BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Dasar-Dasar Percobaan

Percobaan adalah penyelidikan yang direncanakan untuk memperoleh fakta yang baru atau untuk mendukung atau untuk menyangkal hasil percobaan yang telah dilakukan oleh peneliti lain (Sugandi dan Sugiarto, 1994).

Rancangan percobaan adalah langkah-langkah yang perlu diambil sebelum percobaan dilakukan supaya data yang semestinya diperlukan dapat diperoleh sehingga akan membawa kesimpulan yang berlaku untuk persoalan yang sedang dibahas. Rancangan percobaan bertujuan untuk memperoleh atau mengumpulkan informasi sebanyak-banyaknya yang diperlukan dan berguna dalam melakukan penelitian (Sudjana, 1994).

Dalam suatu percobaan ada tiga faktor yang perlu diperhatikan yaitu unit atau satuan percobaan, perlakuan dan respon. Satuan percobaan adalah satuan bahan tempat diterapkannya satu perlakuan. Unit percobaan diusahakan homogen, jika tidak homogen maka perlu dilakukan pengelompokkan agar diperoleh unit percobaan yang relatif homogen. Perlakuan adalah prosedur yang pengaruhnya hendak diukur dan dibandingkan dengan perlakuan lain (Steel dan Torie, 1991). Respon yang diteliti bisa dengan pengamatan tunggal, pengamatan diulang dan pengamatan multi (majemuk).

Galat adalah kesalahan-kesalahan yang disebabkan karena:

1. adanya variasi dari materi percobaan yang seharusnya homogen tetapi kehomogenan sulit diperoleh

2. adanya kesalahan-kesalahan observasi (Sandra Widasari, 1988)

Prinsip dasar dalam percobaan ada 3 yaitu ulangan, pengacakan dan kontrol lokal (Sudjana, 1994).

1. Ulangan adalah frekuensi suatu perlakuan yang diselidiki dalam suatu percobaan. Ulangan berfungsi untuk menghasilkan suatu estimasi tentang galat dan menghasilkan ukuran pengaruh perlakuan-perlakuan yang lebih tepat terhadap hasil percobaan (Kemas Ali Hanafiah, 1997).
2. Pengacakan dilakukan karena menyebabkan asumsi tentang independen seolah-olah dipenuhi sehingga dapat melakukan pengujian misalnya tes signifikansi dan menyebabkan pula memungkinkannya data dianalisis (Sudjana, 1994).
3. Kontrol lokal biasanya merupakan langkah-langkah atau usah-usaha yang berbentuk pengelompokan atau pemblokan. Pengelompokan adalah penempatan sekelompok unit percobaan yang homogen ke dalam kelompok-kelompok supaya kelompok yang berbeda memungkinkan untuk mendapatkan perlakuan yang berbeda pula. Pemblokan berarti pengalokasian unit-unit percobaan ke dalam blok sedemikian hingga unit-unit dalam blok secara relatif bersifat homogen (Sudjana, 1994).

2.2. Rancangan Acak Kelompok (RAK)

Rancangan Acak Kelompok (RAK) adalah salah satu bentuk rancangan dasar yang ditandai dengan adanya kelompok dalam jumlah yang sama, dimana setiap kelompok dikenakan perlakuan-perlakuan.(Gasper, 1995).

Dengan RAK satuan percobaan tidak perlu homogen, dimana satuan-satuan percobaan tersebut dapat dikelompokkan ke dalam kelompok-kelompok tertentu, sehingga satuan percobaan dalam kelompok tersebut menjadi relatif homogen. Masing masing kelompok dalam RAK merupakan ulangan. Pada RAK keragaman selain disebabkan oleh perlakuan dan pengaruh galat juga disebabkan oleh kelompok (Sugandi dan Sugiarto, 1994).

2.2.1. Pengacakan dan Tata Letak

Sebelum pengacakan, satuan percobaan dibagi menjadi beberapa kelompok sebagai jumlah ulangan. Setiap kelompok kemudian dibagi lagi ke dalam jumlah yang sesuai dengan banyaknya perlakuan yang akan dibagikan. RAK menetapkan bahwa semua perlakuan hanya muncul satu kali pada setiap ulangan, dan pengacakan dilakukan secara terpisah untuk setiap kelompok.

Contoh: suatu percobaan dilakukan dengan menggunakan RAK dengan 6 perlakuan dan 4 ulangan. Pertama-tama unit percobaan dibagi 4 kelompok. Unit-unit yang relatif homogen dijadikan satu kelompok agar ragam dalam kelompok tetap kecil. Setiap kelompok dibagi menjadi 6 unit percobaan, berarti seluruhnya ada 24 unit percobaan. Pengacakan pertama dilakukan pada kelompok I , lalu diulang pada kelompok yang lain. Pengacakan dilakukan dengan tabel acak.

