BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1.1:

Jika A adalah matriks n x n, maka vektor tak nol x dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigen value*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk suatu matriks A berukuran n x n, determinan

$$|\lambda I - A|$$

disebut polinomial karakteristik dari A, yaitu suatu polinomial derajat n dalam λ.

Persamaan karakteristik diberikan oleh

$$|\lambda I - A| = 0$$

Bila determinan (λI-A) diperluas, persamaan karakteristik menjadi

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$= 0$$

n akar-akar dari persamaan karakteristik disebut nilai eigen dari A, atau disebut juga akar-akar karakteristik.

Contoh 2.1.1:

Diberikan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristiknya adalah

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\right| = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

Polinomial mempunyai dua akar $\lambda = 1$ dan $\lambda = 4$. Nilai –nilai ini adalah nilai eigen dari matriks A.

Untuk mendapatkan vektor eigen yang bersesuaian, pertama kita masukkan $\lambda = 1$ ke dalam persamaan homogen $[\lambda I\text{-}A]x = 0$, menghasilkan

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dua persamaan skalar yang didefinisikan ini ekivalen dengan $-x_1 = x_2$, maka salah satu penyelesaiannya adalah

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dan penyelesaian umumnya adalah

$$x = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

untuk $a \neq 0$. Vektor ini adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$.

Untuk $\lambda = 4$, menghasilkan

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka salah satu vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dan penyelesaian umumnya adalah

$$x = \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix}$$

untuk $b \neq 0$

2.2. Diagonalisasi

Definisi 2.2.1:

Suatu matriks A berorde n x n, disebut dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks X non singular dan suatu matriks diagonal P sedemikian rupa sehingga

$$X^{-1}AX = P$$

Dikatakan bahwa X mendiagonalisasi A.

Teorema 2.2.1:

Suatu matriks A berorde n x n, dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti:

$\Rightarrow$ Misalkan A dapat didiagonalisasi. Selanjutnya terdapat suatu matriks tak singular X, sehingga AX = XP. Jika $x_1,x_2, \ldots,x_n$ adalah vektor kolom dari X, maka

$$Ax_j = \lambda_j x_j \qquad (\lambda_j = p_{jj}), \qquad \text{untuk setiap j.}$$

Jadi untuk setiap j, λ_j adalah nilai eigen dari A dan x_j adalah vektor eigen yang diiliki λ_j .Karena vektor kolom X adalah bebas linear, maka A mempunyai n vektor eigen bebas linear.

$\Leftarrow$ Misalkan matriks A mempunyai n vektor eigen bebas linear $x_1,x_2, \ldots,x_n$. Misalkan λ_j adalah nilai eigen dari A yang bersesuaian dengan x_j untuk setiap j(beberapa dari λ_j boleh sama). Misalkan X adalah matriks dimana vektor kolom ke j adalah x_j.Untuk j = 1,2,…,n. Selanjutnya terlihat bahwa $Ax_j = \lambda_j x_j$ adalah vektor kolom ke-j dari AX, maka

$$\begin{aligned} AX &= (Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n) \\ &= (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n) \\ &= (x_1,x_2, \ldots,x_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= XP \end{aligned}$$

Karena X mempunyai n vektor kolom yang bebas linear, maka X adalah tak singular dan karena itu

$$P = X^{-1}XP = X^{-1}AX \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.2.1:

Akan dicari matriks X yang mendiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Nilai eigen dari matriks A adalah

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -2 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 4)$$

nilai eigen dari A yaitu $\lambda = 1$ dan $\lambda = -4$.

Misalkan $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vektor eigen yang bersesuaian jika hanya jika X adalah penyelesaian tak trivial dari

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Untuk $\lambda = 1$, maka

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dua persamaan skalar yang diberikan ekivalen dengan $3x_2 = x_1$, sehingga penyelesaiannya adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor ini adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$.

Untuk $\lambda = -4$, maka

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

didapatkan $x_2 = 2x_1$, sehingga penyelesaiannya

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektor ini adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = -4$.

Matriks X adalah

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks X ini akan diperoleh matriks diagonal

$$X^{-1}AX = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2.3. Matriks Konjugat

Definisi 2.3.1:

Konjugat dari matriks A adalah matriks dimana setiap elemen-elemennya merupakan konjugat komplek dari elemen korespondensi A. Konjugat dari A dinotasikan $\bar{A} = \left[\bar{a}_{ij}\right]$, dimana $\bar{a}_{ij}$ adalah konjugat komplek dari a_{ij}.

