BAB II

DESKRIPSI TEORITIK

2.1 Probabilitas dan Variabel Random

2.1.1 Probabilitas

Definisi 2.1.1

(i) Eksperimen adalah setiap kegiatan yang hasilnya bermacam-macam kemungkinan.

(ii) Ruang sampel adalah himpunan keseluruhan hasil yang mungkin dari suatu eksperimen.

(iii) Peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel.

Contoh 2.1.1

Percobaan pelemparan mata uang logam sebanyak tiga kali. Akan menghasilkan suatu himpunan :

S={(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),
(1,1,0),(1,1,1)}

sebagai ruang sampelnya.

Dari unsur himpunan S diatas, peristiwa timbulnya dua sisi 0 ialah (0,0,1),(0,1,0)dan (1,0,0) atau dapat dinyatakan sebagai A={(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)}.

Definisi 2.1.2

Nilai kemungkinan(probabilitas) kejadian A dinotasikan dengan P(A) dan didefinisikan

$$P(A)=\frac{\text{banyaknya hasil yang mungkin pada kejadian A}}{\text{banyaknya semua hasil yang mungkin}}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)}$$

jika $A=\emptyset \longrightarrow P(A)=0$

$A=S \longrightarrow P(A)=1$

Contoh 2.1.2

Sebuah mata uang dilempar satu kali

a. Tentukan probabilitas muncul permukaan angka

b. Tentukan probabilitas muncul permukaan gambar

Penyelesaian

a. Mata uang dilempar satu kali, maka $S=\{A,G\} \longrightarrow n(S)=2$

A= kejadian muncul angka $\longrightarrow A=\{A\}$ $n(A)=1$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} =1/2$$

b. Misal B:kejadian muncul gambar, $B=\{G\} \longrightarrow n(B)=1$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)} =1/2$$

Theorema 2.1.1

Untuk sebarang kejadian A dan B berlaku :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Bukti:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=n(A)/n(S)+n(B)/n(S)-n(A\cap B)/n(S)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Contoh 2.1.3

Dari sekelompok peserta ujian matematika dan fisika diketahui 10 orang lulus matematika, 15 orang lulus fisika, 5 orang tidak lulus kedua-duanya dan 5 orang lulus kedua-duanya. Satu orang dipilih secara acak dari kelompok tersebut. Tentukan peluang seorang yang terpilih itu lulus matematika atau fisika.

Penyelesaian :

Misal himpunan orang yang lulus matematika adalah M dan himpunan orang yang lulus fisika adalah F maka $n(M)=10$, $n(F)=15$, $n(M \cap F)=5$ dan $n(S)=25$ Jadi peluang seorang yang terpilih lulus matematika atau fisika adalah:

$$P(M \cup F) = P(M)+P(F)-P(M \cap F)$$
$$=10/25 + 15/25 - 5/25$$
$$=4/5$$

Theorema 2.1.2

Bila A dan B saling lepas dan merupakan peristiwa dalam sebuah ruang sampel yang terbatas, maka $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

Bukti:

Dua kejadian A dan B disebut saling lepas jika A dan B tidak dapat terjadi bersama-sama, $A \cap B = \emptyset$ $P(A \cap B)=P(\emptyset)=0$.

Dari theorema 2.1.1 bahwa $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$$\text{Jadi } P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$
$$= P(A)+P(B) \text{ terbukti}$$

Contoh 2.1.4

Pada eksperimen dua buah dadu yang dilempar sekali, berapakah kemungkinan hasil jumlah 7 atau 8 ?

Penyelesaian :

Misalkan $A=\{(p,m)|p+m=7\}$

$B=\{(p,m)|p+m=8\}$

maka $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1/6+5/36=11/36$

Definisi 2.1.3

Kejadian A dan B disebut bebas jika dan hanya jika $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

Definisi 2.1.4

Probabilitas bersyarat kejadian A jika kejadian B diketahui, ditulis sebagai $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ dimana $P(B)\neq 0$.

2.1.2 Variabel Random

Definisi 2.1.5

Misalkan E suatu eksperimen acak dan S ruang sampel, maka variabel random X adalah suatu fungsi berharga riil pada setiap hasil eksperimen dalam S.

x : notasi untuk harga dari suatu variabel random X

Contoh 2.1.5

Pelemparan dua mata uang. $S=\{(A,G),(A,A),(G,A).(G,G)\}$

Bila X : banyaknya angka, maka x=0,1,2

$\{X(A,A)=2,\ X(A,G)=1,\ X(G,A)=1,\ X(G,G)=0\}$

Definisi 2.1.6

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random X didefinisikan untuk setiap bilangan riil adalah :

$F_X(x)=P\{X\le x\}$

Definisi 2.1.7

Untuk variabel random X diskret probabilitas fungsi densitas didefinisikan $p_X(x_i)=P\{X=x_i\} \Rightarrow p_X(x_i)\ge 0$ $i=0,1,2,..$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i)=1$ maka fungsi distribusi kumulatif variabel random X diberikan $F_X(x)=\sum p_X(y)$

Definisi 2.1.8

Variabel random X dikatakan kontinu jika ada densitas $f_X(x) \Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$ dengan $f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)$

Definisi 2.1.9

i Jika variabel random X diskret maka mean dari variabel random X didefinisikan :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\ p_X(x_i)$$

ii Jika variabel random X kontinu maka mean dari variabel random X didefinisikan :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

Diatas kita telah mempelajari variabel random X, yang merupakan fungsi berharga nyata untuk setiap kejadian A. Jika ruang dua dimensi, maka fungsi distribusi kumulatifnya didefinisikan

$F_{XY}(x,y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}$

yang merupakan distribusi gabungan bivariat dua variabel random X dan Y.

