II. TEORI PENUNJANG

2.1. Graf Berarah (Directed Graph).

Definisi 2.1.1.

Graf/Graf tak berarah G = (V,E) adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan V(G) berhingga tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut ***titik*** dan himpunan E(G) (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tidak terurut antara dua titik yang disebut ***garis***. Suatu garis (v,w) atau (w,v) dikatakan menghubungkan titik v dengan titik w.

Definisi 2.1.2.

Sebuah ***path*** dengan panjang n-1 dalam graf G adalah suatu susunan garis-garis berbentuk (v_1,v_2), (v_2,v_3), ... ,(v_{n-1},v_n) dimana $v_i \neq v_j$ untuk setiap i,j = 1,2, ... ,n. Titik v_1 disebut ***titik awal*** dan titik v_n disebut ***titik akhir*** dari path tersebut. Apabila path mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama maka disebut dengan ***cycle***.

Definisi 2.1.3.

Sebuah graf G dikatakan ***terhubung (connected)*** apabila setiap pasangan titik v_i,v_j dalam G dihubungkan oleh sekurang-kurangnya satu path.

Definisi 2.1.4.

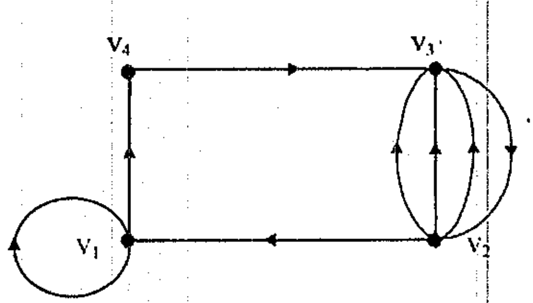
Graf berarah (directed graph) G_d = (V,E) adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan $V(G_d)$ berhingga tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut ***titik*** dan himpunan $E(G_d)$ (mungkin kosong) dari pasangan terurut antara dua titik yang disebut ***garis berarah***. Suatu garis berarah (v,w) dikatakan berarah dari titik v menuju titik w.

Definisi 2.1.5.

Misalkan G_d = (V,E) graf berarah dan garis berarah $(v_i,v_j) \in E(G_d)$. Maka v_i disebut titik awal dan v_j disebut titik akhir garis tersebut. Jika $v_i = v_j$ maka garis berarah tersebut disebut ***loop***. Sedangkan garis ***pararel*** dalam G_d adalah garis berarah dimana v_i titik awal dan v_j titik akhir dengan bentuk $(v_i,v_j)_1, (v_i,v_j)_2, \ldots, (v_i,v_j)_k$ dengan $k \geq 2$.

Contoh 2.1.1.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.1. Garis berarah (v_1,v_1) disebut loop pada titik v_1 dan $(v_2,v_3)_1, (v_2,v_3)_2, (v_2,v_3)_3$ disebut garis pararel.



Gambar 2.1.1.

Graf berarah G_d dengan loop dan garis pararel.

Definisi 2.1.6.

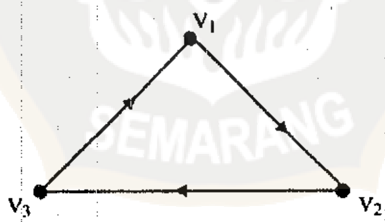
Misalkan $G_d = (V,E)$ graf berarah dan $v \in V(G_d)$. ***Derajat masuk (indegree)*** v, ditulis $d^-(v)$, adalah banyaknya garis berarah yang masuk ke v. ***Derajat keluar (outdegree)*** v, ditulis $d^+(v)$, adalah banyaknya garis berarah yang keluar dari v.

Definisi 2.1.7.

Graf berarah G_d ***reguler dengan derajat k*** adalah graf berarah yang mana $d^-(v) = d^+(v) = k$, untuk setiap titik v dalam G_d.

Contoh 2.1.2.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.2. Karena $d^-(v_1) = d^+(v_1) = 1$, $d^-(v_2) = d^+(v_2) = 1$ dan $d^-(v_3) = d^+(v_3) = 1$, maka G_d dikatakan reguler dengan derajat 1.



Gambar 2.1.2.
Graf berarah reguler G_d derajat 1.

Definisi 2.1.8.

Rangkaian garis berarah (directed edge sequence) dengan panjang k-1 dari suatu graf berarah G_d adalah susunan garis-garis berarah yang terdiri dari $(v_1,v_2),(v_2,v_3), \ldots ,(v_{k-1},v_k)$ atau dapat ditulis dengan $v_1,v_2, \ldots ,v_k$ dengan $k \geq 2$. Titik v_1 disebut ***titik awal*** dan titik v_k disebut ***titik akhir*** dari rangkaian garis berarah tersebut.

Definisi 2.1.9.

Path berarah (directed path) adalah suatu rangkaian garis berarah dimana semua titik maupun semua garis berarahnya berbeda. Path berarah yang mempunyai titik awal dan titik akhir sama dikatakan ***sirkuit berarah (directed circuit)***.

Contoh 2.1.3.

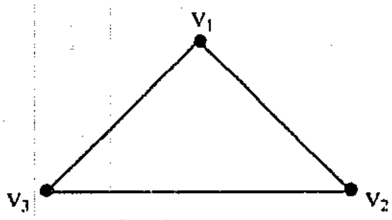
Pandang graf G_d pada gambar 2.1.1. Rangkaian garis berarah v_2,v_1,v_4,v_3 disebut path berarah dengan panjang 3. Sedangkan rangkaian garis berarah v_1,v_4,v_3,v_2,v_1 disebut sirkuit berarah dengan panjang 4.

Definisi 2.1.10.

Suatu graf berarah G_d dikatakan ***terhubung/terhubung lemah (connected/weakly connected)*** apabila semua garis berarah dalam G_d dihilangkan arahnya maka menjadi graf G yang terhubung.

Contoh 2.1.4.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.2. Apabila semua garis berarah dalam G_d dihilangkan arahnya maka menjadi graf G yang terhubung, seperti ditunjukkan pada gambar 2.1.3.



Gambar 2.1.3.

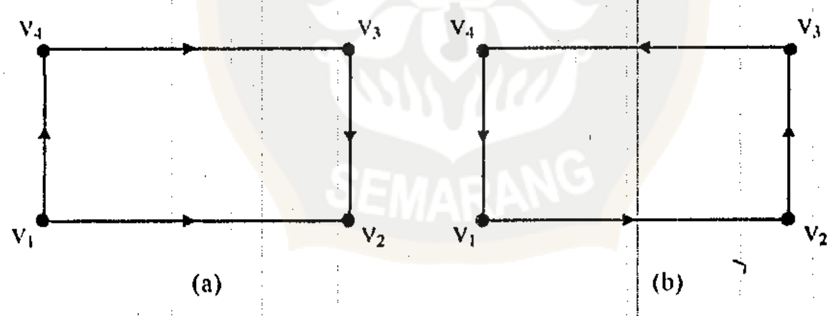
Graf G yang terhubung.

Definisi 2.1.11.

Graf berarah G_d terhubung dikatakan ***terhubung kuat (strongly connected)*** jika ada sekurang-kurangnya satu path berarah dari setiap titik v_i ke setiap titik v_j dalam G_d.

Contoh 2.1.5.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.4. Gambar (a) merupakan graf berarah terhubung lemah, sedangkan gambar (b) merupakan graf berarah terhubung kuat.



Gambar 2.1.4.

(a) Graf berarah G_d terhubung lemah tetapi tidak kuat. (b) Graf berarah G_d terhubung lemah dan kuat.

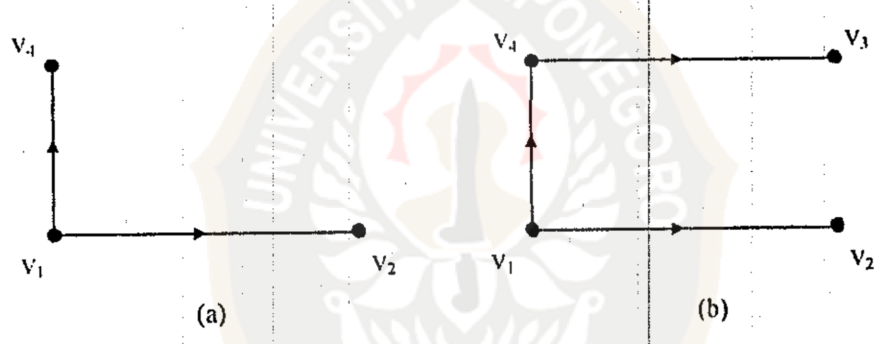
Definisi 2.1.12.

Misalkan $G_d = (V,E)$ graf berarah. Sebuah graf berarah g dikatakan ***graf berarah bagian (subdirected graph)*** dari G_d apabila $V(g) \subseteq V(G_d)$ dan $E(g) \subseteq E(G_d)$.

Khususnya apabila $V(g) \subset V(G_d)$ maka g dikatakan ***graf berarah bagian murni,*** sedangkan apabila $V(g) = V(G_d)$ maka g dikatakan ***graf berarah bagian bentangan (spanning subdirected graph).***

Contoh 2.1.6.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.4 (a). Graf berarah g_1 pada gambar 2.1.5 (a) merupakan graf berarah bagian murni dari G_d. Sedangkan graf berarah g_2 pada gambar 2.1.5 (b) merupakan graf berarah bagian bentangan dari G_d.



Gambar 2.1.5.

