilai f sama dengan – ½ (minimum).