Tabel 2.1. Tata letak pada RAK

Kelompok I	Kelompok II	Kelompok III	Kelompok IV
A	C	D	B
C	B	E	D
B	A	B	C
E	F	A	A
F	E	C	F
D	D	F	E

2.2.2. Model Linier Dan Analisa Varian untuk RAK

Model linier untuk RAK dengan r kelompok dan a perlakuan adalah:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad i= 1,2,3,\ldots,a \qquad \ldots\ldots(2.1)$$

$$j= 1,2,3,\ldots,r$$

dimana:

Y_{ij} : pengamatan dari perlakuan ke-i dan dalam kelompok ke-j

μ : rata-rata populasi

τ_i : pengaruh perlakuan ke-i

β_j : pengaruh kelompok ke-j

ε_{ij} : pengaruh galat percobaan dari perlakuan ke-i pada kelompok ke-j

Jika model tetap yang digunakan maka perlu diasumsikan :

1. $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$

2. $\sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0$

3. $\varepsilon_{ij} \sim NID(0,\sigma^2)$

Untuk percobaan dengan a buah perlakuan dengan jumlah ulangan/kelompok untuk masing-masing perlakuan sebanyak r, maka data pengamatan untuk RAK adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2. Data pengamatan untuk RAK dengan a buah perlakuan dan r ulangan

Kelompok	Perlakuan				Total Kelompok
	1	2	....	a	
1	Y_{11}	Y_{21}	....	Y_{a1}	$Y_{.1}$
2	Y_{12}	Y_{22}	....	Y_{a2}	$Y_{.2}$
.	.				.
.	.				.
r	Y_{1r}	Y_{2r}	....	Y_{ar}	$Y_{.r}$
Total perlakuan	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	.....	$Y_{a.}$	$Y_{..}$

Notasi-notasi pengamatan yang digunakan pada RAK adalah:

Ya. : total hasil pengamatan pada perlakuan ke-a

$$Y_{a.} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij} \qquad \text{......(2.2)}$$

Y.r : total hasil pengamatan pada kelompok ke-r

$$Y_{..r} = \sum_{i=1}^{a} Y_{ij} \qquad \text{......(2.3)}$$

Y.. : total seluruh pengamatan

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij} \qquad \text{......(2.4)}$$

Hipotesis yang dapat diambil pada pengujian pengaruh perlakuan :

H0 : $\tau_i = 0$, untuk i=1,2,... a (tidak ada pengaruh perlakuan terhadap respon yang diamati)

H1 : minimal ada satu i dengan $\tau_i \neq 0$ (ada pengaruh perlakuan terhadap respon yang diamati)

Hipotesis yang diambil untuk menguji pengaruh kelompok :

H0 : $\beta_j = 0$, untuk j=1,2,3,..., r (tidak ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)

H1 : minimal ada satu j dengan $\beta_j \neq 0$ (ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)

Perhitungan-perhitungan untuk menyusun analisa varian:

$$\text{Jumlah Kuadrat Total (JKT)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij} - \frac{Y_{..}^{2}}{ar}\text{ , dengan derajat bebas=(ar-1)}$$

$$\text{Jumlah Kuadrat Perlakuan (JKP)} = \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{i.}}{r} - \frac{Y_{..}^{2}}{ar}\text{, dengan derajat bebas = (r-1)}$$

$$\text{Jumlah Kuadrat Kelompok (JKK)} = \frac{\sum_{j=1}^{r} Y_{.j}}{a} - \frac{Y_{..}^{2}}{ar}\text{, dengan derajat bebas = (r-1)}$$

Jumlah Kuadrat Galat (JKG) = JKT – JKP – JKK , dengan db= (r-1)(a-1)

Tabel 2.3. Analisis varian untuk RAK

Sumber varian	Derajat bebas	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F_{hitung}	F_{tabel}
Perlakuan	a-1	JKP	KTP	KTP/KTG	$F_{(a-1);(a-1)(r-1);\alpha}$
Kelompok	r-1	JKK	KTK	KTK/KTG	$F_{(r-1);(a-1)(r-1);\alpha}$
Galat	(a-1)(r-1)	JKG	KTG		
Total	ar-1	JKT			

Keputusan:

1. Untuk pengaruh perlakuan, apabila F_{hitung} perlakuan > $F_{(a-1);(a-1)(r-1);\alpha}$ maka H0 ditolak yang berarti ada pengaruh perlakuan terhadap respon yang diamati.
2. Untuk pengaruh kelompok apabila F_{hitung} kelompok > $F_{(r-1);(a-1)(r-1);\alpha}$ maka H0 ditolak yang berarti ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati.

2.3. Percobaan *Mixture*

Percobaan *mixture* adalah percobaan dengan mencampur komponen-komponen yang mempengaruhi respon. Respon yang diukur pada percobaan *mixture* adalah fungsi dari proporsi komponen-komponen dalam campuran dan bukan fungsi dari jumlah masing-masing komponen. Proporsi ini non negatif dengan jumlah sama dengan satu. Misalkan percobaan dengan q buah komponen, proporsi komponen ke-k dinotasikan dengan x_k dengan sifat:

$$x_k \geq 0 \quad , \quad k=1,2,3,\ldots,q$$

$$\sum_{k=1}^{q} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_q = 1 \quad \text{(Cornell, 1990)} \qquad \ldots\ldots(2.5)$$

Respon yang diamati dinotasikan dengan y.