Variabel random X dan Y dikatakan independen jika $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ untuk semua x dan y

Misal variabel random X dan Y kontinu dan independen dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ dan $F_Y(y)$ maka distribusi X+Y adalah

$$F_{X+Y}(\xi) = P\{X+Y\leq\xi\}$$
$$= \int\int_{x+y\leq\xi} dF_X(x)dF_Y(y)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\xi-y} dF_X(x)]dF_Y(y)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\xi-y)dF_Y(y)$$

$$F_{X+Y}(\xi) = P\{X+Y\leq\xi\}$$
$$= \int\int_{x+y\leq\xi} dF_X(x)dF_Y(y)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\xi-x} dF_Y(y)]dF_X(x)$$

$$F_{X+Y}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(\xi-x)dF_X(x) \qquad 2.1.1$$

Distribusi $F_{X+Y}(\xi)$ disebut konvolusi Stieltjes dari $F_X(x)$ dan $F_Y(y)$.

Kita menggunakan notasi untuk konvolusi Stieltjes

$$F_{X+Y}(\xi) = F_X * F_Y(\xi) = F_Y * F_X(\xi)$$

Misalkan $X_1, X_2, \ldots X_n$ saling bebas dan distribusinya identik dengan variabel random non negatif dan sama dengan distribusi F(t) $(t\geq 0)$. Misal $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ adalah penjumlahan variabel random $X_1, X_2, \ldots . X_n$.

Dari persamaan 2.1.1 maka

$P\{S_1 \le t\} = P\{X_1 \le t\}$

$= \int_0^t dF_{X_1}(x_1)$

$= F_{X_1}(t)$

$= F(t)$

$P\{S_2 \le t\} = P\{X_1 + X_2 \le t\}$

$= \int_{x_1+x_2 \le t} \int dF_{X_1}(x_1) dF_{X_2}(x_2)$

$= \int_0^t [\int_0^{t-x_1} dF_{X_2}(x_2)] dF_{X_1}(x_1)$

$= \int_0^t F_{X_2}(t-x_1) dF_{X_1}(x_1)$

dengan menggunakan notasi konvolusi Stieltjes, maka

$P\{S_2 \le t\} = F_{X_2} * F_{X_1}(t)$

Karena X_1, X_2 independen dan sama dengan distribusi $F(t)$, maka

$P\{S_2 \le t\} = F * F(t) = F^2(t)$

Secara umum untuk

$P\{S_n \le t\} = P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \le t\}$

$= \int_0^t F_{X_n}^{n-1}(t - x_{n-1}) dF_{X_{n-1}}(x_{n-1})$

$= F_{X_n} * F_{X_{n-1}} * \ldots . * F_{X_1}(t)$

karena $X_1, X_2, \ldots . . X_n$ independen dan sama dengan distribusi $F(t)$, maka

$P\{S_n \le t\} = F^{n-1} * F(t) = F^n(t)$

dimana $F^0(t) = 1(t)$ (fungsi tangga)

$F^1(t)= F(t)$

maka $F^n(t)$ disebut konvolusi kelipatan n.

2.2 Transformasi Laplace-Stieltjes

Definisi 2.2.1

Misal X variabel random non negatif dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)=Pr\{X\leq x\}$, maka transformasi Laplace Stieltjes $F^*(s)$ distribusinya didefinisikan untuk $s\geq 0$ $F^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)$.

Contoh 2.2.1

Jika $F(t)=t$ maka

$$
\begin{aligned}
F^*(s) &= L\{t\} \\
&= \int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= -1/s\ e^{-st}\Big|_0^\infty \\
&= 1/s \text{ untuk } s>0
\end{aligned}
$$

Sudah ada tabel sifat transformasi Laplace-Stieltjes dan tabel formula transformasi Laplace-Stieltjes sehingga untuk menyelesaikan permasalahan transformasi Laplace dibawa ke bentuk yang sudah ditabelkan.

Theorema 2.2.1(Theorema Tauberian)

Jika $F(t)$ tidak turun dan transformasi Laplace-Stieltjes $F^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$ konvergen untuk $R(s)>0$ dan jika untuk beberapa bilangan α non negatif

$$\lim_{s \to +0} s^\alpha F^*(s)= C$$

maka
$$\lim_{t \to \infty} \frac{F(t)}{t^\alpha} = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}$$

dan $\tau(k)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{k-1}\, dx$ adalah fungsi gamma order k.

Bukti :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha}} = \frac{\lim_{t\to\infty} F(t)}{\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}}$$

Dengan menggunakan tabel A.1 dan tabel A.2 transformasi Laplace-Stieltjes diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha}} = \frac{\lim_{s\to+0} s^{\alpha} F^{*}(s)}{\lim_{s\to+0} \tau(\alpha+1)}$$

$$= \frac{\lim_{s\to+0} s^{\alpha} F^{*}(s)}{\tau(\alpha+1)}$$

terbukti

2.3 Proses Stokastik

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas mengenai teori probabilitas yang merupakan pengantar menuju proses stokastik. Disini akan disinggung mengenai proses stokastik.

Definisi 2.3.1

Proses stokastik adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi waktu.

Proses stokastik dinotasikan dengan $\{X(t), t\in T\}$.