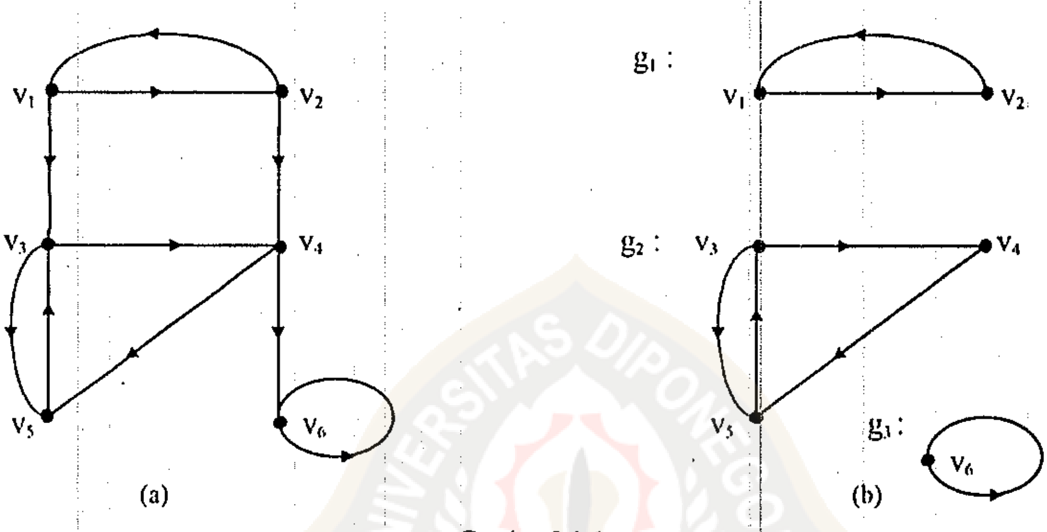
Graf berarah bagian g_1 dan g_2 dari G_d pada gambar 2.1.4 (a)

Definisi 2.1.13.

Misalkan G_d graf berarah terhubung dan G_d dipartisi menjadi n graf berarah bagian $g_1, g_2, \ldots, g_n$, dimana $V(g_i) \cap V(g_j) = \varnothing$, untuk semua i dan j sedemikian sehingga untuk setiap i, g_i adalah graf berarah bagian yang terhubung kuat, maka g_i dikatakan ***graf berarah bagian maksimal terhubung kuat (maximal strongly connected subdirected graph)*** atau disebut pula ***fragment*** dari G_d. Fragment ini dapat terjadi hanya dari satu titik.

Contoh 2.1.7.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.6 (a). Pada gambar 2.1.6 (b) adalah fragment-fragment g_1, g_2 dan g_3 dari G_d.



Gambar 2.1.6.

(a) Graf berarah terhubung G_d. (b) Fragment-fragment g_1, g_2 dan g_3 dari G_d.

Definisi 2.1.14.

Suatu graf berarah bagian g yang terhubung kuat dalam graf berarah G_d dikatakan ***minimal*** jika g tidak memuat graf berarah bagian murni dari dua atau lebih titik-titik yang membentuk graf berarah terhubung kuat. Apabila G_d memuat loop maka loop tersebut adalah salah satu graf berarah bagian minimal yang terhubung kuat.

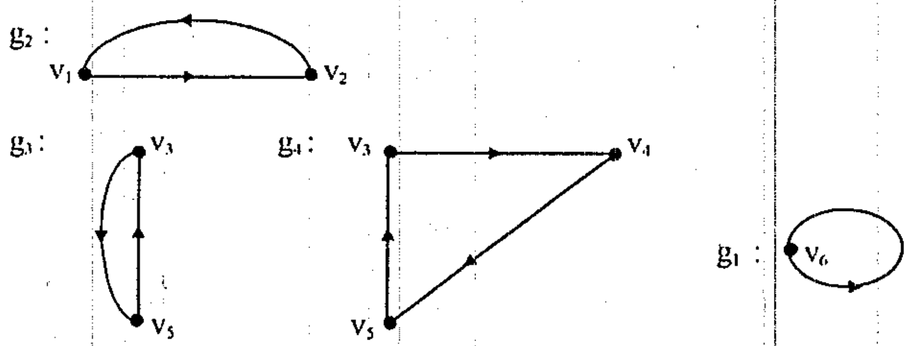
Pandang graf berarah G_d tanpa garis pararel. Dibawah ini adalah ***langkah-langkah untuk menemukan graf berarah bagian minimal yang terhubung kuat*** dalam G_d, yaitu :

1. Jika ada loop dalam G_d maka masing-masing titik pada loop-loop tersebut dipisahkan menjadi himpunan-himpunan tersendiri yang terdiri dari satu titik.
2. Memilih sembarang garis berarah (v_i,v_j), $i \neq j$, dalam G_d sedemikian sehingga terdapat path berarah dari titik v_j ke titik v_i dengan panjang minimal, sehingga diperoleh sirkuit berarah pada titik v_i dengan panjang minimal. Memisahkan titik-titik dalam sirkuit berarah tersebut kedalam himpunan tersendiri.
3. Jika masih terdapat garis berarah yang dimaksud pada langkah 2 yang bukan merupakan garis berarah dalam sirkuit berarah hasil langkah sebelumnya maka kembali ke langkah 2. Jika sudah tidak dapat ditemukan garis berarah yang dimaksud pada langkah 2 maka langkah dihentikan.

Maka himpunan-himpunan yang dihasilkan langkah-langkah tersebut adalah himpunan titik dari graf berarah bagian minimal terhubung kuat dalam G_d.

Contoh 2.1.8.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.6 (a). Dengan menggunakan langkah-langkah seperti tersebut diatas maka terdapat 4 buah graf berarah bagian minimal terhubung kuat, yaitu mempunyai himpunan titik $\{v_6\}$, $\{v_1,v_2\}$, $\{v_3,v_5\}$ dan $\{v_3,v_4,v_5\}$. Misalkan graf berarah bagian tersebut dinamai dengan g_1, g_2, g_3 dan g_4, seperti ditunjukkan pada gambar 2.1.7.



Gambar 2.1.7.

Graf berarah bagian minimal terhubung kuat dari G_d pada gambar 2.1.6 (a).

Definisi 2.1.15.

Graf berarah ***konvers*** G_d^R dari graf berarah G_d adalah graf berarah dengan arah dari setiap garis berarahnya berlawanan dengan arah setiap garis berarah dari G_d pada setiap pasangan titiknya.

Definisi 2.1.16.

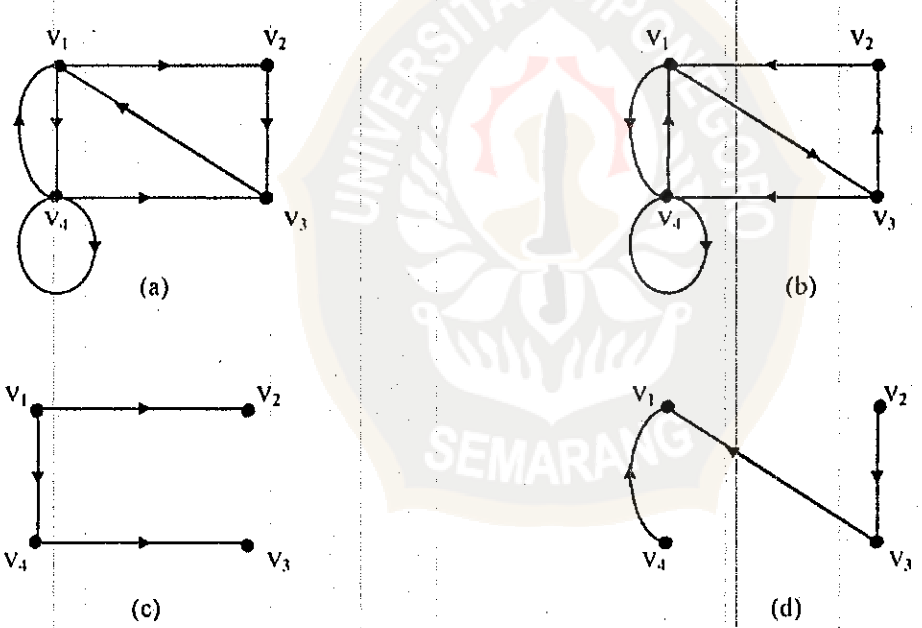
Tree berarah (directed tree) adalah graf berarah terhubung yang mana jika dihilangkan arah dari setiap garis berarahnya maka didapat graf terhubung tanpa memuat cycle.

Definisi 2.1.17.

Out-tree dari suatu titik v_i dalam graf berarah G_d, ditulis $T^+(v_i)$, adalah graf berarah bagian bentangan yang berupa tree berarah yang mempunyai tepat satu titik v_i sedemikian sehingga $d^-(v_i) = 0$ dan untuk setiap $j \neq i$, $d^-(v_j) = 1$. Dengan kata lain, $T^+(v_i)$ adalah tree berarah yang memuat semua titik dalam G_d dimana semua path berarahnya mempunyai arah keluar dari titik v_i. Sedangkan ***in-tree*** pada titik v_i dalam G_d, ditulis $T^-(v_i)$, adalah tree berarah yang mana jika dilihat dari graf berarah konvers G_d^R dari G_d maka menjadi out-tree dari titik v_i dalam G_d^R.

Contoh 2.1.9.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.8 (a) dan graf berarah konvers G_d^R dari G_d pada gambar 2.1.8 (b). Pada gambar 2.1.8 (c) merupakan out-tree dari titik v_1. Pada gambar 2.1.8 (d) merupakan in-tree pada titik v_1.