Contoh untuk percobaan *mixture* sebagai berikut. Misalkan terdapat persediaan bensin yang berbeda, yaitu A dan B sebagai komponen. Apabila ingin dicoba bagaimana jika kedua bensin ini ingin dicampur, apakah akan mendapatkan respon yang lebih baik daripada hanya digunakan secara individu. Diasumsikan respon yang akan diamati adalah jarak dihasilkan dengan mengendarai mobil yang dianggap homogen, menggunakan bahan bakar tersebut, dengan ketentuan bahwa jarak yang ditempuh hanya bergantung pada proporsi 2 bahan bakar dan bukan pada kuantitas bahan bakar yang digunakan. Jarak yang dicatat adalah jumlah rata-rata mil per galon bahan bakar. Misalkan prosentase bahan bakar yang akan dicobakan adalah : bahan bakar A (100%), bahan bakar B (100%) dan bahan bakar A : B (50%:50%). Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 2.4. Prosentase bahan bakar A dan bahan bakar B

X_1	X_2
0	1
½	½
1	0

Dimana X_1 : proporsi bahan bakar A

X_2 : proporsi bahan bakar B

Jika diketahui sebelumnya bahwa bahan bakar A secara normal menghasilkan 13 mil/galon dan bahan bakar B menghasilkan 7 mil/galon. Jika mobil dites dengan dengan masing-masing bahan bakar secara terpisah, dengan 1 galon bahan bakar A dan kemudian dengan 1 galon bahan bakar B, diperoleh 13+7=20 mil untuk 2 galon atau dengan kata lain diperoleh rata-rata 20/2 =10 mil/galon. Kemudian apabila 2 bahan bakar dicampur dan dicobakan pada mobil yang sama, 50% : 50% campuran A:B, percobaan dilakukan dengan mengendarai mobil yang berisi 2 galon bahan bakar sampai bahan bakar habis. 5 percobaan dilakukan dan rata-rata jarak yang ditempuh adalah 12 mil/galon.

Tabel 2.5. Jarak rata-rata yang ditempuh dari masing-masing 5 percobaan

Percobaan	Jarak yang ditempuh dari 2 galon untuk 50%:50% campuran bahan bakar	Rata-rata jarak yang ditempuh / galon
1	24.6	12.30
2	23.3	11.65
3	24.3	12.15
4	23.1	11.55
5	24.7	12.35
		rata-rata seluruhnya= 12,00

Sumber: Cornell, 1990.

Rata-rata jumlah mil/galon dari campuran adalah 12 mil/galon dan lebih tinggi daripada rata-rata jarak yang ditempuh secara individu dari 2 bahan bakar yang menghasilkan 10 mil/galon.

2.4. Rancangan *Simplex-Lattice* {q,m}

Rancangan *Simplex-Lattice* diperkenalkan oleh Scheffe pada awal tahun 1958. Rancangan *Simplex-Lattice* adalah rancangan dengan titik respon diletakkan dengan jarak yang sama di atas daerah *simplex*. Daerah *simplex* adalah daerah yang terdiri dari daerah-daerah yang sudut dan sisinya kongruen (sama dan sebangun). Daerah *simplex* dengan q komponen adalah berdimensi (q-1).

Rancangan *Simplex-Lattice* {q,m} adalah rancangan untuk mengetahui pengaruh dari campuran komponen-komponen yang mempengaruhi respon pada percobaan *mixture* dengan q komponen dan derajat polinomial m. Pada rancangan *Simplex-Lattice* {q,m} terdapat (m+1) proporsi yang berbeda yaitu 0, 1/m, 2/m, 3/m,…,1. Sedangkan banyaknya titik pada rancangan *Simplex-Lattice* {q,m}adalah: $(q+m-1)!/m!(q-1)!$. …….(2.6)

Model yang digunakan dalam rancangan *Simplex-Lattice* {q,m} adalah

$$y_u = \eta_u + \varepsilon_u , \quad u=1,2,3,\dots,N \qquad \text{…….(2.7)}$$

dimana y_u : respon yang diamati pada percobaan ke-u

η_u : respon yang diharapkan pada percobaan ke-u

ε_u : galat yang ditimbulkan pada percobaan ke-u

N : banyaknya percobaan

Diasumsikan $\varepsilon_u \sim$ iid $N(0,\sigma^2)$. Sehingga dengan asumsi tersebut y_u diasumsikan $\sim$ iid $N(\eta_u,\sigma^2)$.