Contoh 2.3.1

Pandang variabel acak yang menyatakan banyaknya pengunjung yang masuk toko swalayan, selama periode waktu tertentu$(0,t)$,$X(t)$. Di sini himpunan $X(t)$, dengan $t\in T$ akan merupakan proses stokastik$\{X(t), t\in T\}$.

Definisi 2.3.2

Ruang state adalah himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel acak $X(t)$ dari suatu proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$. Ruang state identik dengan ruang sampel.

Contoh 2.3.2

Pada pelemparan sebuah dadu, variabel acak $X(n)$: muka yang tampak untuk lemparan dadu ke $n, n \geq 1$, maka $X(n)$ mempunyai ruang state $\{1,2,3,4,5,6\}$ yang sama untuk setiap n.

2.3.1 Rantai markov waktu diskret

Definisi 2.3.3

Proses markov adalah proses stokastik dimana masa lalu tidak mempunyai pengaruh pada masa yang akan datang bila masa sekarang diketahui. Ini mempunyai arti sebagai berikut :

Bila $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ maka

$$P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots X(t_1) = x_1)$$
$$= P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

Definisi 2.3.4

Misalkan $\{X(n),\ n=0,1,2,\ldots\}$ adalah rantai markov dengan ruang state ψ maka probabilitas transisi $P\{X(n+1)=j | X(n)=i\}$ adalah probabilitas yang bergerak dari state i ke state j dalam satu interval atau satu tingkatan dimana ii $P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\} \geq 0$

iii $\sum_{j} P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\}=1$

Definisi 2.3.5

Misal $\{X(n), n=0,1,2,\ldots\}$ proses stokastik waktu diskret dengan ruang state $i=0,1,2,\ldots$,

Jika $P\{X(n+1)=j \mid X(0)=i_o,\ldots X(n-1)=i_{n-1}, X(n)=i\}$

$$=P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\}=p_{ij}$$

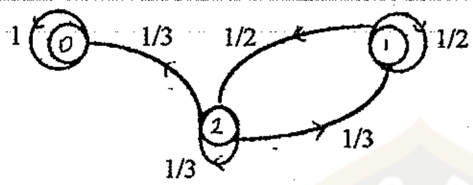
untuk semua $i_o, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ dan n, maka proses ini disebut rantai Markov waktu diskret dan p_{ij} adalah probabilitas transisi.

$X(n)=i$ menunjukkan bahwa proses dalam state i waktu n $(n=0,1,2,\ldots)$. Kondisi probabilitas pada persamaan diatas yang mendeskripsikan keadaan secara keseluruhan adalah saling bebas dengan keadaan yang telah lalu pada waktu $0,1,2,\ldots n-1$ dan tergantung pada state $X(n)=i$ sekarang ini. Sifat seperti ini disebut sifat markov. Probabilitas transisi pada persamaan diatas tergantung pada state n secara umum. Jika diasumsikan bahwa probabilitas transisi adalah stasioner, tidak tergantung waktu n sekarang maka proses disebut rantai markov dengan probabilitas transisi stasioner. Matrik $P=[p_{ij}]$ disebut matrik probabilitas transisi stasioner dimana $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=o}^{\infty} p_{ij}=1$ $(i=0,1,2,\ldots)$.

Contoh 2.3.3

Rantai markov dengan matrik probabilitas transisi :

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$



Kelakuan dengan menggunakan ilustrasi disebut diagram state transisi, dimana bilangan dalam lingkaran menunjukkan state dan angka yang terlihat pada busur adalah probabilitas transisi.

Probabilitas kelakuan rantai markov{X(n), n=0,1,....} dapat dideskripsikan dalam bentuk probabilitas awal dan probabilitas transisi.

$P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots. X(n)=i_n\}$

$=P\{X(n)=i_n | X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots\ldots X(n-1)=i_{n-1}\}$

$.P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots\ldots X(n-1)=i_{n-1}\}$

$=p_{i_{n-1} i_n} \; P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \ldots\ldots X(n-1)=i_{n-1}\}$

$= \ldots\ldots$

$=p_{i_{n-1} i_n} \; p_{i_{n-2} i_{n-1}} \ldots\ldots\ldots p_{i_0 i_1} \; P\{X(0)=i_0\}$

dimana $P\{X(0)=i_0\}$ adalah probabilitas awal. Misal $\pi(0)$ menunjukkan distribusi awal $\pi(0)=[[\pi_0(0), \pi_1(0), \ldots.]$ dengan $\pi_j(0)=P\{X(0)=j\}\geq 0$ $(j=0,1,2,\ldots.\}$ adalah probabilitas awal sedemikian sehingga $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(0)=1$

Dari keterangan diatas dapat disimpulkan semua probabilitas transisi terdiri dari matrik probabilitas transisi $P=[p_{ij}]$ dan distribusi awal $\pi(0)$.

Misal $p_{ij}^{n}=P\{X(n+m)=j|X(m)=i\}$ menunjukkan probabilitas transisi n langkah, bahwa proses pada waktu n+m pada state j bila diketahui pada waktu m pada state ke i dengan aturan $p_{ij}^{o}=0$ dan $p_{ii}^{o}=1$. Probabilitas transisi n langkah tidak tergantung waktu m saat ini dan hanya tergantung pada lamanya waktu n. Probabilitas transisi n langkah p_{ij}^{n} dapat dihitung dengan menjumlahkan semua state k lanjutan waktu r dan pindah ke state j dari state k dari sisa waktu n-r. $p_{ij}^{n} = \sum_{k=o}^{\infty} p_{ik}^{r} p_{kj}^{n-r}$ disebut persamaan Chapman-Kolmogorov.