Contoh 2.3.1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+j & -3-j3 & -1+j4 \\ -1+j & -1 & -2+j3 \end{bmatrix}, \qquad (2.3.1)$$

maka

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-j & -3+j3 & -1-j4 \\ -1-j & -1 & -2-j3 \end{bmatrix}$$

2.4. Transpos Matriks

Definisi 2.4.1:

Jika baris dan kolom matriks A n x m ditukarkan, maka hasilnya matriks m x n disebut tranpose dari A. Tranpose dari A dinotasikan dengan A^T.

Jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

maka

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{n2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{1m} & a_{2m} & . & . & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Catatan : $(A^T)^T = A$.

Jika A+B dan AB didefinisikan, maka

$(A+B)^T = A^T + B^T$; $(AB)^T = B^T A^T$

2.5. Transpos Konjugat

Definisi 2.5.1:

Transpos konjugat adalah konjugat dari transpos matriks. Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$, transpos konjugat dinotasikan dengan $\bar{A}^T$ atau A* sehingga

$$\bar{A}^T = A^* = \left[\bar{a}_{ij}\right]$$

Contoh 2.5.1:

Jika A adalah matrik pada persamaan (2.3.1), maka

$$\bar{A}^T = A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1-j & -1-j \\ 1 & -3+j3 & -1 \\ 0 & -1-j4 & -2-j3 \end{bmatrix}$$

Konjugat dari A^T adalah sama dengan transpos dari $\bar{A}$. Catatan bahwa $(A^*)^* = A$.

Jika A + B dan AB bisa didefinisikan, maka

$$(A + B)^* = A^* + B^*, (AB) = B^*A^*$$

Catatan juga bahwa jika c adalah bilangan komplek, maka

$$(cA)^* = \bar{c}A$$

Jika A adalah matrik real (semua elemennya real), transpos konjugat A* adalah sama dengan transpos A^T.

2.6. Polinomial Matriks n x n, Polinomial Karakteristik dan Teorema Cayley-Hamilton

2.6.1. Polinomial Matriks n x n

Definisi 2.6.1:

Bila polinomial berhingga dari suatu skalar x diberikan

$$\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

maka

$$\varphi(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0$$

disebut suatu polinomial dalam A, dimana A matriks n x n.

2.6.2. Polinomial Karakteristik

Definisi 2.6.2:

Polinomial karakteristik dari matriks A didefinisikan oleh

$$a(s) = \det(sI\text{-}A)$$

$$= s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

dimana akar-akar dari polinomial adalah sebagai nilai eigen dari A. Bisa ditulis

$$a(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\ldots(s - \lambda_n)$$

dimana $\{\lambda_i\}$ adalah nilai eigen dari A.

2.6.3. Teorema Cayley-Hamilton.

Teorema 2.6.1:

Setiap matriks bujur sangkar A, memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri . Ini berarti bahwa jika A suatu matriks n x n, dengan persamaan karakteristik a(s), maka

$$a(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nI = 0$$

Bukti:

Diberikan persamaan karakteristik

$$\det(sI\text{-}A) = s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0 \qquad (2.6.1)$$

Adjoin(sI-A) adalah polinomial dalam s derajat n – 1, yaitu:

$$\text{Adjoin}(sI\text{-}A) = b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n = 0 \qquad (2.6.2)$$

dimana $b_1, b_2, \ldots, b_n$ adalah matriks konstan n x n, dan $b_1 = I$

$$(sI\text{-}A)\ \text{Adjoin}(sI\text{-}A) = [\text{Adjoin}(sI\text{-}A)]\ (sI\text{-}A) = \det(sI\text{-}A)\ I$$

Dari persamaan (2.6.1) dan (2.6.2) didapatkan

$$\begin{aligned}\det(sI\text{-}A)\ I &= Is^n + a_1Is^{n-1} + \ldots + a_{n-1}Is + a_nI \\ &= (sI\text{-}A)\ \text{Adjoin}(sI\text{-}A) \\ &= [\text{Adjoin}(sI\text{-}A)]\ (sI\text{-}A) \\ &= [b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n](sI\text{-}A) \qquad (2.6.3)\end{aligned}$$

Perkalian (sI-A) dan Adjoin(sI-A) sama dengan nol jika salah satu diantarannya nol.