Gambar 2.1.8.

Definisi 2.1.18.

Matrik ***Kirchoff*** K = [k_{ij}] dari graf berarah G_d dengan n titik tanpa garis pararel dan loop, atau ditulis $K(G_d)$, adalah matrik bujur sangkar berukuran (nxn), yang mempunyai elemen $k_{ii} = d^-(v_i)$ dan $k_{ij} = -x_{ij}$, untuk $i \neq j$, dimana

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika ada garis berarah dari titik } v_i \text{ menuju titik } v_j \\ 0 & \text{, jika tidak ada garis berarah.} \end{cases}$$

Theorema 2.1.1.

Misalkan $K(G_d')$ adalah matrik Kirchoff dari G_d', dimana G_d' adalah graf berarah yang diperoleh dari graf berarah G_d terhubung tanpa garis pararel dengan menghilangkan semua loopnya (jika ada). Maka nilai kofaktor C_{qq} dari $K(G_d')$ sama dengan banyaknya out-tree dari titik v_q dalam G_d. Sedangkan banyaknya in-tree pada titik v_q dalam G_d sama dengan nilai kofaktor C_{qq} dari $K(G_d'^R)$, dimana $G_d'^R$ adalah graf berarah konvers dari G_d'.

Bukti.

Jika P adalah matrik bujursangkar berordo n yang terdiri dari n vektor kolom p_i, masing-masing mempunyai n komponen, yaitu : $P = [\ p_1 \quad p_2 \ \dots \ (p_i + p_i') \ \dots \ p_n\ ]$ maka dari sifat kelinieran determinan matrik didapat

$$\det(P) = \det[\ p_1 \quad p_2 \ \dots \ p_i \ \dots \ p_n\ ] + \det[\ p_1 \quad p_2 \ \dots \ p_i' \ \dots \ p_n\ ] \qquad \dots(2.1.1)$$

Dalam graf berarah G_d, misalkan titik v_j mempunyai derajat masuk d_j. Kolom ke-j dari $K(G_d')$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari d_j kolom yang berbeda, masing-masing berkorespondensi kepada graf berarah bagian dari G_d' yang mana v_j mempunyai derajat masuk 1. Kemudian persamaan (2.1.1) dapat diterapkan. Selanjutnya pemisahan kolom-kolom tersebut dapat dilakukan untuk setiap j, dengan $j \neq q$, dan $C_{qq} = \det[K_{qq}(G_d')]$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan determinan-

determinan dari graf berarah bagian, dimana $K_{qq}(G_d')$ adalah matrik bagian yang diperoleh dari $K(G_d')$ dengan menghilangkan baris ke-q dan kolom ke-q, yaitu

$$\det [K_{qq}(G_d')] = \sum_g \det [K_{qq}(g)] \qquad \text{...(2.1.2)}$$

dimana g adalah graf berarah bagian dari G_d', dengan sifat-sifat sebagai berikut :

1. setiap titik dalam g mempunyai derajat masuk dengan tepat sama dengan 1, kecuali titik v_q.
2. g mempunyai n titik, dan n-1 garis berarah.

Dari Deo, Narsingh, (1989, p. 223) didapat

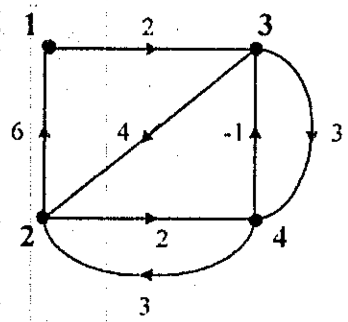
$$\det [K_{qq}(g)] = \begin{cases} 1 & \text{, jika dan hanya jika g adalah out - tree dari titik } v_q \\ 0 & \text{, lainnya.} \end{cases}$$

Jadi penjumlahan pada persamaan (2.1.2) menunjukkan banyaknya out-tree dari titik v_q dalam G_d. Karena in-tree dalam G_d adalah out-tree dalam $G_d'^R$, maka nilai kofaktor C_{qq} dari $K(G_d'^R)$ sama dengan banyaknya in-tree pada titik v_q dalam G_d. ❑

Contoh 2.1.10.

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.9. Maka matrik Kirchoffnya adalah

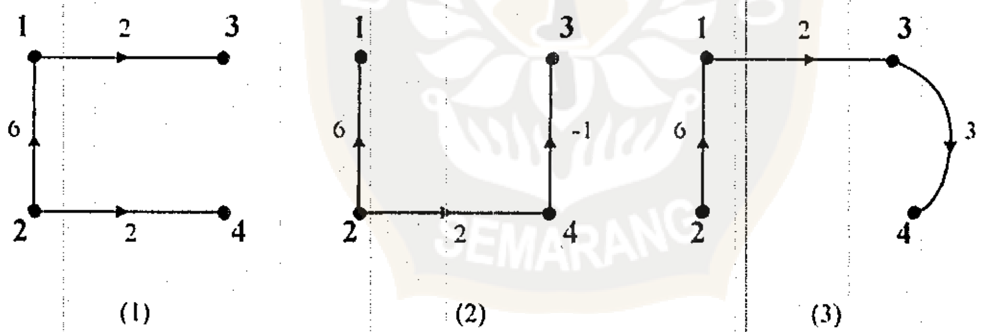
$$K(G_d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } K_{22}(G_d) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Gambar 2.1.9.
Graf berarah G_d.

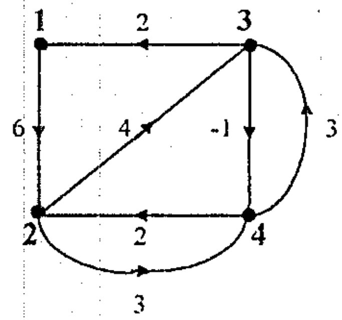
misalkan akan dicari out-tree dari titik 2, maka $C_{22} = \det[K_{22}(G_d)] = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

Jadi, banyaknya out-tree dari titik 2 adalah 3 buah, seperti ditunjukkan pada gambar 2.1.10.



Gambar 2.1.10
Semua out-tree dari titik 2 dari G_d pada gambar 2.1.9.

Sekarang akan dicari banyaknya in-tree pada titik 2, graf berarah konvers G_d^R dari G_d ditunjukkan pada gambar 2.1.11.



Gambar 2.1.11.

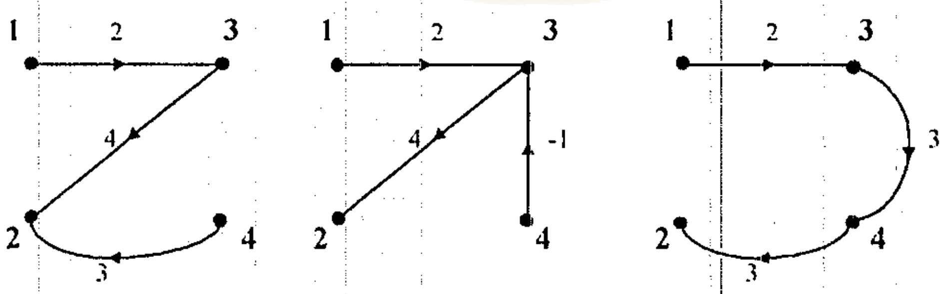
Graf berarah konvers G_d^R dari G_d.

Dari gambar 2.1.11, maka matrik Kirchoffnya adalah

$$K(G_d^R) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } K_{22}(G_d^R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

maka $\det [K_{22}(G_d^R)] = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

Jadi banyaknya in-tree pada titik 2 dalam G_d adalah 3 buah seperti ditunjukkan pada gambar 2.1.12.



Gambar 2.1.12.

Semua in-tree pada titik 2 dari G_d pada gambar 2.1.9.

Definisi 2.1.19.

Matrik bobot $W = [a_{ij}]$ dari graf berarah G_d dengan n titik yang tidak memuat garis pararel adalah matrik bujur sangkar berordo n, yang mempunyai elemen

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{, jika ada garis berarah dari titik } v_i \text{ ke titik } v_j \text{ dan } w_{ij} \text{ adalah} \\ & \text{bobot dari garis berarah tersebut.} \\ 0 & \text{, lainnya.} \end{cases}$$

Contoh 2.1.11

Pandang graf berarah G_d pada gambar 2.1.9. Maka matrik bobotnya adalah

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Graf Alir (Flow Graph).

Definisi 2.2.1.

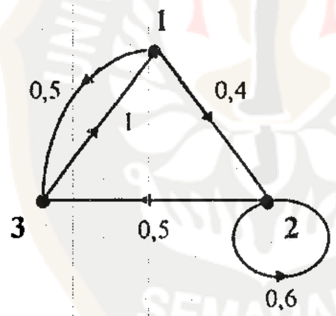
Diberikan matrik bujur sangkar $A = [a_{ij}]$ berordo n. ***Graf Alir (Flow Graph)*** yang dinotasikan dengan $G_F(A)$ adalah suatu graf berarah dengan n titik, dimana setiap garis berarahnya memiliki bobot dan titik-titiknya diberi label bilangan bulat 1,2,...,n ,sedemikian sehingga jika elemen matrik $a_{ji} \neq 0$ maka terdapat garis berarah dari titik i ke titik j dengan bobot a_{ji}, i,j = 1,2, ... ,n. Dan jika $a_{ji} = 0$ maka tidak ada garis berarah dari titik i ke titik j.

Contoh 2.2.1.