Misal $\pi_j(n)=P\{X(n)=j\}$

$$=\sum_{i=o}^{o} P\{X(n)=j|X(0)=i\}P\{X(0)=i\}$$

$$=\sum_{i=o}^{\infty} \pi_i(0)p_{ij}^{n} \quad (j=0,1,2,\ldots) \qquad 2.3.1$$

adalah probabilitas bahwa proses berada pada state j waktu n. Misal $\pi(n)=[\pi_o(n),\pi_1(n),\ldots]$ adalah distribusi n langkah sedemikian sehingga $\sum_{j=o}^{o} \pi_j(n)=1$.

Definisi 2.3.6

Pandang rantai markov $\{X(n), n=0,1,2,\ldots\}$. State i dan j dikatakan communicate jika :

i Ada integer $n\geq 0 \ni p_{ii}^{n} >0$ maka $i\longleftrightarrow i$ dengan $p_{ii}^{o}=1$

ii Ada integer $n\geq 0$, $m\geq 0 \ni p_{ij}^{n} >0$ dan $p_{ij}^{m} >0$ maka $i\longrightarrow j$ dan $j\longrightarrow i$ dan menunjukan $i \longleftrightarrow j$

Dengan menggunakan relasi communication semua state rantai markov dapat diklasifikasikan dalam klas ekuivalensi.

Theorema 2.3.1

Communication adalah relasi ekuivalensi

1) $i \longleftrightarrow i$

2) jika $i \longleftrightarrow j$ maka $j \longleftrightarrow i$

3) jika $i \longleftrightarrow j$ dan $j \longleftrightarrow k$, maka $i \longleftrightarrow k$

Bukti :

(1) dan (2) didapat dari definisi communication, sedangkan (3) dapat dibuktikan dengan cara :

Diasumsikan m dan n $\ni$ $p_{ij}^{m} > 0$ dan $p_{jk}^{n} > 0$ dari persamaan Chapman Kolmogorov

$$p_{ik}^{m+n} = \sum_{j=o}^{\infty} p_{ij}^{m}\ p_{jk}^{n} \geq p_{ij}^{m}\ p_{jk}^{n} > 0$$

terbukti $i \longrightarrow k$ ....(1)

Sekarang akan dibuktikan untuk $k \longrightarrow i$. Di asumsikan $m \geq 0$ dan $n \geq 0 \ni p_{ji}^{m} > 0$ dan $p_{kj}^{n} > 0$. Dari persamaan Chapman Kolmogorov , didapat

$$p_{ki}^{n+m} = \sum_{j=o}^{\infty} p_{kj}^{n}\ p_{ji}^{m} \geq p_{kj}^{n}\ p_{ji}^{m} > 0$$

terbukti $k \longrightarrow i$ ....(2)

Dari persamaan (1) dan (2) didapat $i \longleftrightarrow k$

terbukti

Definisi 2.3.7

i Rantai markov $\{X(n),\ n=0,1,2,\ldots\}$ dikatakan irreducible jika hanya ada satu klas communication.

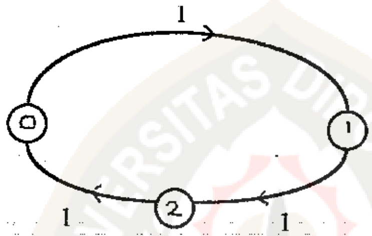
ii State i mempunyai periode d(i) jika d(i) adalah pembagi persekutuan terbesar untuk $n \geq 1 \Rightarrow p_{ii}^{n} > 0$

iii State i dikatakan aperiodik jika d(i)=1 dan dikatakan periodik jika d(i)>1

Contoh 2.3.4

Rantai markov dengan matrik probabilitas transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$0 \to 1 \to 2 \to 0$ adalah rantai markov irreducible dengan d(i)=3 (i=0,1,2)

Didefinisikan probabilitas

$f_{ij}^{n}=P\{X(n)=j,\ X(r)\neq j\ ,\ r=1,2,3,\ldots n-1 \mid X(0)=r\}$ untuk beberapa i,j, adalah probabilitas lintasan pertama dari state i ke state j dengan n langkah, dengan aturan $f_{ij}^{0}=0$, $f_{ij}^{1}=p_{ij}$. Dengan catatan f_{ij}^{n} mungkin merupakan probabilitas fungsi densitas untuk i dan j tetap . Kita definisikan :

$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n}$ adalah probabilitas transisi eventual dari state i ke state j. 2.3.2

Definisi 2.3.8

Jika $f_{ii}=1$ maka state i dikatakan recurrent, jika f <0 maka state i dikatakan transient.