Respon yang diharapkan pada percobaan ke-u (η_u) pada rancangan *Simplex-Lattice* ini berupa suatu polinomial yang menggambarkan hubungan fungsional η dengan $x_1,x_2,\dots,x_q$ yang dinamakan polinomial {q,m} yaitu polinomial yang didapat dengan menerapkan pembatas $\sum_{k=1}^{q} x_k = 1$ pada model polinomial biasa.

Model polinomial dalam x_k dengan interaksi sebanyak m yaitu:

$$\eta = \beta o + \sum_{k=1}^{q} \beta_k x_k + \sum_{k=1}^{q} \sum_{k \neq k'}^{q} \beta_{kk'} x_k x_{k'} + \ldots + \sum_{k \leq k' \leq .. \leq m}^{q} \sum^{q} \ldots \sum^{q} \beta_{kk' \ldots m} x_k x_{k'} \ldots x_m \quad \ldots(2.8)$$

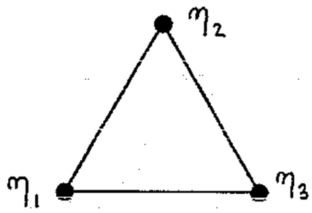
Model polinomial {q,m}

$$\eta = \sum_{k=1}^{q} \beta_k x_k + \sum_{k=1}^{q} \sum_{k \neq k'}^{q} \beta_{kk'} x_k x_{k'} + \ldots + \sum_{k \leq k' \leq .. \leq m}^{q} \sum^{q} \ldots \sum^{q} \beta_{kk' \ldots m} x_k x_{k'} \ldots x_m \quad \ldots\ldots (2.9)$$

2.4.1. Rancangan *Simplex-Lattice* {3,1}

Rancangan *Simplex-Lattice* {3,1} adalah rancangan *Simplex-Lattice* dengan 3 komponen dan derajat polinomialnya 1. Pada rancangan *Simplex-Lattice* {3,1} berarti q=3 dan m=1 terdapat (m+1) yaitu dua proporsi yang berbeda yaitu 0 dan 1 serta mempunyai tiga titik respon,yaitu: η_1 yaitu respon saat $x_1=1$, $x_2=0$ dan $x_3=0$,η_2 yaitu respon saat $x_1=0$, $x_2=1$ dan $x_3=0$ dan η_3 yaitu respon saat $x_1=0$, $x_2=0$ dan x3=1, dengan η_k adalah respon untuk komponen murni ke k dengan k=1,2,3, yaitu komponen dengan proporsi 0 dan 1.

Daerah *simplex*nya berdimensi 2, berbentuk segitiga sama sisi.



Gambar 2.1. Titik-titik respon pada rancangan Simplex-Lattice {3,1}

Model polinomial {3,1} diperoleh dengan cara mensubstitusikan $\sum_{k=1}^{3} x_k = 1$ pada model polinomial biasa dengan m=1 dengan proses sebagai berikut:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k$$

$$= \beta_0 \left(\sum_{k=1}^{3} x_k \right) + \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \beta_k^* x_k \quad \text{, dengan } \beta_k^* = \beta_0 + \beta_k$$

Untuk selanjutnya tanda * dihilangkan karena tanda tersebut hanya untuk membedakan polinomial biasa pada persamaan (2.8) dengan polinomial {q,m}.

Jadi model polinomial {3,1}adalah: $\eta = \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k$ ....(2.10)

Koefisien dalam polinomial {3,1} adalah:

$$\beta_k = \eta_k \qquad \text{......(2.11)}$$

Untuk membuktikannya dengan cara mensubstitusikan $\eta = \eta_k$, x_k=1 karena proporsi untuk polinomial {3,1} adalah 0 dan 1, dan $\sum_{k=1}^{3} x_k = 1$

$$\eta = \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k$$

$$\eta_k = \beta_k (1)$$

$$\beta_k = \eta_k$$

Untuk mengestimasi koefisien dalam polinomial {3,1} dengan cara mengganti nilai respon η_k dengan rata-rata nilai respon yang diamati $\bar{y}_k$, mengganti β dengan b (dimana b menunjukan perkiraan dari β). Sehingga pada model polinomial {3,1} koefisiennya adalah:

$$b_k = \bar{y}_k \qquad \text{......(2.12)}$$

- Rata-rata (nilai harapan) dari koefisien polinomial {3,1}: $E(b_k) = \beta_k$
- Varian dari koefisien polinomial {3,1}: $\text{var}\,(b_k) = \dfrac{\sigma^2}{r_k}$

Bukti:

- Dari asumsi model rancangan *Simplex-Lattice* {3,1} pada persamaan (2.7) yaitu $\varepsilon_u \sim \text{iid N}\,(0,\sigma^2)$, sehingga dengan asumsi tersebut y_u diasumsikan $\sim \text{iid N}(\eta_u,\sigma^2)$. $b_k = \bar{y}_k$, misal terdapat r_k ulangan pada y_k dan karena b_k adalah perkiraan dari β_k maka :