Pandang matrik A berikut ini,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka graf alir $G_F(A)$ dari matrik A mempunyai tiga titik dan lima garis berarah, seperti ditunjukkan pada gambar 2.2.1.



Gambar 2.2.1.

Graf Alir $G_F(A)$ dari matrik A.

Definisi 2.2.2.

1-faktor dari graf berarah, dinotasikan dengan h, merupakan graf berarah bagian bentangan dari $G_F(A)$ yang merupakan graf berarah reguler dengan derajat 1.

Sebelum sampai kepada theorema untuk mencari banyaknya 1-faktor h dari graf alir $G_F(A)$, maka diberikan definisi-definisi berikut ini.

Definisi 2.2.3.

Diberikan suatu graf berarah G_d dengan n titik, maka matrik $C(G_d) = [c_{ij}]$ adalah matrik bujursangkar berordo n yang berhubungan dengan G_d, dimana elemen-elemen dari matrik $C(G_d)$ adalah

$$c_{ij} = \begin{cases} k & \text{, jika terdapat k buah garis berarah dari titik i ke titik j dalam } G_d. \\ 0 & \text{, jika tidak terdapat garis berarah dari titik i ke titik j dalam } G_d. \end{cases}$$

Definisi 2.2.4.

Permanent dari matrik bujursangkar A berordo n, dinotasikan dengan per(A), didefinisikan sebagai $\text{per}(A) = \sum_j a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ dimana $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ adalah perkalian elemen-elemen matrik A dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ adalah suatu permutasi dan $\sum_j$ adalah penjumlahan dari j buah perkalian elemen-elemen matrik A.

Jika bobot dari garis berarah (i,j) dalam graf berarah G_d adalah w_{ij} dimana i sebagai titik awal dan j sebagai titik akhir (i,j = 1,2, ... ,n). Maka fungsi f(g) adalah perkalian seluruh bobot yang dimiliki oleh g, dimana g adalah graf berarah bagian dari G_d.

Theorema 2.2.1.

Banyaknya 1- faktor h dalam $G_F(A)$ yang berhubungan dengan matrik A sama dengan harga permanent matrik $C(G_F)$.

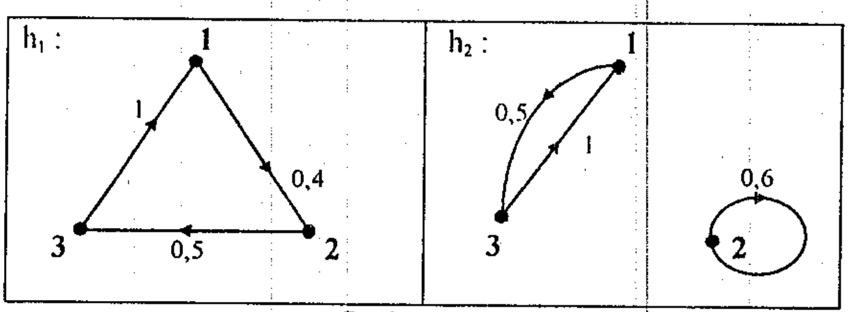
Bukti.

Diberikan matrik $A = [a_{ij}]$ berukuran (nxn) yang berhubungan dengan $G_F(A)$, dimana a_{ij} adalah elemen matrik A yang merupakan bobot garis berarah dalam $G_F(A)$. Dari definisi 2.2.4 $per(A) = \sum_j a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$. Akan dibuktikan bahwa $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \neq 0$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor h dalam $G_F(A)$. Diberikan suatu perkalian elemen-elemen matrik A, $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \neq 0$ dimana $j_1 j_2, \ldots j_n$ merupakan permutasi, maka menurut definisi 2.2.1 merupakan bobot-bobot dari rangkaian garis berarah $(j_1,1),(j_2,2) \ldots (j_n,n)$ dimana j_i sebagai titik awal dan i sebagai titik akhir garis berarah (j_i,i) untuk setiap i = 1,2, ... ,n. Dan graf berarah yang memuat rangkaian garis berarah tersebut merupakan graf berarah bagian bentangan dari $G_F(A)$, karena memuat semua titik dalam $G_F(A)$. Banyaknya garis berarah pada setiap pasangan titiknya sama yaitu 1 dan tiap-tiap pasangan titiknya berlaku titik awal dan titik akhir maka banyaknya derajat masuk dan derajat keluar pada setiap titiknya sama yaitu 1. Sehinggga menurut definisi 2.1.7, rangkaian garis berarah tersebut merupakan graf berarah reguler derajat 1, dan menurut definisi 2.2.2 disebut 1-faktor dari $G_F(A)$.

Sehingga $\sum_j a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} = \sum_h a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} + \sum_{f} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$, dimana $\sum_h$ adalah penjumlahan h buah 1-faktor dari $G_F(A)$ dan $\sum_\ell$ adalah penjumlahan ℓ buah perkalian elemen-elemen matrik yang sama dengan nol. Untuk $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = 0$ maka $\sum_\ell a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = 0$. Jadi $\sum_j a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = \sum_h a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$. Sedangkan $C(G_F)$ dapat diperoleh dari matrik bobot graf berarah $G_F(A)$ dengan mengganti elemen-elemen tidak nol dengan 1. Sehingga perkalian elemen-elemen matrik $C(G_F)$ dari $G_F(A)$ akan sama dengan 1, atau $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = 1$, untuk setiap $a_{ij_i} \neq 0$. Sesuai sifat determinan yaitu $\det(A) = \det(A^T)$ maka $\mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(A^T)$, sehingga $\mathrm{per}[C(G_F)] = \sum_h a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} = \sum_h \cdot 1 = \sum_h$, atau sama dengan banyaknya 1-faktor h dalam $G_F(A)$. ❑

Contoh 2.2.2.

Pandang graf alir $G_F(A)$ pada gambar 2.2.1 dan matrik A pada contoh 2.2.1. Matrik bobot untuk $G_F(A)$ adalah $W = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Maka $C(G_F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathrm{per}[C(G_F)] = 0\cdot1\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot1\cdot0 + 1\cdot0\cdot0 = 2$. Jadi, banyaknya 1-faktor h dari $G_F(A)$ adalah 2 buah, seperti ditunjukkan pada gambar 2.2.2.



Gambar 2.2.2.

1-faktor h dari $G_F(A)$ pada gambar 2.2.1.

Definisi 2.2.5.

1-faktorial connection dari titik i ke titik j $(i \neq j)$ dalam G_d yang dinotasikan dengan H_{ij} adalah suatu graf berarah bagian bentangan yang mengandung :

1. Path berarah dari titik i ke titik j.
2. Himpunan sirkuit berarah yang saling asing titik, jika ada, yang memuat semua titik dalam $G_F(A)$ kecuali titik-titik yang termasuk dalam path berarah dari titik i ke j.

Theorema 2.2.2.

$G_F(A)$ adalah graf alir yang berhubungan dengan matrik A berukuran (nxn), maka kofaktor $C_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{-L_{H_{ij}}} f(H_{ij})$, $i \neq j$ dimana,

$\sum_{H_{ij}}$ = penjumlahan sebanyak 1-faktorial connection H_{ij} dalam $G_F(A)$.

C_{ij} = kofaktor elemen a_{ij} dari matrik A.

H_{ij} = 1-faktorial connection dari titik i ke titik j dalam $G_F(A)$.

$L_{H_{ij}}$ = banyaknya sirkuit berarah dalam H_{ij}.

$f(H_{ij})$ = perkalian bobot-bobot dalam H_{ij}.

n = banyaknya titik dalam $G_F(A)$.

Bukti.

Misal didefinisikan matrik A^*_{ij} yang diperoleh dari matrik A dengan mengganti kolom ke-j dengan kolom nol kecuali pada elemen baris ke-i kolom ke-j diganti dengan 1. Maka $\det(A^*_{ij}) = C_{ij}$. Pandang 1-faktorial connection H_{ij} dari titik i ke titik j dalam $G_F(A)$. Jika pada H_{ij} ditambahkan sebuah garis berarah yang menghubungkan titik j ke titik i dengan bobot 1 maka sirkuit berarahnya bertambah satu. Sehingga H_{ij} tersebut menjadi h^*_{ij} yang merupakan 1-faktor dari $G_F(A^*_{ij})$ yang berhubungan dengan matrik A^*_{ij}. Dari Setyawati, Juni, (1994, hal. 32), determinan matrik A^*_{ij} adalah

$$\det(A^*_{ij}) = (-1)^n \sum_{h^*_{ij}} (-1)^{L_{h^*_{ij}}} f(h^*_{ij})$$

Dengan menghilangkan sebuah garis berarah tambahan yang menghubungkan titik j ke titik i dengan bobot 1, maka jumlah sirkuit berarah dalam h^*_{ij} berkurang satu, dengan kata lain $L_{H_{ij}} = L_{h^*_{ij}} - 1$, maka $L_{h^*_{ij}} = L_{H_{ij}} + 1$. Karena bobot garis berarah yang dihilangkan sama dengan 1, maka $f(h^*_{ij}) = f(H_{ij})$, sehingga

$$C_{ij} = \det(A^*_{ij}) = (-1)^n \sum_{H_{ij}} (-1)^{-(L_{H_{ij}} + 1)} f(H_{ij})$$

$$C_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{-L_{H_{ij}}} f(H_{ij}) \text{ . } \square$$

Theorema 2.2.3.

Banyaknya 1-faktorial connection H_{ij} dalam $G_F(A)$ sama dengan harga permanent dari matrik $C(G_F)_{ji}$ yang diperoleh dari matrik $C(G_F)$ dengan menghilangkan baris ke-j dan kolom ke-i.