Jika persamaan (2.6.3), A disubstitusikan pada s, maka (sI-A) = 0, sehingga

$$\begin{aligned}\det(AI\text{-}A)\, I &= (A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n)\, I \\ &= A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n I \\ &= 0\end{aligned}$$

dapat disimpulkan bahwa

$$A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n I = 0 \qquad \blacksquare$$

2.7. Transformasi -z

Definisi 2.7.1:

Diberikan suatu barisan dari bilangan–bilangan x(0), x(1), x(2), ..., transformasi- z dari barisan ini adalah deret (bergantung pada z)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{z^k} \tag{2.7.1}$$

Contoh 2.7.1:

Didefinisikan suatu barisan konstan x(k) = 1. Transformasi-z dari barisan ini adalah

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k}$$

Jika z adalah variabel komplek sedemikian sehingga |z| > 1, barisan ini konvergen dan mempunyai nilai

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Contoh 2.7.2:

Didefinisikan suatu barisan geometrik $x(k) = a^k$, maka

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k}$$

untuk $|z| > |a|$, deret konvergen ke

$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

Mencari transformasi-z balik dengan menguraikan X(z) menjadi pecahan-pecahan parsial.

Metode untuk mencari x(kT) adalah didasarkan pada uraian pecahan parsial dari $\frac{X(z)}{z}$, kemudian mengidentifikasi setiap bentuk dengan tabel transformasi-z

Didefinisikan X(z) sebagai berikut

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \qquad (m \le n)$$

Pertama diuraikan polinomial penyebut dari X(z) atas faktor-faktornya dengan mencari pole-pole dari X(z). Selanjutnya diuraikan $\frac{X(z)}{z}$ menjadi pecahan parsial sedemikian sehingga setiap suku dengan mudah dapat dikenal pada tabel transformasi-z. Transformasi-z balik dari X(z) diperoleh sebagai jumlah transformasi-z balik dari pecahan-pecahan parsial.

Contoh 2.7.3:

Akan dicari x(kT) jika X(z) diberikan sebagai

$$X(z) = \frac{2z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2}$$

Dengan membagi dengan z persamaan menjadi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}$$

lalu menguraikan $\frac{X(z)}{z}$ menjadi pecahan parsial sebagai berikut :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

sehingga didapat

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

Dengan menggunakan tabel diperoleh

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1, \qquad Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^k$$

didapat x(kT) sebagai

$$x(kT) = 1 + 2^k, \qquad k \geq 0$$

Penyelesaian persamaan diferensi dengan metode transformasi-z

Pada dasarnya, kita dapat mentransformasi persamaan diferensi menjadi persamaan aljabar dalam z. Berikut ini kita akan menggunakan notasi yang disederhanakan x(k) untuk mengatakan x(kT).

Transformasi -z dari x(k+1)

Transformasi-z dari x(k+1) diberikan sebagai berikut :

$$Z[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, z^{-k+1}$$

$$= z\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - x(0)\right]$$

$$= zX(z) - zx(0)$$

Didefinisikan bahwa jika x(0) = 0, maka

$$Z[x(k+1)] = z\, Z[x(k)], \qquad \text{jika } x(0) = 0$$

Persamaan (2.7.2) dapat dimodifikasi secara mudah untuk mendapatkan hubungan berikut :

$$Z[x(k+2)] = z\, Z[x(k+1)] - zx(1)$$

$$= z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

Dengan cara yang sama

$$Z[x(k+m)] = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1} x(1) - z^{m-2} x(2) - \ldots - zx(m-1)$$

dimana m adalah bilangan bulat positif.

2.8. Matriks Fungsi Alih

Sistem waktu diskrit masukan tunggal-keluaran tunggal(*single input-single output*) dapat dimodelkan dengan suatu fungsi alih. Perluasan dari konsep fungsi alih untuk suatu sistem waktu diskrit masukan multi-keluaran multi(*multiple input-multiple output*) memberikan matriks fungsi alih. Pada bagian ini akan diberikan hubungan antara ruang keadaan dan matriks fungsi alih. Ruang keadaan sistem linear orde ke-n waktu dikrit tak bergantung terhadap waktu, dengan masukan r dan keluaran m, diberikan oleh

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \qquad (2.8.1)$$

$$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \qquad (2.8.2)$$

dimana x(k) adalah vektor keadaan (n-vektor), u(k) adalah vektor kontrol (r-vektor), y(k) adalah vektor keluaran (m-vektor), G adalah n x n matriks, H adalah n x r matriks , C adalah m x n matriks, D adalah m x r matriks

Transformasi-z dari persamaan (2.8.1) dan (2.8.2) diperoleh

$$z\,X(z) - z\,x(0) = G\,X(z) + H\,U(z)$$

$$Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z)$$

Diasumsikan bahwa keadaan awal X(0) adalah nol, maka didapat

$$X(z) = (zI-G)^{-1}\,H\,U(z)$$

dan

$$Y(z) = C\,(zI-G)^{-1}\,H\,U(z) + D\,U(z)$$

$$= [C\,(zI-G)^{-1}\,H + D]\,U(z)$$

$$= F(z).\,U(z) \qquad (2.8.3)$$

dimana

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C\,(zI-G)^{-1}\,H + D$$

F(z) disebut matriks fungsi alih, yaitu matriks berorde m x r. Matriks fungsi alih F(z) memberikan karakter dinamika masukan–keluaran dari sistem waktu diskrit yang diberikan. Karena invers matriks (zI-G) dapat ditulis

$$(zI-G)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(zI-G)}{|zI-G|}$$

sehingga F(z) menjadi

$$F(z) = C\frac{adj(zI-G)}{|zI-G|}H + D$$

Jelas bahwa pole-pole F(z) adalah pembuat nol dari $|zI-G| = 0$. Ini berarti bahwa persamaan karakteristik dari sistem waktu diskrit diberikan oleh $|zI-G| = 0$ atau