  $E(b_k) = E(\bar{y}_k) = \beta_k$

- $\text{Var}\,(b_k) = \text{var}(\bar{y}_k) = \text{var}\left[\dfrac{y_k}{r_k}\right] = \dfrac{\sigma^2}{r_k}$

Model rancangan *Simplex-Lattice* {3,1} diperoleh dengan cara mensubstitusikan model polinomial {3,1} ke dalam model rancangan *Simplex-Lattice*, sehingga didapat:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k + \varepsilon$$

$$y(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon \qquad \text{......(2.13)}$$

Pada rancangan *Simplex-Lattice* {3,1} terdapat 3 komponen dan p=3 koefisien *mixture*. Tes dilakukan untuk menguji apakah respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*. Tes dilakukan dengan hipotesis:

H0 : $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$ (respon tidak tergantung pada komponen-komponen *mixture*)

H1 : minimal ada satu k dengan $\beta_k \neq 0$ (respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*) ....(2.14)

Untuk menguji H0 yang dinyatakan dalam (2.14), model pada persamaan (2.13) dicocokkan dengan data percobaan dan nilai F hitungnya adalah:

$$\text{F hitung} = \frac{\text{JKR}/(p-1)}{\text{JKG}/(N-p)} = \frac{\text{JKR}/(3-1)}{\text{JKG}/(N-3)} \qquad \text{......(2.15)}$$

Dengan:

$$\text{JKR(Jumlah Kuadrat Regresi)} = \sum_{u=1}^{N}(\hat{y}_u - \bar{y})^2 \text{ dengan derajat bebas (p-1)}$$

$$\text{JKG(Jumlah Kuadrat Galat)} = \sum_{u=1}^{N}(y_u - \hat{y}_u)^2 \text{ dengan derajat bebas (N-p)}$$

$$\text{JKT} = \text{JKR} + \text{JKG} = \sum_{u=1}^{N}(y_u - \bar{y})^2 \text{ dengan db} = \text{(N-1)}$$

dimana: y_u : respon yang diamati pada percobaan ke-u

$\hat{y}_u$: respon yang diharapkan pada percobaan ke-u

$\bar{y}$: rata-rata respon yang diamati pada percobaan ke-u

Nilai F hitung pada persamaan (2.14) dibandingkan dengan nilai F tabel $= F_{(p-1;N-p;\alpha)}$. H0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika F hitung melebihi F tabel, yang berarti respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*.

Model rancangan *Simplex-Lattice* {q,m} pada (2.7) dapat dituliskan dalam bentuk matriks, yaitu:

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \text{.......(2.16)}$$

dengan y adalah sebuah vektor (Nx1) dari pengamatan, X adalah matriks (Nxp)dari komponen *mixture*, β adalah vektor (px1) dari koefisien *mixture* dan ε adalah vektor (Nx1) dari galat percobaan.

JKR, JKG dan JKT dapat dituliskan dalam bentuk matriks:

$$JKR = (b)'X'y - n\bar{y}^2$$

$$JKG = y'y - (b)'X'y$$

$$JKT = y'y - n\bar{y}^2 \qquad \ldots\ldots(2.17)$$

Tabel 2.6. Analisis varian untuk rancangan *Simplex-Lattice* {3,1}:

Sumber varian	db	Jumlah kuadrat (JK)	Rata-rata kuadrat (RK)	F hitung	F tabel
Regresi Galat Total	2 N-3 N-1	JKR JKG JKT	JKR/(2) JKG/(N-3)	RKR/RKG	$F_{(2;N-3;\alpha)}$

Nilai F hitung pada persamaan (2.14) dibandingkan dengan nilai F tabel = $F_{(2;N-6;\alpha)}$. H0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika F hitung melebihi F tabel, yang berarti respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*.

Contoh 2.4.1

Tiga bahan kain dicampur yaitu polyethilene (x_1), polystyrene (x_2) dan polypropylene (x_3) dan menghasilkan bahan serat yang dipintal membentuk benang untuk bahan gorden. Respon yang diamati adalah kekuatan benang. Data untuk pengamatan kekuatan benang sebagai berikut:

Tabel 2.7. Prosentase bahan kain

No	x_1	x_2	x_3	Kekuatan benang
1	1	0	0	11,0
2	1	0	0	12,4
3	0	1	0	8,8
4	0	1	0	10,0
5	0	0	1	16,8
6	0	0	1	16,0

Dengan x_1: proporsi untuk polyethilene

x_2 : proporsi untuk polystyren

x_3 : proporsi untuk polypropylene

Perhitungan untuk koefisien parameter:

$b_1 = \bar{y}_1 = (11{,}0+12{,}4)/2 = 11{,}7$

$b_2 = \bar{y}_2 = (8{,}8+10{,}0)/2 = 9{,}4$

$b_3 = \bar{y}_3 = (16{,}8+16{,}0)/2 = 16{,}4$

Terlihat bahwa : b3 > b1 > b2

Ini menunjukkan bahwa komponen 3 (polypropylene) menghasilkan benang yang paling kuat. Jadi model rancangan *Simplex-Lattice* {3,1} untuk contoh ini adalah:

$y(x) = 11{,}7\ x_1 + 9{,}4\ x_2 + 16{,}4\ x_3$

Setelah diperoleh model akan diuji apakah respon tergantung pada komponen-kopmonen *mixture*. Tes dilakukan dengan hipotesis:

H0 : $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$ (respon tidak tergantung pada komponen-komponen *mixture*)

H1 : minimal ada satu k dengan $\beta_k \neq 0$ (respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*)

Data pengamatan diolah dengan bantuan SPSS 10 untuk mendapatkan JKR, JKG dan JKT untuk membuat tabel analisis varian. Dari output diperoleh tabel sebagai berikut:

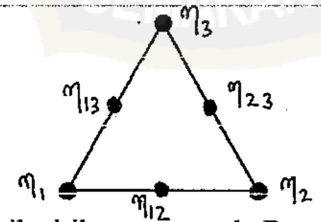
Tabel 2.8. Analisis Varian untuk pengamatan kekuatan benang

Sumber varian	Db	Jumlah kuadrat (JK)	Rata-rata kuadrat (RK)	F hitung	F tabel
Regresi	2	50,920	25,460	37,812	9,55
Galat	3	2,020	0,673		
Total	5	52,940			

Dari output didapat F hitung = 37,812 dan $F_{(2;3;0,05)}$ = 9,55. Karena F hitung melebihi F tabel maka Ho ditolak yang berarti respon bergantung pada komponen *mixture.*

2.4.2. Rancangan Simplex-Lattice {3,2}

Rancangan *Simplex-Lattice* {3,2} adalah rancangan *Simplex-Lattice* dengan 3 komponen dan derajat polinomialnya 2. Pada rancangan *Simplex-Lattice* {3,2} terdapat tiga proporsi yang berbeda yaitu 0, ½ dan 1 serta mempunyai enam titik respon yaitu: η_1 yaitu respon saat x_1=1, x_2=0, x_3=0, η_2 yaitu respon saat x_1=0,x_2=1 x_3=0, η_3 respon saat x_1=0, x_2=0, x_3=1, η_{12} yaitu respon saat x_1=1/2, x_2=1/2, x_3=0, η_{13} yaitu respon saat x_1=1/2, x_2=0, x_3=1/2 dan η_{23} yaitu respon saat x_1=0, x_2=1/2, x_3=1/2, dimana $\eta_{kk'}$ adalah respon untuk komponen biner dengan proporsi 50%:50% dari komponen k dan k', dengan k<k'. Daerah *simplex*nya berdimensi 2, berbentuk segitiga sama sisi.



Gambar 2.2. Titik-titik respon pada Rancangan Simplex-Lattice {3,2}

Model polinomial {3,2} diperoleh dengan cara mensubstitusikan $\sum_{k=1}^{3} x_k = 1$ dan $x_k^2 = x_k\left[1 - \sum_{k'=1,k'\neq k}^{3} x_{k'}\right]$ pada model polinomial biasa dengan m=2 dengan proses sebagai berikut:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{k=1}^{3}\beta_k x_k + \sum_{k\leq k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$\eta = \beta_0 + \sum_{k=1}^{3}\beta_k x_k + \sum_{k=1}^{3}\beta_{kk}x_k^2 + \sum_{k<k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$= \beta_0\left[\sum_{k=1}^{3}x_k\right] + \sum_{k=1}^{3}\beta_k x_k + \sum_{k=1}^{3}\beta_{kk}x_k\left[1 - \sum_{k'=1,k'\neq k}^{3}x_{k'}\right] + \sum_{k<k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}(\beta_0 + \beta_k + \beta_{kk})x_k - \sum_{k=1}^{3}\beta_{kk}x_k\sum_{k'=1}^{3}x_{k'} + \sum_{k<k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}(\beta_0 + \beta_k + \beta_{kk})x_k - \sum_{k=1}^{3}\sum_{k'=1,k'\neq k}^{3}\beta_{kk}x_k x_{k'} + \sum_{k<k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}(\beta_0 + \beta_k + \beta_{kk})x_k - [\beta_{11}x_1x_2 + \beta_{11}x_1x_3 + \beta_{22}x_2x_1 + \beta_{22}x_2x_3 + \beta_{33}x_3x_1 + \beta_{33}x_3x_2]$$

$$+ \sum_{k<k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\beta_k^* x_k - \sum_{k<k'}\sum^{3}(\beta_{kk} + \beta_{k'k'})x_k x_{k'} + \sum_{k<k'}\sum^{3}\beta_{kk'}x_k x_{k'}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\beta_k^* x_k + \sum_{k<k'}\sum\beta_{kk'}^* x_k x_{k'} \quad \text{, dengan} \quad \beta_k^* = \beta_0 + \beta_k + \beta_{kk}$$

$$\beta_{kk'}^* = \beta_{kk'} - \beta_{kk} - \beta_{k'k'}$$

Untuk selanjutnya tanda $*$ dihilangkan karena tanda tersebut hanya untuk membedakan polinomial biasa pada persamaan (2.8) dengan polinomial {q,m}.