Bukti.

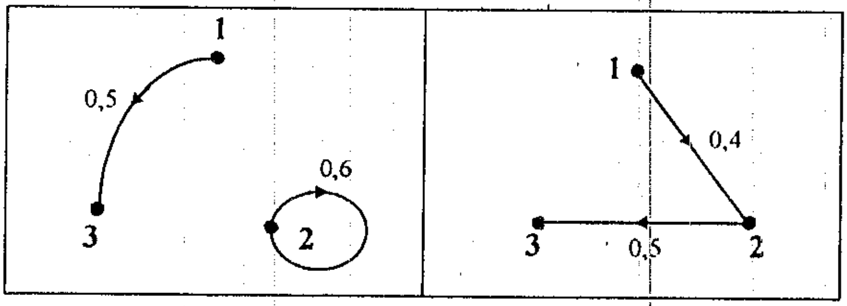
Misalkan A_{ij} adalah matrik bagian berukuran (n-1) x (n-1) yang diperoleh dari matrik A ukuran (nxn) dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j. Sehingga bila diberikan matrik tranpose dari A, yaitu $A^T = [a_{ji}]$ maka untuk memperoleh A^T_{ij} adalah dengan menghilangkan baris ke-j dan kolom ke-i dari matrik A^T. Diberikan graf alir $G_F(A)$ yang berhubungan dengan matrik A, dengan matrik bobot A^T. Dan $G_F(A_{ij})$ adalah graf alir yang berhubungan dengan matrik A_{ij}, dengan matrik bobot A^T_{ij}. Dari definisi 2.2.3, $C(G_F)$ dapat diperoleh dari matrik bobotnya (yaitu A^T) dengan mengganti elemen tidak nol dengan 1. Demikian juga $C(G_F(A_{ij}))$ dapat diperoleh dari matrik bobot $G_F(A_{ij})$ yaitu A^T_{ij} dengan mengganti elemen tak nol dengan 1. Sehingga $C(G_F(A_{ij}))$ dapat diperoleh dari $C(G_F)$ dengan menghilangkan baris ke-j dan kolom ke-i, atau ditulis $C(G_F)_{ji}$. Dari definisi tentang kofaktor didapat $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, dimana $M_{ij} = \det(A_{ij})$. Misalkan matrik A^*_{ij} didefinisikan seperti pembuktian theorema 2.2.2, maka $C_{ij} = \det(A^*_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{H_{ij}} (-1)^{-L_{H_{ij}}} \cdot f(H_{ij})$ dan $\text{per}(A^*_{ij}) = \text{per}(A_{ij}) = \sum_{H_{ij}} f(H_{ij})$. Dari pembuktian theorema 2.2.1, maka perkalian elemen-elemen matrik A^*_{ij} berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor h^*_{ij}, akibatnya $f(h^*_{ij}) = a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ dimana $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ merupakan perkalian elemen-elemen matrik A^*_{ij}. Dari pembuktian theorema 2.2.2, diperoleh $f(h^*_{ij}) = f(H_{ij}) = a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$. Untuk matrik $C(G_F(A^*_{ij}))$ dapat diperoleh dari matrik bobot $G_F(A^*_{ij})$ dengan mengganti elemen-elemen tak nol dengan 1. Sehingga perkalian elemen-elemen matrik $C(G_F(A^*_{ij}))$ akan sama dengan 1, atau $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = 1$, untuk semua $a_{ij_i} \neq 0$, sesuai sifat determinan matrik bahwa $\det(A) = \det(A^T)$ maka $per(A^*_{ij}) = per(A^{*T}_{ij})$, sehingga

$$per[C(G_F(A^*_{ij}))] = per[C(G_F(A_{ij}))] = \sum_{H_{ij}} \cdot 1$$

dan $per[C(G_F(A_{ij}))] = per[C(G_F)_{ji}] = \sum_{H_{ij}} \cdot 1 = \sum_{H_{ij}}$ atau sama dengan banyaknya 1-faktorial connection H_{ij} dari $G_F(A)$. ❑

Contoh 2.2.3.

Pandang matrik A pada contoh 2.2.1 dan graf alir $G_F(A)$ pada gambar 2.2.1. Misalkan akan dicari kofaktor C_{13} dari matrik A. Maka 1-faktorial connection H_{13} ditunjukkan pada gambar 2.2.3. Namun sebelumnya akan dicari banyaknya 1-faktorial connection H_{13}. Matrik $C(G_F)_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sedangkan $per[C(G_F)_{31}] = 1+1 = 2$. Jadi, banyaknya 1-faktorial connection H_{13} adalah 2 buah.



Gambar 2.2.3.

1-faktorial connection H_{13} dari $G_F(A)$ pada gambar 2.2.1.

Maka, dari theorema 2.2.2 dan gambar 2.2.3 didapat

$$C_{13} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{13}} (-1)^{-L_{H_{13}}} f(H_{13}) = (-1)^2\{(-1)^{-1}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6 + (-1)^0\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\} = -0{,}1.$$

Theorema 2.2.4.

Misalkan A_{ii} adalah matrik bagian berukuran (n-1)x(n-1) yang diperoleh dari matrik A berukuran (nxn) dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-i, dan $G_F(A_{ii})$ adalah graf alir yang berhubungan dengan matrik A_{ii}. Maka kofaktor

$$C_{ii} = (-1)^{n-1} \sum_{h'} (-1)^{-L_{h'}} f(h') \qquad \text{,dimana}$$

C_{ii} = kofaktor elemen a_{ii} dari matrik A.

$L_{h'}$ = jumlah sirkuit berarah dalam h'.

n-1 = jumlah titik dalam $G_F(A_{ii})$.

$\sum_{h'}$ = penjumlahan sebanyak 1-faktor h' dalam $G_F(A_{ii})$.

f(h') = perkalian bobot-bobot dalam h'.

Bukti.

C_{ii} adalah kofaktor elemen a_{ii} dari matrik A, sesuai definisi tentang kofaktor maka $C_{ii} = (-1)^{i+i} \cdot M_{ii}$ dimana $M_{ii} = \det(A_{ii})$ merupakan minor elemen a_{ii}, sehingga

$$C_{ii} = (-1)^{2i} \cdot \det(A_{ii}) = \det(A_{ii}).$$

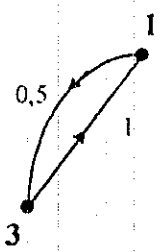
Dari Setyawati, Juni, (1994, hal. 32), determinan matrik A_{ii} yang berhubungan dengan $G_F(A_{ii})$ didapat

$$\det(A_{ii}) = (-1)^{n-1} \sum_{h'} (-1)^{-L h'} f(h')$$

Jadi, $C_{ii} = (-1)^{n-1} \sum_{h'} (-1)^{-L h'} f(h')$. □

Contoh 2.2.4.

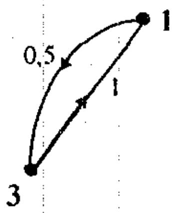
Pandang matrik A pada contoh 2.2.1 dan graf alir $G_F(A)$ pada gambar 2.2.1. Misalkan akan dicari kofaktor C_{22} dari A. Maka matrik bagian A_{22} adalah $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$. Graf alir $G_F(A_{22})$ ditunjukkan pada gambar 2.2.4.



Gambar 2.2.4.

Graf alir $G_F(A_{22})$ dari $G_F(A)$ pada gambar 2.2.1

Matrik $C(G_F(A_{22})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $per[C(G_F(A_{22}))] = 1$. Jadi banyaknya 1-faktor h' dari $G_F(A_{22})$ adalah 1 buah, seperti ditunjukkan pada gambar 2.2.5.



Gambar 2.2.5.
1-faktor h' dari $G_F(A_{22})$ pada gambar 2.2.4.

Maka dari theorema 2.2.4 didapat

$$C_{22} = (-1)^{3-1}\{(-1)^{-1}\cdot 0{,}5\cdot 1\} = -0{,}5$$

2.3. Peluang Bersyarat.

Definisi 2.3.1.

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ***ruang sampel*** dan dinyatakan dengan notasi Ω. Tiap hasil dalam Ω disebut ***unsur*** atau ***anggota*** dari Ω, atau dikatakan pula ***titik sampel***. Tiap himpunan $A \subseteq \Omega$ disebut suatu ***kejadian***.

Definisi 2.3.2.

Himpunan Kosong, biasanya ditulis $\varnothing$ atau { }, adalah himpunan khas sehingga untuk semua $w \in \Omega$, $w \notin \varnothing$.

Mudah dipahami bahwa suatu kejadian mungkin berbentuk himpunan bagian yang meliputi seluruh ruang sampel Ω, atau himpunan bagian dari Ω yang disebut himpunan kosong yang sama sekali tidak mempunyai unsur.

Definisi 2.3.3.

Irisan dua kejadian A dan B didefinisikan sebagai

$$A \cap B = \{w : w \in A \text{ dan } w \in B\}.$$

Definisi 2.3.4.

Kejadian A dan B dikatakan ***saling asing*** jika dan hanya jika $A \cap B = \varnothing$.

Contoh 2.3.1.

Misal diketahui ruang sampel $\Omega = \{x : x > 0, x \text{ bilangan bulat}\}$. Kejadian $A = \{x : x \text{ bilangan genap }, x \in \Omega\}$ dan $B = \{x : x \text{ bilangan ganjil }, x \in \Omega\}$, maka A dan B merupakan kejadian-kejadian saling asing, karena $A \cap B = \varnothing$.