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

dimana koefisien a_i bergantung pada elemen-elemen dari G.

Contoh 2.8.1:

Akan dicari matriks fungsi alih untuk sistem yang diberikan oleh persamaan

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$F(z) = C\,(zI-G)^{-1}\,H + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\frac{1}{z+0.2} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+0.8} & \frac{5}{8}\frac{1}{z+0.2} - \frac{5}{3}\frac{1}{z+0.8} \\ -\frac{0.8}{3}\frac{1}{z+0.2} + \frac{0.8}{3}\frac{1}{z+0.8} & -\frac{1}{3}\frac{1}{z+0.2} + \frac{4}{3}\frac{1}{z+0.8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\frac{1}{z+0.2} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+0.8} \\ -\frac{1}{3}\frac{1}{z+0.2} + \frac{4}{3}\frac{1}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

Analisa kestabilan dari sistem lup tertutup

Pada bagian ini akan diberikan definisi kestabilan dari sistem kontrol linear waktu diskrit masukan tunggal-keluaran tunggal tak bergantung waktu. Didefinisikanlah sistem pada persamaan (2.8.1) dan (2.8.2). Kestabilan dari sistem yang didefinisikan oleh persamaan (2.8.1) dan (2.8.2) tersebut dapat ditentukan dari lokasi-lokasi pole lup tertutup dalam bidang z atau akar-akar dari persamaan karakteristik, sebagai berikut:

- Sistem disebut stabil jika hanya jika $|\lambda_i| \leq 1,\ \forall\ \lambda_i \in \sigma(G)$, dengan $\sigma(G)$ adalah himpunan dari semua nilai eigen G. Notasi $\sigma(G)$ disebut spektrum matriks keadaan G.
- Sistem disebut stabil asimtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i| < 1,\ \forall\ \lambda_i \in \sigma(G)$.
- Sistem disebut tidak stabil murni jika dan hanya jika $|\lambda_i| > 1,\ \forall\ \lambda_i \in \sigma(G)$.
- Sistem disebut tidak stabil jika terdapat $|\lambda_i| > 1$, untuk suatu $\lambda_i \in \sigma(G)$.

Analisa kestabilan dari sistem lup tertutup pada bidang z

Kestabilan dari sistem dapat pula ditentukan dari lokasi pole lup tertutup dalam bidang z atau akar-akar dari persamaan karakteristik, sebagai berikut:

- Untuk sistem stabil, pole lup tertutup atau akar-akar dari persamaan karakteristik harus terletak dalam lingkaran satuan dalam bidang z. Suatu pole lup tertutup diluar lingkaran satuan menjadikan sistem tak stabil.
- Jika suatu pole sederhana (*simple pole*) terletak pada z = 1 atau z = -1, maka sistem menjadi stabil kritis. Demikian pula sistem menjadi stabil

kritis jika suatu pasangan tunggal pole-pole kompleks konjugat pada lingkaran satuan dalam bidang z. Suatu pole ganda lup tertutup(*multiple closed lup pole*) pada lingkaran satuan membuat sistem tak stabil.

- Pembuat nol(*zero*) lup tertutup tidak mempengaruhi kestabilan secara mutlak dan mungkin terletak pada sebarang tempat dalam bidang z.

Maka suatu sistem kontrol linear lup tertutup waktu diskrit tak bergantung waktu menjadi tak stabil bila suatu pole lup tertutup terletak diluar lingkaran satuan dan atau suatu pole ganda lup tertutup terletak pada lingkaran satuan dalam bidang z.

Contoh 2.8.2:

Akan dicari kestabilan dari sistem berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad (2.8.4)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Jawab:

Fungsi alih dari sistem diberikan sebagai

$$F(z) = C\,(zI\text{-}G)^{-1}\,H + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1+z}{z^2+z+2} \\ \dfrac{z}{z^2+z+2} \end{bmatrix}$$

Kestabilan sistem (2.8.4) diatas dapat diuji dari nilai eigen pada matriks keadaan sistem atau lokasi pole lup tertutup pada bidang z. Persamaan karakteristiknya adalah

$$|zI - G| = z^2 + z + 2 = 0$$

diperoleh akar-akar persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2} \quad \text{dan} \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$$

Karena

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{2} > 1$$

maka sistem (2.8.4) adalah tak stabil.