Definisi 2.3.9

Untuk rantai markov semua state recurent :

i Jika $\mu_j < \infty$ maka state j dikatakan recurrent positif

ii Jika $\mu_j = \infty$ maka state j dikatakan recurrent null

dengan $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{jj}^{n}$ adalah rata-rata waktu kembali state j

Theorema 2.3.2

Jika state j adalah recurrent maka untuk $n \longrightarrow \infty$

i $p_{jj}^{nd(j)} \longrightarrow d(j)/\mu_{jj}$ ketika state j periodik

ii $p_{jj}^{n} \longrightarrow 1/\mu_{jj}$ ketika state j aperodik

iii $p_{ij}^{n} \longrightarrow 0$ ketika state j recurrent null

Bukti :

Dengan mmenggunakan lemma

"Misal $\{f_n\}$ suatu barisan $\ni$ $f_o=0$, $f_n \geq 0$, $\Sigma f_n = 1$ dan d(j) adalah pembagi persekutuan terbesar. Misal U_n barisan yang lain $\ni$ $U_o=1$ dan $U_n = \sum_{r=1}^{n} f_r U_{n-r}$ $n \geq 1$ maka

$\lim U_{nd(j)} = d(j)/\mu$ dimana $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} nf_n$"

Dengan meletakkan f_{jj}^{n} untuk f_n dan p_{jj}^{n} untuk U_n akan diperoleh

(i) $p_{jj}^{nd(j)} \longrightarrow d(j)/\mu_{jj}$ untuk $n \longrightarrow \infty$

(ii) ketika state j aperiodik maka d(j)=1

$p_{jj}^{n} \longrightarrow 1/\mu_{jj}$

(iii) ketika state j reccurent null maka $\mu_{jj} = \infty$

$p_{jj}^{n} \longrightarrow 0$

Theorema 2.3.3

Jika rantai markov irreducible adalah recurent positif dan aperiodik maka limit probabilitas

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{n} = \pi_j > 0 \quad \text{ada} \qquad (i,j=0,1,2,\ldots)$$

yang independen dengan state awal i, dengan $\{\pi_j$ $j=0,1,\ldots\}$ adalah tunggal dan positif

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_j \; P_{ij} \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ adalah distribusi stasioner untuk rantai markov

Bukti :

Dari theorema 2.3.2(ii) diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{n} = \frac{1}{\mu_{jj}} = \pi_j > 0$$

dan tidak tergantung pada state i

Akan dibuktikan bahwa π_j adalah tunggal.

Kita mempunyai $P_{ij}^{n+m} = \sum_k P_{ik}^{n} \; P_{kj}^{m}$

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{n+m} = \lim_{n \to \infty} \sum_k P_{ik}^{n} \; P_{kj}^{m}$$

$$\geq \sum \{\lim P_{ik}^{n}\} P_{kj}^{m}$$

$$= \sum_k \pi_k \; P_{kj}^{m} \qquad \text{untuk semua } m$$

$$\pi_j \geq \sum_k \pi_k \; P_{kj}^{m}$$

i $\pi_j > \sum_k \pi_k \; P_{kj}^{m}$, maka

$$\sum_j \pi_j > \sum_j \sum_k \pi_k \; P_{kj}^{m} \quad \text{tidak mungkin, karena } \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

ii $\pi_j = \sum_k \pi_k \; P_{kj}^{m}$

untuk $m=1$ maka $\pi_j=\sum_k \pi_k\ p_{kj}$

m besar maka $\pi_j=\sum_k \pi_k\ \pi_j=\pi_j$

Jadi terbukti π_j tunggal

Rantai markov dengan ruangstate finite disebut rantai markov state finite.

Definisi 2.3.10

Misal a_o, a_1,.... barisan bilangan riil

$$A(S)=a_o+a_1 s+a_2 s^2+....=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ s^k$$

Jika $A(s)$ konvergen dalam interval $-s_o<s<s_o$ maka $A(s)$ disebut fungsi generasi dari barisan $a_o,a_1,....$

Definisi 2.3.11

Probabilitas Er didefinisikan :

$P\{E_r\}=P\{$pertama kembali adalah pada transisi ke $r|X(0)=i\}$

$P_r\{X_n=i|X_o=i\}=f_{ii}^{\ n}\ p_{ii}^{\ n-r}$ $1\le r\le n$ dengan $p_{ii}^{\ o}=1$

maka $P\{X(n)=i|X(r)=i\}=\sum_{r=1}^{n} P\{E_r\}$

$$=\sum_{r=1}^{n} f_{ii}^{\ r}\ p_{ii}^{\ n-r}$$

$$p_{ii}^{\ n}=\sum_{r=1}^{n} f_{ii}^{\ r}\ p_{ii}^{\ n-r}$$

Theorema 2.3.4

Diketahui suatu state j

i Jika state j recurrent maka $\sum_{n=o}^{\infty} p_{jj}^{\ n}=\infty$,

ii Jika state j transient maka $\sum_{n=o}^{\infty} p_{jj}^{\ n}<\infty$

Bukti :

Dari definisi 2.3.9 , misal

$$P_{jj}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n}\ s^{n} \qquad , |s|<1$$

$$F_{jj}(s)=\sum_{n=1}^{\alpha} f_{jj}^{n}\ s^{n} \qquad , |s|<1$$

adalah fungsi generasi dari barisan $\{p_{jj}^{n}\}$ dan $\{f_{jj}^{n}\}$

Dari definisi 2.3.10 , maka

$$p_{jj}^{n}=\sum_{r=1}^{n} f_{jj}^{r}\ p_{jj}^{n-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n}\ s^{n} = \sum_{r=1}^{n}\ \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{r}\ p_{jj}^{n-r}\ s^{n}$$

$$P_{jj}(s)-1 = F_{jj}(s)\ P_{jj}(s)$$

$$P_{jj}(s) = \frac{1}{1-F_{jj}(s)} \qquad |s|<1$$

$$\lim_{s \to 1} P_{jj}(s) = \lim_{\to 1} \frac{1}{1-F_{jj}(s)}$$

Dari definisi 2.3.7 , jika state j recurrent maka $f_{jj}=1$, maka $\sum_{n=0}^{\alpha} p_{jj}^{n}=\infty$. Jika state j tansient, maka $\sum_{n=0}^{\alpha} p_{jj}^{n} <\infty$

Akibat 2.3.5

Jika state j transient maka $\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{n} =0$

Theorema 2.3.6

Untuk rantai markov state finite

i. Tidak ada state null recurent

ii. Tidak semua state transient

Bukti :

i Andaikan state j adalah recurrent null dengan ruang state finite, maka rata-rata waktu recurrent μ_j juga harus finite. Kontradiksi dengan definisi 2.3.9(ii).