Definisi 2.3.5.

Gabungan dua kejadian A dan B didefinisikan sebagai

$$A \cup B = \{w : w \in A \text{ atau } w \in B\}.$$

Definisi 2.3.6.

Kemungkinan terjadinya suatu kejadian sebagai hasil percobaan statistika dinilai dengan sekumpulan bilangan riil yang disebut ***bobot kejadian***. Jika Ω ruang sampel maka ***peluang*** suatu kejadian $A \subseteq \Omega$ adalah jumlah bobot semua titik sampel dalam A, dinotasikan dengan p(A), yang memenuhi syarat : $0 \le p(A) \le 1$, $p(\varnothing) = 0$, $p(\Omega) = 1$ dan jika $A_1, A_2, \ldots$ merupakan kejadian-kejadian saling asing maka $p(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$.

Contoh 2.3.2.

Sebuah mata uang dilantunkan dua kali, misalkan M menyatakan muka dan B menyatakan belakang dari suatu mata uang. Ruang sampel percobaan ini adalah Ω = {MM,MB,BM,BB}. Misalkan A adalah kejadian bahwa paling sedikit muncul muka sekali, maka A = {MM,MB,BM}. Bila mata uang tersebut setangkup, maka tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul yang sama. Karena banyaknya titik sampel dalam Ω adalah 4, maka bobot dari titik sampel adalah $\frac{1}{4}$. Maka peluang bahwa paling sedikit muncul muka sekali adalah $p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Definisi 2.3.7.

A dan B dua kejadian dalam ruang sampel Ω, dan bila $p(B) > 0$ maka ***peluang bersyarat*** A diketahui B, dinotasikan $p(A \mid B)$, didefinisikan sebagai

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Contoh 2.3.3.

Peluang suatu penerbangan yang telah terjadwal teratur berangkat tepat waktu adalah $p(B) = 0{,}83$, peluang sampai tepat waktu adalah $p(A) = 0{,}82$ dan peluang berangkat dan sampai tepat waktu adalah $p(A \cap B) = 0{,}78$. Maka peluang sampai tepat waktu jika diketahui berangkat tepat waktu adalah

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0{,}78}{0{,}83} = 0{,}94.$$

Sedangkan peluang pesawat berangkat tepat waktu bila diketahui sampai tepat waktu adalah

$$p(B \mid A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}78}{0{,}82} = 0{,}95.$$

Definisi 2.3.8.

Dua kejadian A dan B dikatakan ***bebas*** jika dan hanya jika $p(B|A) = p(B)$ dan $p(A|B) = p(A)$, atau $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Jika tidak demikian maka A dan B dikatakan ***tidak bebas***.

Contoh 2.3.4.

Misal diketahui ruang sampel $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dengan peluang tiap titik sampel sama, yaitu $\frac{1}{9}$. Misalkan $A = \{1,3,9\}$ maka $p(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ dan $B = \{2,3,4\}$ maka $p(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$. Sedangkan $A \cap B = \{3\}$ maka $p(A \cap B) = \frac{1}{9}$.

Kejadian A dan B bebas, karena $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

2.4. Rantai Markov Parameter Diskrit.

Definisi 2.4.1.

Suatu ***peubah acak*** X adalah suatu fungsi bernilai riil dengan daerah definisi ruang sampel Ω, yaitu untuk setiap $w \in \Omega$, $X(w) \in \mathbf{R} = \{y : -\infty < y < +\infty\}$.

Definisi 2.4.2.

Diberikan himpunan indeks I, ***proses stokhastik*** yang diberi indeks oleh I adalah himpunan peubah acak $\{X_t : t \in I\}$. Himpunan semua nilai yang mungkin untuk suatu peubah acak X_t dari suatu proses stokhastik disebut ***ruang state***, dan dinotasikan dengan ξ.

Contoh 2.4.1.

Misalkan peubah acak X_t menyatakan hasil lemparan ke-t jika sebuah dadu dilempar, dimana $t \geq 1$. Maka himpunan $\{X_t : t \geq 1\}$ merupakan suatu proses stokhastik. Untuk t yang berbeda akan didapat peubah acak yang berbeda X_t. Ruang state proses stokhastik tersebut adalah $\xi = \{1,2,3,4,5,6\}$ sama untuk setiap t.

Definisi 2.4.3.

Jika $\{X_t : t \in I\}$adalah proses stokhastik dengan ruang state ξ sedemikian sehingga diberikan nilai X_s, nilai-nilai X_t, $t > s$, tidak tergantung pada nilai-nilai X_u, $u < s$, maka proses tersebut dikatakan mempunyai ***sifat Markov*** dan disebut ***proses Markov***. Dengan kata lain, jika $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$ dan $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \xi$ berlaku

$$p(a \leq X_t \leq b \mid X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = p(a \leq X_t \leq b \mid X_{t_n} = x_n),$$

untuk sembarang bilangan riil a dan b, maka proses $\{X_t : t \in I\}$ disebut ***proses Markov***.

Definisi 2.4.4.

Diberikan proses Markov $\{X_t : t \in I\}$dengan ruang state ξ. Jika ξ terhitung maka proses $\{X_t : t \in I\}$disebut ***rantai Markov***. Sedangkan apabila t merupakan parameter diskrit maka rantai Markov $\{X_t : t \in I\}$ disebut ***rantai Markov parameter diskrit***. Dengan kata lain, proses $\{X_t : t = 0,1,2, ...\}$ disebut rantai Markov parameter diskrit apabila memenuhi

$$p(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) = p(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t),$$

untuk setiap bilangan bulat tak negatif t dan $x_0, x_1, \dots, x_{t+1} \in \xi$.

Definisi 2.4.5.

Misalkan $\{X_t : t = 0,1,2, ...\}$ adalah rantai Markov dengan ruang state ξ. Peluang $p(x,y) = p(X_{t+1} = y \mid X_t = x)$ merupakan ***peluang transisi*** dari state x ke state y untuk rantai tersebut bila memenuhi $p(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x,y \in \xi$ dan $\sum_{y \in \xi} p(x,y) = 1$.

Diberikan rantai Markov $\{X_t\}$, peluang transisi p(x,y) mungkin bebas terhadap t. Jika peluang transisi p(x,y) bebas terhadap t maka rantai Markov $\{X_t\}$ dikatakan ***homogen*** (atau mempunyai ***peluang transisi stasioner***). Jika peluang transisi p(x,y) tergantung pada t (dalam kasus ini dinotasikan dengan ${}^{(t)}p(x,y)$) maka rantai dikatakan ***non-homogen***. Tetapi disini hanya dibatasi pembahasan tentang rantai Markov homogen, dan untuk pembahasan selanjutnya tentang rantai Markov diasumsikan homogen. Karena itu, $p(X_{t+1} = y \mid X_t = x)$ tidak tergantung pada t, maka

$p(X_{t+1} = y \mid X_t = x) = p(X_1 = y \mid X_0 = x) = p(x,y)$. Jadi definisi 2.4.5, dapat pula diganti dengan $p(x,y) = p(X_1 = y \mid X_0 = x)$.

Definisi 2.4.6.

Misalkan $\{X_t : t = 0,1,...\}$ adalah rantai Markov dengan ruang state ξ. Peluang $\pi_0(x)$, $x \in \xi$, yang didefinisikan dengan $\pi_0(x) = p(X_0 = x)$ disebut ***peluang awal*** untuk rantai tersebut pada state x jika memenuhi $\pi_0(x) \geq 0$ untuk setiap $x,y \in \xi$ dan $\sum_{x \in \xi} \pi_0(x) = 1$.

Contoh 2.4.2.

Diberikan peristiwa yang merupakan rantai Markov berikut ini. Sebuah mesin pada waktu mulai dipakai pada sembarang hari adalah rusak atau baik. Seandainya mesin itu rusak pada awal hari ke-t, peluang bahwa selama hari itu dapat diperbaiki dan pada awal hari berikutnya, (hari ke-(t+1)) baik, sama dengan p. Seandainya mesin pada awal hari ke-t baik, peluangnya pada awal hari ke-(t+1) rusak adalah q. Misal diketahui pula bahwa $\pi_0(0)$ adalah peluang mesin rusak pada awal hari ke-0. Mesin datang dari pabrik sebelum dipakai, peluang mesin rusak adalah $\pi_0(0)$, tentunya peluang mesin dalam keadaan baik pada awal hari ke-0 adalah $\pi_0(1)$ dan $\pi_0(1) = 1-\pi_0(0)$, dimana state 0 menyatakan keadaan mesin rusak dan state 1 menyatakan keadaan mesin baik. Sedangkan X_t adalah peubah acak yang menunjukkan keadaan mesin hari ke-t. Dari pengandaian diatas dapat disimpulkan bahwa :

ruang state $\xi = \{0,1\}$, $t \geq 0$, $p(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0) = p$,$p(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1) = q$,$p(X_0 = 0) = \pi_0(0)$ dan $p(X_0 = 1) = \pi_0(1) = 1 - \pi_0(0)$. Karena ξ hanya mempunyai dua state maka dapat dicari bahwa $p(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = 1-p$, yang artinya ialah bila diketahui pada hari ke-t mesin rusak, peluang pada hari berikutnya, ke-(t+1), mesin masih tetap rusak adalah 1-p. Dan dapat pula dicari bahwa $p(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1) = 1-q$, yang berarti bila diketahui pada hari ke-t mesin baik, peluang hari berikutnya mesin masih tetap baik adalah 1-q. Dari definisi 2.4.5, maka peluang-peluang transisi untuk rantai Markov tersebut adalah $p(0,1) = p$, $p(1,0) = q$, $p(0,0) = 1-p$ dan $p(1,1) = 1-q$.