2.9. Keterkontrolan

Suatu sistem kontrol dikatakan keadaan terkontrol secara lengkap bila dimungkinkan untuk memindahklan sistem atau mengubah sistem dari keadaan awal menuju keadaan yang diinginkan dalam periode waktu berhingga. Sehingga sistem kontrol adalah terkontrol bila setiap variabel keadaan dapat dikontrol dalam periode waktu berhingga oleh beberapa sinyal kontrol tak terbatas. Bila suatu variabel keadaan adalah bebas dari sinyal kontrol, maka adalah tidak mungkin untuk mengontrol variabel keadaan ini dan sistem adalah tak terkontrol. Adalah sangat perlu untuk mengetahiu suatu kondisi dimana suatu sistem disebut terkontrol. Sehingga konsep keterkontrolan adalah sangat penting dalam masalah penempatan pole dari sistem kontrol.

2.9.1. Keterkontrolan lengkap untuk sistem kontrol linear waktu diskrit invarian terhadap waktu.

Didefinisikan suatu sistem kontrol waktu diskrit (*discrete-time control system*) sebagai

$$x[(k+1)T] = G\,x(kT) + H\,u(kT) \qquad (2.9.1)$$

dengan

$x(kT)$ = vektor keadaan (n-vektor)

$u(kT)$ = sinyal kontrol masukan konstan untuk $kT \leq t < (k+1)T$

G = matriks n x n

H = matriks n x 1

T = periode cacah

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Definisi 2.9.1:

Sistem kontrol waktu diskrit yang diberikan oleh persamaan (2.9.1) dikatakan keadaan terkontrol secara lengkap jika terdapat sinyal kontrol masukan konstan sepotong-sepotong u(kT) yang terdefinisi pada periode cacah berhingga, sedemikian sehingga mulai dari setiap keadaan awal, keadaan x(kT) dapat dipindahkan menuju nilai yang diinginkan x_f pada periode cacah terbesar n.

Dengan menggunakan definisi diatas, sekarang akan diturunkan kondisi untuk keadaan terkontrol lengkap.

Karena penyelesaian dari persamaan (2.9.1) adalah

$$x(nT) = G^{n} x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H\, u(jT)$$

$$x(nT) - G^{n} x(0) = \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H\, u(jT)$$

$$= G^{n-1}Hu(0) + G^{n-2}Hu(T) + \ldots + GHu[(n-2)T] + Hu[(n-1)T]$$

$$= [H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \ldots \\ u(0) \end{bmatrix} \qquad (2.9.2)$$

Karena H merupakan matriks n x 1, diperoleh bahwa masing-masing matriks H, GH, ..., G^{n-1} H adalah matriks n x 1 atau vektor kolom. Jika rank dari matriks dibawah ini adalah n atau

$$\text{rank } [H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] = n$$

maka n vektor-vektor H, GH, ..., G^{n-1} H, dapat merentang ruang dimensi n. Matriks dari persamaan (2.9.3) umumnya disebut matriks keterkontrolan(*controllability matrix*). Semua keadaan yang dapat dicapai dari keadaan awal direntangkan oleh vektor kolom pada matriks keterkontrolan. Jika rank matriks keterkontrolan adalah n, maka untuk suatu keadaan $x(nT) = x_f$, terdapat barisan kontrol masukan tanpa batas u(0), u(T), ..., u((n-1)T) yang memenuhi persamaan (2.9.2). Sehingga kondisi bahwa rank dari matriks keterkontrolan adalah n, memberikan kondisi cukup untuk keadaan keterkontrolan lengkap.

Teorema 2.9.1:

Jika keadaan sistem yang dinyatakan oleh persamaan (2.9.1) terkontrol lengkap maka vektor-vektor H, GH, ..., G^{n-1} H bebas linear atau rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] = n$.

Bukti:

Andaikan rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] < n$.

Dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton dapat ditunjukkan bahwa untuk i = 0, 1, 2, ..., n-1, $G^i H$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari H, GH, ..., G^{n-1} H. Akibatnya untuk setiap i maka rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] < n$ dan vektor-vektor H, GH, ..., G^{n-1} H tidak dapat direntang pada ruang dimensi n; sehingga untuk beberapa x_f adalah tidak mungkin untuk memperoleh $x(iT) = x_f$, untuk setiap i. Jadi pengandaian harus diingkar, rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H]$ harus sama dengan n agar memungkinkan untuk memindahkan keadaan awal ke keadaan akhir x_f yang diinginkan pada periode cacah terbesar n. ■

Contoh 2.9.1:

Apakah persamaan sistem berikut keadaan terkontrol secara lengkap ?