Pengandaian harus diingkar. Jadi terbukti untuk rantai markov state finite tidak ada state recurrent null.

ii Andaikan semua state transient, dari akibat 2.3.5 maka $\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{n} = 0$ untuk semua j. Kontradiksi dengan sifat probabilitas transisi n langkah $\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{n} = 1$ untuk semua n. Pengandaian harus diingkar. Jadi tidak semua state transient.

Akibat 2.3.7

Rantai markov state finite irreducible adalah recurent positif.

2.3.2 Rantai Markov Waktu Kontinu

Definisi 2.3.12

Misal $\{X(t), t \geq 0\}$ proses stokastik waktu kontinu dengan ruang state i=0,1,2,...,

Jika $P\{X(t)=x \mid X(t_1)=x_1,\ X(t_2)=x_2, \ldots X(t_n)=x_n\}$

$$= P\{X(t)=x \mid X(t_n)=x_n\}$$

untuk semua $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ maka proses disebut rantai markov waktu kontinu.

Untuk $t \geq 0$, $s \geq 0$

$P_{ij}(t) = P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}$ disebut probabilitas transisi, jika diasumsikan $P_{ij}(t)$ tidak tergantung waktu s maka prosesnya adalah stasioner. Probabilitas transisi $P_{ij}(t+s)$ dapat dihitung dengan menjumlahkan semua state k waktu t dan pindah menuju state j dari state k pada sisa waktu s. $P_{ij}(t+s)=\sum_{k=o}^{\infty} P_{ik}(t)\ P_{kj}(s)$ dinamakan persamaan Chapman-Kolmogorov untuk rantai markov waktu kontinu.

Definisi 2.3.12

Jika proses stokastik $\{X(t),\ t\geq 0\}$ adalah rantai markov dengan probabilitas transisi stasioner dan berlaku:

i $X(0)=i$

ii $P\{X(t+h)-X(t)=1|X(t)=k\}=\lambda_k h+o(h)$

iii $P\{X(t+h)-X(t)=-1|X(t)=k\}=\mu_k h+o(h)$

iv P{2 atau lebih kejadian dalam $(t,t+h)|X(t)=k\}=o(h)$

maka proses disebut proses kelahiran dan kematian dengan parameter $(\lambda_k,\mu_{k+1},k=0,1,\ldots)$, dimana λ_k dan μ_{k+1} disebut angka kelahiran dan kematian. $o(h)$ menyatakan fungsi h yang mendekati 0 lebih cepat dari h sendiri mendekati 0, artinya $\lim_{h\to o} \frac{o(h)}{h}=0$.

Kondisi dari definisi diatas dapat diinterpretasikan sebagai berikut :

(i) Kondisi awal dengan syarat $P_{ii}(0)=1$ dan $P_{ij}(0)=0$ $(i\neq j)$

(ii) dan (iii) menunjukkan bahwa angka kelahiran dan kematian adalah λ_k dan μ_k diberikan bahwa proses dalam state k

(iv) menunjukkan bahwa probabilitas dua atau lebih kejadian dalam interval kecil dapat diabaikan, $h\longrightarrow 0$

2.4 Proses Renewal dan Fungsi Renewal

Ada banyak aplikasi proses renewal dalam ilmu pengetahuan, ilmu sosial, perdagangan, dan teknik. Proses Poisson adalah salah satu contoh sederhana proses renewal.

Definisi 2.4.1

Pandang counting proses $\{N(t), t\geq 0\}$. Jika X_1 adalah waktu kejadian pertama, secara umum jika X_n adalah waktu antara kejadian ke-n dengan kejadian n-1, maka $\{X_n, n=1,2,...\}$ disebut barisan waktu antar kedatangan.

Definisi 2.4.2

Proses $\{N(t), t\geq 0\}$ disebut proses renewal jika waktu antar kedatangan adalah independen dan berdistribusi identik dengan distribusi F(t) sebarang. Dengan $F(t)=P\{X_m\leq t\}$ $(m=1,2,....)$ dimana variabel random X_m non negatif.

2.4.1 Fungsi Renewal

Misal S_n adalah waktu tunggu untuk kejadian ke-n

$$S_n = X_1+X_2+.....+X_n \qquad (n=1,2,...)$$

dengan mengambil $S_0=0$. Dengan mengingat persamaan 2.1.1 maka $P\{S_n\leq t\}=F^n(t)=F * F * F.....*F(t) \quad (n=1,2,....)$ merupakan konvolusi Stieltjes kelipatan n pada distribusi antar kedatangan F(t).