Theorema 2.4.1.

Misalkan $\{X_t : t = 0,1,2, \ldots\}$ rantai Markov dengan ruang state $\xi = \{x_0, x_1, \ldots , x_n\}$ dan $p(x_k,x_{k+1})$ adalah peluang transisi dari state x_k ke state x_{k+1}, dan $\pi_0(x_k)$ adalah peluang awal untuk rantai tersebut pada state x_k. Maka peluang bersama

$$p(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots , X_n = x_n) = \pi_0(x_0)\, p(x_0,x_1) \ldots p(x_{n-1},x_n). \qquad \ldots(2.4.1)$$

Bukti.

Misal didefinisikan kejadian $A_n = \{X_n = x_n\}$ ... (2.4.2)

dan kejadian

$$B_n = \{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots , X_n = x_n\} \qquad \ldots(2.4.3)$$

Sifat Markov pada definisi 2.4.4 menyatakan bahwa

$$p(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots , X_n = x_n) = p(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

berarti dari persamaan (2.4.2) dan (2.4.3) didapat

$$p(A_{n+1} | B_n) = p(A_{n+1} | A_n) \qquad ...(2.4.4)$$

dan $A_n \cap B_{n-1} = B_n$, sehingga dengan menggunakan definisi 2.3.7 tentang peluang bersyarat didapat

$$p(B_n) = p(A_n | B_{n-1})\, p(B_{n-1}) \qquad ...(2.4.5)$$

kemudian dengan mensubstitusikan persamaan $p(B_{n-1}) = p(A_{n-1} | B_{n-2}) \cdot p(B_{n-2})$ ke dalam persamaan (2.4.5) didapat

$$p(B_n) = p(A_n | B_{n-1})\, p(A_{n-1} | B_{n-2})\, p(B_{n-2}).$$

Proses tersebut dilanjutkan berulang-ulang sehingga didapat

$$p(B_n) = p(A_n | B_{n-1})\, p(A_{n-1} | B_{n-2}) \;\ldots\; p(A_1 | B_0)\, p(B_0). \qquad ... (2.4.6)$$

Oleh sifat Markov pada persamaan (2.4.4), setiap kejadian B_j pada ruas kanan persamaan (2.4.6) dapat diganti oleh kejadian A_j, sehingga didapat

$$p(B_n) = p(A_n | A_{n-1})\, p(A_{n-1} | A_{n-2}) \;\ldots\; p(A_1 | A_0)\, p(A_0).$$

Jadi dari definisi 2.4.5 dan 2.4.6 didapat

$$p(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = p(x_{n-1}, x_n) \ldots p(x_0, x_1)\, \pi_0(x_0)$$

atau $p(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0)\, p(x_0, x_1) \ldots p(x_{n-1}, x_n)$. ❑

Contoh 2.4.3.

Pandang rantai Markov pada contoh 2.4.2. Peluang kejadian rantai pada hari ke-0 mesin baik, hari ke-1 mesin rusak dan hari ke-2 mesin masih tetap rusak adalah $p(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0)$. Dari theorema 2.4.1 didapat

$$p(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0) = \pi_0(1)\, p(1,0)\, p(0,0).$$

Jadi, dari hasil contoh 2.4.2 didapat

$$p(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0) = \pi_0(1)q(1-p).$$

Definisi 2.4.7.

Sembarang matrik bujursangkar dengan elemen-elemennya bilangan riil tak negatif, dimana jumlah semua elemen dalam setiap barisnya sama dengan 1 disebut dengan ***matrik stokhastik***.

Definisi 2.4.8.

Misalkan suatu rantai Markov mempunyai ruang state $\xi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Dapat dibuat matrik stokhastik P yang berukuran (n+1)x(n+1) yang elemen-elemennya adalah peluang transisi $p(x_i,x_j)$ dari state x_i ke state x_j, untuk semua $x_i,x_j \in \xi$. Matrik P ini disebut ***matrik transisi***, yang disajikan dalam bentuk :

$$P = \begin{bmatrix} p(x_0,x_0) & p(x_0,x_1) & \cdots & p(x_0,x_n) \\ p(x_1,x_0) & p(x_1,x_1) & \cdots & p(x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(x_n,x_0) & p(x_n,x_1) & \cdots & p(x_n,x_n) \end{bmatrix}$$

dimana $p(x_i,x_j)$ adalah elemen baris ke-(i+1) kolom ke-(j+1) dari P, untuk setiap i,j = 0,1,2, ... ,n.

Contoh 2.4.4.

Pandang rantai Markov pada contoh 2.4.2. Maka sesuai definsi 2.4.8, matrik transisi P untuk rantai Markov tersebut adalah

$$P = \begin{bmatrix} p(0,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.9.

Misalkan $\{X_t : t = 0,1,2, \ldots\}$ adalah rantai Markov dengan ruang state ξ. ***Peluang transisi m-langkah*** dari state x ke state y, dinotasikan dengan $p^m(x,y)$, didefinisikan sebagai $p^m(x,y) = p(X_m = y \mid X_0 = x)$, dengan $m \geq 0$, untuk setiap $x,y \in \xi$. Dan

$$p^m(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & , m = 1 \\ \delta_{x,y} & , m = 0 \end{cases} \quad \text{, dimana} \quad \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & , x = y \\ 0 & , x \neq y. \end{cases}$$

Berdasarkan sifat homogen terhadap t (peluang transisi stasioner) rantai Markov $\{X_t : t = 0,1,2, \ldots\}$, maka untuk setiap bilangan bulat $t \geq 0$ berlaku $p^m(x,y) = p(X_m = y \mid X_0 = x) = p(X_{m+t} = y \mid X_t = x)$.

Theorema 2.4.2.

Misalkan $\{X_t : t = 0,1,2, \ldots\}$ adalah rantai Markov dengan ruang state ξ, maka

$$p^m(x,y) = \sum_{y_1 \in \xi} \sum_{y_2 \in \xi} \cdots \sum_{y_{m-1} \in \xi} p(x,y_1)\, p(y_1,y_2) \ldots p(y_{m-1},y) \quad \text{, dimana } m \geq 2.$$

Bukti.

Dibuktikan dengan menggunakan induksi pada m.

Untuk m = 2, dari definisi 2.4.9 didapat

$$p^2(x,y) = p(X_2 = y \mid X_0 = x). \qquad \text{...(2.4.7)}$$

Persamaan (2.4.7) artinya adalah peluang transisi dari state x ke state y ditempuh sebanyak dua langkah. Misalkan dipilih sembarang state $y_1 \in \xi$ sedemikian sehingga pada langkah ke-1 rantai berada pada state y_1, maka peluangnya adalah

$$p(X_1 = y_1, X_2 = y \mid X_0 = x).$$

Maka dari definisi 2.3.7 tentang peluang bersyarat didapat

$$p(X_1 = y_1, X_2 = y \mid X_0 = x) = \frac{p(X_0 = x, X_1 = y_1, X_2 = y)}{p(X_0 = x)}.$$

Menurut theorema 2.4.1 dan definisi 2.4.6 didapat

$$p(X_1 = y_1, X_2 = y \mid X_0 = x) = \frac{\pi_0(x)\, p(x,y_1)\, p(y_1,y)}{\pi_0(x)} = p(x,y_1)\, p(y_1,y).$$

Karena untuk setiap state $y_1 \in \xi$ yang berbeda merupakan kejadian rantai melalui state x, y_1 dan y yang berbeda-beda maka didapat kejadian-kejadian yang saling asing. Jadi, total peluang transisi dari state x ke state y yang ditempuh dalam dua langkah adalah $p^2(x,y) = \sum_{y_1 \in \xi} p(X_1 = y_1, X_2 = y \mid X_0 = x)$

$$p^2(x,y) = \sum_{y_1 \in \xi} p(x,y_1)\, p(y_1,y). \qquad \text{...(2.4.8)}$$

Terbuktilah theorema benar untuk m = 2. Andaikan theorema benar untuk m = k, maka berlaku $p^k(x,y) = \sum_{y_1 \in \xi} \sum_{y_2 \in \xi} \cdots \sum_{y_{k-1} \in \xi} p(x,y_1)\,p(y_1,y_2) \ldots p(y_{k-1},y)$. Akan dibuktikan theorema benar untuk $m = k+1$, $p^{k+1}(x,y) = p(X_{k+1} = y \mid X_0 = x)$. Dengan mengganti $p(y_1,y)$ pada persamaan (2.4.8) dengan $p^k(y_1,y)$ didapat $p^{k+1}(x,y) = \sum_{y_1 \in \xi} p(x,y_1)\,p^k(y_1,y)$. Karena theorema benar untuk $m = k$, maka

$$p^{k+1}(x,y) = \sum_{y_1 \in \xi} p(x,y_1) \left\{ \sum_{y_2 \in \xi} \sum_{y_3 \in \xi} \cdots \sum_{y_k \in \xi} p(y_1,y_2)\,p(y_2,y_3) \ldots p(y_k,y) \right\}$$

$$= \sum_{y_1 \in \xi} \sum_{y_2 \in \xi} \cdots \sum_{y_k \in \xi} p(x,y_1)\,p(y_1,y_2) \ldots p(y_k,y)$$

$$= \sum_{y_1 \in \xi} \sum_{y_2 \in \xi} \cdots \sum_{y_{(k+1)-1} \in \xi} p(x,y_1)\,p(y_1,y_2) \ldots p(y_{(k+1)-1},y)$$

Jadi, terbukti juga bahwa theorema benar untuk $m = k+1$. ☐

Definisi 2.4.10.