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k),$$

dimana

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad H = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Karena persamaan sistem berorde tiga, maka sistem terkontrol secara lengkap jika rank $[H \vdots GH] = 3$

Agar sistem keadaan terkontrol secara lengkap maka vektor-vektor H, GH, G^2H harus bebas linear. Didapatkan

$$GH = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad G^2H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Karena det $\left[H \vdots GH \vdots G^2H\right] = -10$, maka rank dari matriks $\left[H \vdots GH \vdots G^2H\right] = 3$

Jadi sistem terkontrol secara lengkap.

2.10. Syarat keterkontrolan lengkap pada bidang z

Kondisi keterkontrolan lengkap pada bidang z dapat dinyatakan dalam fungsi alih. Kondisi perlu dan cukup untuk keadaan terkontrol secara lengkap adalah jika tidak terjadi penghapusan pada fungsi alih. Jika terjadi penghapusan, maka sistem tidak dapat dikontrol.

Teorema 2.10.1:

Sistem terkontrol secara lengkap jika hanya jika tidak terjadi penghapusan (terdapat pole dan zero yang dapat dihapus) pada fungsi alih,

$$F(z) = C\,(zI\text{-}G)^{-1}\,H + D.$$

Bukti:

($\Rightarrow$)

Akan dibuktikan jika sistem terkontrol secara lengkap maka tidak terjadi penghapusan pada fungsi alih.

Andaikan terjadi penghapusan pada fungsi alih, F(z).

Didefinisikan persamaan identitas berikut:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C(zI-G)^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} zI-G & H \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zI-G & H \\ 0 & F(z) \end{bmatrix}$$

dengan mengambil determinan dari sisi kiri persamaan dan menyamakannya dengan determinan dari sisi kanan persamaan, diperoleh:

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ C(zI-G)^{-1} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} zI-G & H \\ -C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} zI-G & H \\ 0 & F(z) \end{vmatrix}$$

$$I\begin{vmatrix} zI-G & H \\ -C & D \end{vmatrix} = |zI-G|\,F(z)$$

$$F(z) = \frac{\begin{vmatrix} zI-G & H \\ -C & D \end{vmatrix}}{|zI-G|} \qquad (2.10.1)$$

Pole-pole F(z) merupakan akar-akar dari $|zI - G| = 0$, dan zero dari F(z) merupakan akar –akar dari $\begin{vmatrix} zI - G & H \\ -C & D \end{vmatrix} = 0$.

Asumsikan $z = z_1$ merupakan pole dari F(z) dan juga pembuat nol (*zero*) F(z), sehingga terjadi penghapusan pada fungsi alih. Berarti terdapat vektor $\begin{pmatrix} v \\ -- \\ w \end{pmatrix}$, dimana v adalah n vektor dan w skalar, sedemikian sehingga

$$\left[\begin{array}{c|c} z_1 - G & H \\ \hline -C & D \end{array}\right]\begin{pmatrix} v \\ -- \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.10.2)$$

jika $w \neq 0$, maka dari persamaan (2.10.2), diperoleh

$$(z_1I - G)v + Hw = 0$$

atau

$$(G - z_1I)\,v = Hw \qquad (2.10.3)$$

Karena $z = z_1$ merupakan akar persamaan karakteristik, maka polinomial karakteristik dari G dapat ditulis sebagai berikut:

$$\varphi(z) = (z - z_1)\hat{\varphi}(z)$$

atau

$$\varphi(G) = (G - z_1I)\hat{\varphi}(G) = \hat{\varphi}(G)(G - z_1I) = 0$$

dari (2.10.3), maka

$$\varphi(G)v = \hat{\varphi}(G)\,(G - z_1I)v = \hat{\varphi}(G)Hw = 0$$

disini $\hat{\varphi}(G)H = 0$

Karena $\hat{\varphi}(z)$ adalah polinomial derajat n – 1, diketahui bahwa $\hat{\varphi}(G)H = 0$, yang berarti bahwa vektor $G^{n-1}H$ dapat ditulis dalam suku-suku H, GH, ..., $G^{n-2}H$, sehingga

$$\text{rank } [H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] < n.$$

Terlihat bahwa sistem tidak terkontrol secara lengkap, kontradiksi dengan sistem terkontrol secara lengkap. Jadi pengandaian harus diingkar. Yang benar adalah jika sistem terkontrol secara lengkap maka tidak ada penghapusan pada fungsi alih.

Catatan bahwa kasus w = 0, diberikan untuk pembuktian sistem teramati lengkap(*completely observable*).