mengacu pada gambar 2.2 kita mempunyai

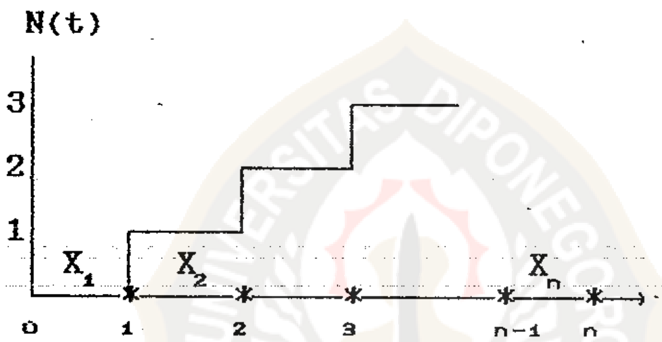
$$S_n \leq t \longleftrightarrow N(t)\geq n$$

artinya waktu renewal ke n yang terjadi sebelum atau pada waktu t $\longleftrightarrow$ banyaknya renewal yang terjadi dalam interval $(0,t]\geq n$.

$$P\{N(t)\geq n\}=P\{S_n\leq t\}=F^n(t)$$

$$P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\geq n\}-P\{N(t)\geq n+1\}$$

$$=F^n(t)-F^{n+1}(t)$$



gambar 2.2 Realisasi interarrival dan waktu tunggu

Rata-rata variabel random N(t) disebut fungsi renewal $\mu(t)=E[N(t)]$

$$M(t) = E[N(t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} mP\{N(t)=m\}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} P\{N(t)=m\}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} [P\{N(t)=m\}+P\{N(t)=m\}+....+P\{N(t)=m\}$$

$$= P\{N(t)=1\}+[P\{N(t)=2\}+P\{N(t)=2\}]+[P\{N(t)=3+P\{N(t)=3\}+ P\{N(t)=3\}]+....$$

$$= [P\{N(t)=1\} + P\{N(t)=2\} + P\{N(t)=3\}+...] + [P\{N(t)=2\} +P\{N(t)=3\}+...]+...$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [P\{N(t)=n\}+P\{N(t)=n+1\}+P\{N(t)=n+2\}+\dots]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\{N(t)=m\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t)\geq n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n}(t)$$

dengan $\sum_{n=1}^{m} 1=m$

Fungsi renewal M(t) dapat ditulis kembali

$$M(t)= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n}(t)$$

$$= F(t)+F^{2}(t)+F^{3}(t)+\dots$$

$$= F(t)+F * F(t)+F * F^{2}(t)+\dots$$

$$= F(t)+\sum_{n=1}^{\infty} F * F^{n}(t)$$

$$= F(t)+F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{n}(t)$$

$$= F(t)+F * M(t) \qquad 2.4.1$$

Dengan menggunakan persamaan 2.1.1 maka didapat :

$$M(t)= F(t)+\int_{0}^{t} M(t-x)dF(x)$$

yang disebut persamaan renewal.

Dengan menggunakan transformasi Laplace-Stieltjes berlaku

$$M^{*}(s) = F^{*}(s) + F^{*}(s)\, M^{*}(s)$$

$$M^{*}(s) = \frac{F^{*}(s)}{1 - F^{*}(s)} \qquad 2.4.2$$

Contoh 2.4.1

Misalkan ada distribusi $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, tentukan fungsi renewal dari distribusi diatas.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan persamaan 2.1.1 maka didapat :

$$M(t)= F(t)+\int_{o}^{t} M(t-x)dF(x)$$

yang disebut persamaan renewal.

Dengan menggunakan transformasi Laplace-Stieltjes berlaku

$$M^*(s) = F^*(s) + F^*(s)\, M^*(s)$$

$$M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)} \qquad 2.4.2$$

Contoh 2.4.1

Misalkan ada distribusi $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, tentukan fungsi renewal dari distribusi diatas.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan sifat transformasi Laplace-Stietljes akan diperoleh :

$$F^*(s)= \int_{o}^{\infty} e^{-st}\ d(1-e^{-\lambda t})$$

$$= \int_{o}^{\infty} \lambda\ e^{-(s+\lambda)t} dt$$

$$= -\frac{\lambda}{s+\lambda}\quad e^{-(s+\lambda)t}\ \Big|_{o}^{\infty}$$

$$F^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

Dengan menggunakan persamaan 2.4.2

$$\text{maka } M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}}$$

$$= \lambda/s$$

Dengan menggunakan tabel A.2 didapat :

$$M(t) = \lambda t$$

Definisi 2.4.3

Pandang proses $\{N_s(t),\ t\geq 0\}$ adalah proses renewal stasioner jika waktu antar kedatangan independen dan waktu antar kedatangan pertama adalah berdistribusi dengan

$$F_e(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^t [1-F(y)]dy$$

dan waktu antar kedatangan selanjutnyaberdistribusi identik dengan F(t) sebarang,dimana $\mu=\int_0^\infty tdF(t)$ adalah rata-rata waktu antar kedatangan.

Definisi 2.4.4

Variabel random X atau distribusi F(t) dikatakan lattice jika ada $d>0 \ni \sum_{n=0}^{\infty} P\{X=nd\}=1$ dengan d adalah periode X.