Misalkan suatu rantai Markov dengan ruang state $\xi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Untuk setiap bilangan bulat tak negatif m, misal notasi P^m menyatakan ***matrik transisi m-langkah***, dengan elemen baris ke-(i+1) kolom ke-(j+1) adalah peluang transisi m-langkah $p^m(x_i,x_j)$, untuk setiap $i,j = 0,1, \ldots ,n$. Dengan kata lain,

$$P^m = \begin{bmatrix} p^m(x_0,x_0) & p^m(x_0,x_1) & \cdots & p^m(x_0,x_n) \\ p^m(x_1,x_0) & p^m(x_1,x_1) & \cdots & p^m(x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^m(x_n,x_0) & p^m(x_n,x_1) & \cdots & p^m(x_n,x_n) \end{bmatrix}$$

atau bisa disingkat dengan $P^m = [(p^m(x_i,x_j))_{(i+1)(j+1)}]$,dengan $i,j = 0,1, \ldots ,n$.

Untuk mencari matrik transisi m-langkah digunakan operasi pemangkatan matrik transisi. Untuk itu, dasar teori untuk operasi tersebut diberikan pada theorema 2.4.3.

Theorema 2.4.3.

Untuk setiap bilangan bulat m > 0, matrik transisi m-langkah P^m adalah matrik hasil pangkat m dari matrik transisi P. Dengan kata lain, $P^m = \underbrace{P \cdot P \cdot \cdots \cdot P}_{\text{m-faktor}}$.

Bukti.

Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi pada m. Untuk m = 1, $P^1 = P$, merupakan matrik hasil pangkat 1 dari matrik transisi P, karena $P^1 = [(p^1(x_i,x_j))_{(i+1)(j+1)}]$, dengan i,j = 0,1, ... ,n. Dari definisi 2.4.8 dan definisi 2.4.9 didapat

$$P^1 = [(p(x_i,x_j))_{(i+1)(j+1)}] = \begin{bmatrix} p(x_0,x_0) & p(x_0,x_1) & \cdots & p(x_0,x_n) \\ p(x_1,x_0) & p(x_1,x_1) & \cdots & p(x_1,x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(x_n,x_0) & p(x_n,x_1) & \cdots & p(x_n,x_n) \end{bmatrix} = P.$$

Jadi terbukti theorema benar untuk m = 1. Misalkan theorema benar untuk m = k maka matrik transisi k-langkah P^k merupakan hasil pangkat k dari matrik transisi P.

Jadi $P^k = \underbrace{P \cdot P \cdot \cdots \cdot P}_{\text{k-faktor}}$. Sekarang akan dibuktikan theorema benar untuk m = k+1,

$P^{k+1} = [(p^{k+1}(x_i,x_j))_{(i+1)(j+1)}]$, dari theorema 2.4.2 didapat

$P^{k+1} = \left[\left(\sum_{y \in \xi} p^k(x_i, y)\, p(y, x_j)\right)_{(i+1)(j+1)}\right]$ dimana ξ adalah ruang state untuk rantai Markov tersebut. Jadi $P^{k+1} = [(p^k(x_i,y))_{(i+1)(j+1)}]\cdot[(p(y,x_j))_{(i+1)(j+1)}] = P^k \cdot P = \underbrace{P \cdot P \cdot \cdots \cdot P}_{\text{k-faktor}} =$

$\underbrace{(P \cdot P \cdot P \cdot \cdots \cdot P)}_{\text{(k+1)-faktor}}$. ❑

Contoh 2.4.5.

Pandang matrik transisi P pada contoh 2.4.4. Maka matrik transisi 2-langkah untuk rantai Markov tersebut adalah

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)^2 + pq & (1-p)p + p(1-q) \\ q(1-p) + (1-q)q & qp + (1-p)^2 \end{bmatrix}.$$

2.5. Transformasi-z.

Definisi 2.5.1.

Untuk suatu barisan berhingga $\{x_k\}$ yang diketahui, didefinisikan sebuah fungsi F(z) dari peubah kompleks z dengan membentuk polinom :

$$F(z) = Z[\{x_k\}] = \sum_{k=n}^{m} x_k\, z^k = x_n z^n + x_{n+1} z^{n+1} + \ \ldots + x_{n+m} z^{n+m}. \qquad \ldots(2.5.1)$$

Fungsi F(z) disebut ***transformasi-z*** dari barisan $\{x_k\}$. Pada persamaan (2.5.1), indeks-indeks awal dan akhir dari barisan yaitu n dan m, dapat merupakan sembarang bilangan bulat mulai dari $-\infty$ hingga $+\infty$. Sedangkan ***invers transformasi-z*** dari F(z) didefinisikan sebagai

$$Z^{-1}\{F(z)\} = \{x_k\}. \qquad \ldots(2.5.2)$$

Contoh 2.5.1.

Pandang barisan $\{x_k\} = \{2^k\}$, untuk $k \geq 0$. Maka dari definisi 2.5.1, didapat

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k = 1 + 2z + 2^2z^2 + 2^3z^3 + \ldots = \frac{1}{1-2z}$$

Jadi invers transformasi-z dari F(z) adalah $Z^{-1}\left\{\dfrac{1}{1-2z}\right\} = \{2^k\}$.

Sifat-sifat Transformasi-z :

1. Kelinieran.

Transformasi-z adalah suatu operasi linier, yaitu

$$Z[a\{x_k\} + b\{y_k\}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ax_k + by_k) z^k$$

$$= a\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^k + b\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k z^k . \qquad \ldots(2.5.3)$$

2. Pergeseran.

Definisi 2.5.2.

Transformasi-z ***satu pihak (unilateral)*** dari barisan $\{x_k\}$ didefinisikan sebagai

$$F_u(z) = Z_u[\{x_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k . \qquad ...(2.5.4)$$

Pandang barisan maju $\{x_{k+k_0}\}$,dengan $k_0 \geq 0$, maka

$$Z_u[\{x_{k+k_0}\}] = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+k_0} z^k$$

$$= \sum_{m=k_0}^{\infty} x_m z^m z^{-k_0}$$

$$= z^{-k_0} \sum_{m=k_0}^{\infty} x_m z^m$$

$$= z^{-k_0} \{x_{k_0} z^{k_0} + x_{k_0+1} z^{k_0+1} + \ldots\}$$

$$= z^{-k_0} \{F_u(z) - x_0 - x_1 z - \ldots - x_{k_0-1} z^{k_0-1}\} . \qquad ...(2.5.5)$$

3. Perkalian dengan k.

Misalkan $Z[\{x_k\}] = F(z)$, akan dicari transformasi dari barisan $\{kx_k\}$. Dari definisi 2.5.1 didapat $Z[\{kx_k\}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx_k z^k = z \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx_k z^{k-1}$.

Dari rumus pendifferensialan suatu polinom z^k, yaitu : $\frac{d}{dz} z^k = kz^{k-1}$ maka

$$Z[\{kx_k\}] = z\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\left(\frac{d}{dz}z^k\right)$$

$$= z\frac{d}{dz}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^k$$

$$= z\frac{d}{dz}F(z). \qquad ...(2.5.6)$$

Dengan induksi dapat diperluas hasil diatas keperkalian dengan sembarang pangkat bilangan bulat positif n. Jadi

$$Z[\{k^n x_k\}] = [z\frac{d}{dz}]^n F(z) \qquad ...(2.5.7)$$

Sifat ke-3 dari transformasi-z ini dapat digunakan untuk menurunkan rumus-rumus dibawah ini, misalkan $f(z) = Z[\{a^k\}] = \frac{1}{1-az}$ dan $k \geq 0$ maka

I. $Z[\{ka^k\}] = \frac{az}{(1-az)^2}$ ...(2.5.8)

II. $Z[\{ka^{k-1}\}] = \frac{z}{(1-az)^2}$ ...(2.5.9)

III. $Z[\{(k+1)a^k\}] = \frac{1}{(1-az)^2}$, $k \neq -1$ ...(2.5.10)

Untuk mencari invers transformasi-z dari fungsi rasional F(z) terlebih dahulu merubah kedalam bentuk pecahan parsial, yang kemudian dengan menggunakan rumus-rumus pada sifat perkalian dengan k, akan didapat barisan $\{x_k\}$ hasil invers transformasi-z.

Contoh 2.5.2.

Pandang fungsi $F(z) = \dfrac{z}{1 - \frac{11}{10} z + \frac{1}{10} z^2}$

dengan memfaktorkan penyebutnya didapat

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)\,(1-\frac{1}{10}z)}$$

dengan merubah kedalam bentuk pecahan parsial didapat

$$F(z) = \frac{c_1}{1-z} + \frac{c_2}{1-\frac{1}{10}z}, \text{ dimana } c_1 = \frac{10}{9} \text{ dan } c_2 = -\frac{10}{9}.$$

Maka invers transformasi-z nya adalah

$$Z^{-1}[F(z)] = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{10}{9}}{1-z} - \frac{\frac{10}{9}}{1-\frac{1}{10}z}\right\}$$

$$= \frac{10}{9} Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} - \frac{10}{9} Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{10}z}\right\}$$

$$= \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k\right)$$

Jadi didapat barisan $\{x_k\} = \{\frac{10}{9}(1 - (\frac{1}{10})^k)\}$.