($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan jika tidak terjadi penghapusan pada fungsi alih maka sistem terkontrol secara lengkap.

Didefinisikan persamaan (2.10.1)

$$F(z) = \frac{\begin{vmatrix} zI - G & H \\ -C & D \end{vmatrix}}{|zI - G|}$$

Karena tidak ada penghapusan pada fungsi alih berarti akar-akar dari $\begin{vmatrix} zI - G & H \\ -C & D \end{vmatrix} = 0$ dan $|zI - G| = 0$ berbeda. $\varphi(G)$ merupakan polinomial derajat n, sehingga $\varphi(G)H = 0$ dapat ditulis dalam suku-suku H, GH, ..., G^{n-1} H, maka rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1} H] = n$. Jadi sistem terkontrol secara lengkap. ■

Contoh 2.10.1:

Didefinisikan persamaan sistem sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Apakah sistem terkontrol secara lengkap ?

Jawab:

Jika persamaan sistem tersebut disajikan dalam fungsi alih-z, diperoleh:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1} H$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -3 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z+2)(z+4)} & \dfrac{-1}{(z+2)(z+4)} \\ \dfrac{3}{(z+2)(z+4)} & \dfrac{z+5}{(z+2)(z+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{12z+59}{(z+2)(z+4)}$$

Terlihat bahwa tidak terjadi penghapusan pada pembilang dan penyebut fungsi alih, sehingga sistem terkontrol lengkap..

2.11. Penyelesaian masalah penempatan pole (*pole placement*) pada sistem kontrol lup tertutup

Pada bagian ini akan diberikan suatu metode perancangan yang umumnya disebut penempatan pole atau teknik penempatan pole. Akan ditunjukkan bahwa jika sistem dalam keadaan terkontrol lengkap maka pole-pole dari sistem lup tertutup dapat ditempatkan pada lokasi yang diinginkan dengan menggunakan keadaan balik(*feedback state*). Disini akan dibahas untuk kasus dimana sinyal kontrol adalah skalar[untuk kasus vektor akan diberikan pada bab.III] dan kondisi perlu dan cukup bahwa pole lup tertutup dapat ditempatkan pada sebarang lokasi pada bidang z adalah sistem dalam keadaan terkontrol lengkap, lalu akan diberikan contoh metode untuk menentukan matriks umpan balik keadaan yang diinginkan.

2.11.1. Syarat perlu dan cukup untuk penempatan pole.

Didefinisikan suatu persamaan sistem kontrol lup terbuka yang ditunjukkan pada Gambar 1, dengan persamaan ruang keadaannya adalah sebagai berikut

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \qquad (2.11.1)$$

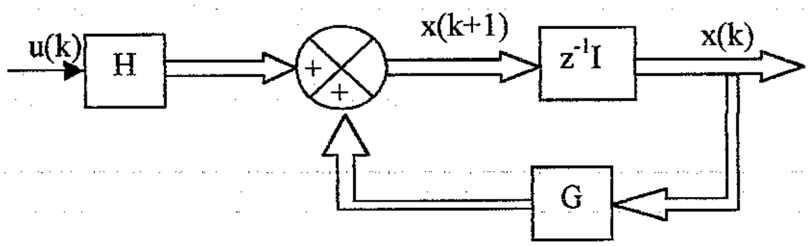
dimana

$x(k)$ = vektor keadaan (n-vektor)

$u(k)$ = sinyal kontrol (skalar)

G = n x n matriks

H = n x 1 matriks



Gambar 1. Diagram blok sistem kontrol lup terbuka

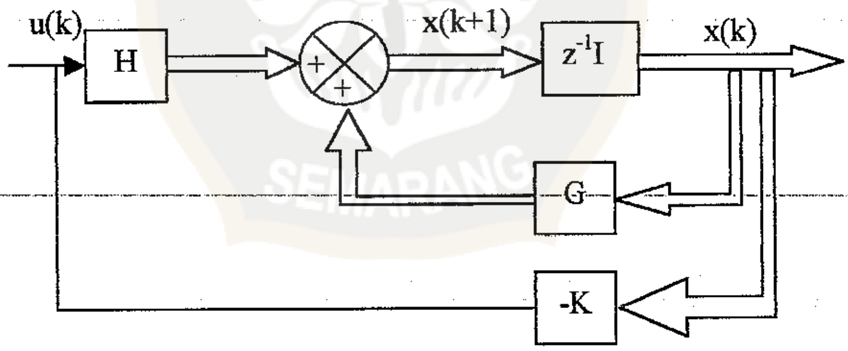
Gambar 1. menggambarkan proses sistem kontrol lup terbuka dari persamaan (2.11.1), Diasumsikan bahwa besarnya sinyal kontrol u(k) adalah tidak terbatas. Bila sinyal kontrol u(k) dipilih sebagai

$$u(k) = -K\,x(k),$$

dimana K adalah matriks umpan balik keadaan yaitu matriks 1 x n, maka sistem menjadi sistem kontrol lup tertutup sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2 dan persamaan keadaan (2.11.1) menjadi

$$x(k+1) = (G\text{-}HK)\,x(k) \qquad (2.11.2)$$

Dengan catatan bahwa nilai eigen dari G-HK adalah pole-pole lup tertutup yang diinginkan $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.