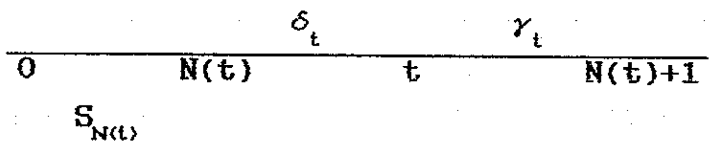
Misal $T_{N(t)}$ adalah waktu kedatangan pada transisi terakhir sebelum waktu t, dan $T_{N(t)+1}$ adalah waktu kedatangan selanjutnya setelah t, maka dari gambar 2.3 diperoleh :

$\delta_t = t-S_{N(t)}$ (current life)

$\gamma_t = S_{N(t)+1}-t$ (residual life)

$\beta_t = \gamma_t + \delta_t$

$= S_{N(t)+1}- S_{N(t)}$ (total life)



gambar 2.3(realisasi current life dan residual life)

Theorema 2.4.1

Distribusi residual life adalah

$$P\{\gamma_t \le x\} = F(t+x) - \int_0^t [1-F(t+x-y)]dM(y)$$

Jika F(t) non-lattice, maka

$$\lim_{t \to \infty} P\{\gamma_t \le x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1-F(y)]dy$$

Bukti:

$\gamma_t > x \longleftrightarrow$ tidak terjadi renewal pada [t,t+x]

Misal $P(t) = P\{\gamma_t > x\}$

Pada kondisi X_1, distribusi residual life diberikan

$$P\{\gamma_t > x\} = \int_0^\infty P\{\gamma_t > x \mid X_1 = y\}dF(y)$$

Ada 3 situasi yang mungkin

1. $y > t+x$, tidak terjadi renewal pada [t,t+x]

   $P\{\gamma_t > x\} = P\{$tidak terjadi renewal pada $[t,t+x]\} = 1$

2. $t < y \le t+x$, terdapat satu renewal yang terjadi [t,t+x]

   $P\{\gamma_t > x\} = P\{$tidak terjadi renewal pada $[t,t+x]\} = 0$

3. $0 < y \le t$, terjadi renewal pertama pada y,y+dy

   $P\{\gamma_t > x\} = P\{\gamma_{t-y} > x\} = P(t-y)$

Dari ketiga situasi diatas didapatkan

$$P(t) = \int_0^t P(t-y)dF(y) + \int_{t+x}^\infty dF(y)$$

$$= 1 - F(t+x) + \int_0^t P(t-y)dF(y)$$

Berdasarkan theorema

Jika $V(t) = g(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x) \quad t \ge 0$ maka

$$V(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x)dM(x)$$

diperoleh $P(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t [1-F(t+x-y)]dM(y)$

Berdasarkan theorema Kunci Renewal

Jika F(t) non lattice dan h(t) adalah terintegral Riemman secara langsung,

maka $\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-x)dM(x)=1/\mu \int_0^t h(t)dt$

diperoleh :

Misal $h(t)=1-F(t+x)$ untuk $t \longrightarrow \infty$ maka

$P\{\gamma_t>x\}=h(t)+\int_0^t h(t-y)dM(y)$

dengan mengambil $\lim_{t\to\infty} h(t)=0$

$$\lim_{t\to\infty} P\{\gamma_t>x\}=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1-F(t+x)]dt$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_x^\infty [1-F(y)]dy$$

$$\lim_{t\to\infty} P\{\gamma_t\le x\}=\frac{1}{\mu}\int_0^x [1-F(y)]dy$$

Theorema 2.4.2

Distribusi current life adalah

$$P\{\delta_t\le x\}=F(t)-\int_0^{t-x} [1-F(t-y)]dM(y) \qquad x\le t$$

$$=1 \qquad x>t$$

jika F(t) non-lattice, maka

$$\lim_{t\to\infty} P\{\delta_t\le x\}=\frac{1}{\mu}\int_0^x [1-F(y)]dy$$

Bukti

$\delta_t>x \longleftrightarrow$ tidak terjadi renewal pada [t-x;t]

Misal $P(\delta_t>x)=P\{\gamma_{t-x}>x\}$

Ada 3 situasi yang mungkin

1. y>t tidak terjadi renewal pada [t-x,t]

   $P\{\delta_t>x\}$=P{tidak terjadi renewal pada [t-x,t]}=1

2. t-x<y≤t, terdapat satu renewal yang terjadi [t-x,t]

$P\{\delta_t > x\} = P\{\text{tidak terjadi renewal pada } [t-x,t]\} = 0$

3. $0 < y \le t-x$, terjadi renewal pertama pada $y, y+dy$

$P\{\delta_t > x\} = P\{\delta_{t-y} > x\} = P(t-y)$

Dari ketiga situasi diatas didapatkan

$$P(\delta_t > x) = \int_0^{t-x} P(t-y)dF(y) + \int_t^{\infty} dF(y)$$

$$= 1 - F(t) + \int_0^{t-x} P(t-y)dF(y)$$

Berdasarkan theorema

Jika $V(t) = g(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x) \quad t \ge 0$ maka

$$V(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x)dM(x)$$

diperoleh $P(\delta_t > x) = 1 - F(t) + \int_0^{t-x} [1-F(t-y)]dM(y)$

$$P\{\delta_t \le x\} = F(t) - \int_0^{t-x} [1-F(t-y)]dM(y) \qquad x \le t$$

Berdasarkan theorema Kunci Renewal

Jika $F(t)$ non lattice dan $h(t)$ adalah terintegral Riemman secara langsung,

maka $\lim\limits_{t \to \infty} \int_0^t h(t-x)dM(x) = 1/\mu \int_0^t h(t)dt$

diperoleh :

Misal $h(t) = 1 - F(t)$ untuk $t \longrightarrow \infty$ maka

$$P\{\delta_t > x\} = h(t) + \int_0^{t-x} h(t-y)dM(y)$$

dengan mengambil $\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = 0$

$$\lim_{t \to \infty} P\{\delta_t > x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1-F(t)]dt$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} [1-F(y)]dy$$

$$\lim_{t \to \infty} P\{\delta_t \le x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^{x} [1-F(y)]dy$$