Gambar 2. Diagram blok sistem kontrol lup tertutup

Gambar 2. menggambarkan proses sistem kontrol lup tertutup dari persamaan (2.11.2).

Teorema 2.11.1

Syarat perlu dan cukup untuk penempatan pole (pengontrolan nilai eigen dari G – HK) adalah sistem terkontrol secara lengkap.

Bukti: [10]

2.11.2. Menentukan Umpan Balik Keadaan Matriks K

Ada beberapa pendekatan untuk menentukan umpan balik keadaan gain matriks K dari sistem yang terdefinisi pada persamaan (2.11.1). Pada subbab ini akan diberikan salah satu dari pendekatan itu . Metode ini merupakan penurunan langsung dari syarat perlu dan cukup untuk penempatan pole sebagaimana telah diuraikan pada [10].

Didefinisikan sistem sebagai berikut

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k)$$

Dan kontrol masukan didefinisikan oleh $u(k) = -K\,x(k)$. Umpan balik matriks K dapat ditentukan oleh langkah-langkah sebagai berikut:

- Memeriksa syarat keterkontrolan untuk sistem; yaitu rank matriks keterkontrolan harus sama dengan n atau rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1}H] = n$.
- Menentukan koefisien polinomial karakteristik sistem mula-mula $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Polinomial karakteristik diberikan oleh

  $|zI - G| = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}Z + a_n$
- Menentukan matriks transformasi Q yang akan mengubah persamaan keadaan sistem kedalam bentuk kanonik terkontrol.

$$Q = MW$$

dengan

$$M = [H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1}H]$$

dan

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Menentukan koefisien polinomial karakteristik dari nilai eigen yang diinginkan (pole-pole lup tertutup yang diinginkan); $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

  Polinomial karakteristiknya adalah:

  $$(z-\lambda_1^*)(z-\lambda_2^*)\ldots(z-\lambda_n^*) = Z^n + \alpha_1 Z^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} Z + \alpha_n$$

  dengan $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$ adalah nilai eigen yang diinginkan.

- Matriks umpan balik keadaan K yang diinginkan adalah

  $$K = [\alpha_n - a_n \;\vdots\; \alpha_{n-1} - a_{n-1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \alpha_1 - a_1]Q^{-1}$$

  $$= [\alpha_n - a_n \;\vdots\; \alpha_{n-1} - a_{n-1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \alpha_1 - a_1](MW)^{-1}$$

Contoh 2.11.2

Didefinisikan suatu sistem sebagai berikut:

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k)$$

dimana

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks umpan balik keadaan K, sedemikian sehingga sistem akan mempunyai pole-pole lup tertutup pada z = 0.5 + 0.5i dan z = 0.5 – 0.5i

Jawab:

- Memeriksa kondisi keterkontrolan pada sistem

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$GH = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriks keterkontrolan $[H \;\vdots\; GH] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 = n \text{ (matriks terkontrol lengkap)}$$

- Menentukan harga $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$|zI - G| = \left| z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} z+1 & -2 \\ 1 & z \end{vmatrix} = z^2 + z - 2$$

Jadi $a_1 = 1$ dan $a_2 = -2$

- Menentukan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Pole-pole lup tertutup yang diinginkan yaitu

pada

$z = 0.5 + 0.5i$ dan $z = 0.5 - 0.5i$.

Persamaan karakteristik yang diinginkan:

$$(z - \lambda_1^*)(z - \lambda_2^*) = (z - 0.5 - 0.5i)(z - 0.5 + 0.5i)$$

$$= z^2 - z + 0.5$$

Jadi $\alpha_1 = -1$ dan $\alpha_2 = 0.5$

- Menentukan matriks transformasi Q

$$Q = MW$$

$$= [H \;\vdots\; GH] \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Menentukan matriks umpan balik K

$$K = [\alpha_2 - a_2 \;\; \vdots \;\; \alpha_1 - a_1]Q^{-1}$$

$$= [0.5 + 2 \;\; \vdots \;\; -1 - 1]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [-2 \;\; \vdots \;\; -2.5]$$