Jadi model polinomial {3,2} adalah:

$$\eta = \sum_{k=1}^{3}\beta_k x_k + \sum_{k<k'}\sum\beta_{kk'}x_k x_{k'} \qquad \text{……(2.18)}$$

Koefisien dalam polinomial {3,2} adalah:

1. $\beta_k = \eta_k$ ……(2.19)

Untuk membuktikannya dengan cara mensubstitusikan $\eta = \eta_k$, $x_k=1$ dan $x_{k'}=0$, untuk $k' \neq k$ karena proporsi untuk polinomial {3,2} adalah 0 , ½ dan 1, dan $\sum_{k=1}^{3} x_k = 1$, dengan proses sebagai berikut:

$$\eta = \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k + \sum_{k<k'}\sum \beta_{kk'} x_k x_{k'}$$

$$\eta_k = \beta_k(1) + \beta_{k'}(0) + \beta_{kk'}(1)(0)$$

$$\beta_k = \eta_k$$

2. $\beta_{kk'} = 4\eta_{kk'} - 2\eta_k - 2\eta_{k'}$ .....(2.20)

untuk membuktikan ini dengan cara mensubstitusikan $\eta = \eta_{kk'}$, $x_k=x_{k'}=1/2$ untuk $k \neq k'$ pada polinomial {3,2} dan $\sum_{k=1}^{3} x_k = 1$, dengan proses sebagai berikut

$$\eta = \sum_{k=1}^{3} \beta_k x_k + \sum_{k<k'}\sum \beta_{kk'} x_k x_{k'}$$

$$\eta_{kk'} = \beta_k(1/2) + \beta_{k'}(1/2) + \beta_{kk'}(1/2)(1/2)$$

$$\eta_{kk'} = 1/2\beta_k + 1/2\beta_{k'} + 1/4\beta_{kk'}$$

substitusikan β_k dengan η_k dan $\beta_{k'}$ dengan $\eta_{k'}$ sehingga:

$$\eta_{kk'} = 1/2\eta_k + 1/2\eta_{k'} + 1/4\beta_{kk'}$$

$$\beta_{kk'} = 4\eta_{kk'} - 2\eta_k - 2\eta_{k'}$$

Untuk mengestimasi koefisien dalam polinomial {3,2} dengan cara mengganti nilai respon η dengan rata-rata nilai yang diamati $\bar{y}$, mengganti β dengan b (dimana b menunjukan perkiraan dari β). Sehingga pada model polinomial {3,2} koefisiennya adalah:

1. $b_k = \bar{y}_k$ ....(2.21)

2. $b_{kk'} = 4\bar{y}_{kk'} - 2\bar{y}_k - 2\bar{y}_{k'}$ ....(2.22)

- Rata-rata (nilai harapan) dari koefisien polinomial {3,2}: $E(b_k) = \beta_k$
- Rata-rata (nilai harapan) dari koefisien polinomial {3,2}: $E(b_{kk'}) = \beta_{kk'}$
- Varian dari koefisien polinomial {3,2}: var $(b_k) = \dfrac{\sigma^2}{r_k}$
- Varian dari koefisien polinomial {3,2}: $\text{var}(b_{kk'}) = \dfrac{16\sigma^2}{r_{kk'}} + \dfrac{4\sigma^2}{r_k} + \dfrac{4\sigma^2}{r_{k'}}$

  .(2.23)

Bukti:

- Dari asumsi model rancangan Simplex-Lattice {3,1} pada persamaan (2.7) yaitu $\varepsilon_u \sim$ iid N $(0,\sigma^2)$, sehingga dengan asumsi tersebut y_u diasumsikan $\sim$ iid $N(\eta_u,\sigma^2)$. $b_k = \bar{y}_k$, misal terdapat r_k ulangan pada y_k dan karena b_k adalah perkiraan dari β_k maka :

  $E(b_k) = E(\bar{y}_k) = \beta_k$

- $b_{kk'} = 4\bar{y}_{kk'} - 2\bar{y}_k - 2\bar{y}_{k'}$, misal terdapat $r_{kk'}$ ulangan pada $y_{kk'}$, r_k ulangan pada y_k dan $r_{k'}$ ulangan pada $y_{k'}$, dan $\beta_{kk'}$ adalah perkiraan dari $b_{kk'}$, maka:

  $E(b_{kk'}) = E(\bar{y}_{kk'}) = \beta_{kk'}$

- $\text{Var (bk)} = \text{var}(\bar{y}_k) = \text{var}\left[\dfrac{y_k}{r_k}\right] = \dfrac{\sigma^2}{r_k}$
- $\text{var}(b_{kk'}) = \text{var}(4\bar{y}_{kk'} - 2\bar{y}_k - 2\bar{y}_{k'})$

  karena $y_{kk'}$, y_k dan $y_{k'}$ adalah saling bebas, maka:

  $$\text{var}(b_{kk'}) = \text{var}(4\bar{y}_{kk'}) + \text{var}(2\bar{y}_k) + \text{var}(2\bar{y}_{k'}) = \frac{16\sigma^2}{r_{kk'}} + \frac{4\sigma^2}{r_k} + \frac{4\sigma^2}{r_{k'}}$$

Jika $r_{kk'}=r_k=r_{k'}=r$, maka $\mathrm{var}(b_{kk'})=\dfrac{24\sigma^2}{r}$ .....(2.24)

Model rancangan *Simplex-Lattice* {3,2} diperoleh dengan cara mensubstitusikan model polinomial {3,2} ke dalam model rancangan *Simplex-Lattice*, sehingga didapat:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{3}\beta_k x_k+\sum_{k<k'}\sum \beta_{kk'}x_k x_{k'}+\varepsilon$$

$$y(x)=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_{12}x_1x_2+\beta_{13}x_1x_3+\beta_{23}x_2x_3+\varepsilon \qquad ......(2.25)$$

Pada rancangan Simplex-Lattice {3,2} terdapat 3 komponen dan p=6 koefisien *mixture*. Tes dilakukan untuk menguji apakah respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*. Tes dilakukan dengan hipotesis:

H0 : $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_0$ dan $\beta_{12}=\beta_{13}=\beta_{23}=0$ (respon tidak tergantung pada komponen- komponen *mixture*)

H1: minimal ada satu k dengan $\beta_k \neq \beta_0$ (respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*) ....(2.26)

Jika H0 benar, koefisien-koefisien β_1, β_2, β_3 sama dengan suatu konstanta misal β. Sehingga model polinomial pada persamaan (2.18) dapat dituliskan :

$$\eta=\beta_0x_1+\beta_0x_2+\beta_0x_3=\beta_0 \qquad ....(2.27)$$

Estimasi kuadrat terkecil dari β_0 dalam persamaan (2.27) adalah:

$$b_0=\sum_{u=1}^{N}\frac{y_u}{N}=\bar{y} \qquad ......(2.28)$$

dimana $\bar{y}$ adalah rata-rata dari N observasi.

Untuk menguji H0 yang dinyatakan dalam (2.26), model pada persamaan (2.25) dicocokkan dengan data percobaan dan nilai F hitungnya adalah:

$$F \text{ hitung} = \frac{JKR/(6-1)}{JKG/(N-6)} \qquad \ldots\ldots(2.29)$$

Tabel 2.9. Analisis varian untuk rancangan *Simplex-Lattice* {3,2}:

Sumber varian	Db	Jumlah kuadrat (JK)	Rata-rata kuadrat (RK)	F hitung	F tabel
Regresi	5	JKR	JKR/(5)	RKR/RKG	$F_{(5;N-6;\alpha)}$
Galat	N-6	JKG	JKG/(N-6)		
Total	N-1	JKT			

Nilai F hitung pada persamaan (2.29) dibandingkan dengan nilai F tabel = $F_{(5;N-6;\alpha)}$. H0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika F hitung melebihi F tabel, yang berarti respon tergantung pada komponen-komponen *mixture.*

Contoh 2.4.2

Suatu percobaan dilakukan untuk menentukan suatu persamaan yang dapat digunakan untuk memprediksi kekenyalan roti ikan. Roti ikan tersebut dicoba dengan menggunakan tiga jenis ikan yang berbeda yaitu ikan *mullet*, ikan *sheepshead*, dan ikan *croaker.* Rancangan yang dipilih adalah Rancangan *Simplex-Lattice* {3,2} dengan prosentase ikan sebagai berikut:

- *mullet* (100%)
- *sheepshead* (100%)
- *croaker* (100%)
- *mullet* : *sheepshead* = (50%:50%)
- *mullet* : *croaker* = (50%:50%)
- *sheepshead* : *croaker* = (50%:50%)

Bahan-bahan lain yang menyusun roti ikan tersebut berjumlah sama untuk setiap komposisi. Responnya adalah kekenyalan roti ikan dengan satuan internasional:gram. 10^{-3}. Masing-masing komposisi diulang dua kali.

Tabel 2.10. Data pengamatan kekenyalan roti ikan

No	x_1	x_2	x_3	y
1	1	0	0	2.02
2	1	0	0	2.08
3	0	1	0	1.47
4	0	1	0	1.37
5	½	½	0	1.91
6	½	½	0	1.00
7	0	0	1	1.93
8	0	0	1	1.83
9	½	0	½	1.98
10	½	0	½	2.13
11	0	½	½	1.80
12	0	½	½	11.7

Dimana x_1 : proporsi ikan *mullet*

x_2 : proporsi ikan *sheepshead*

x_3 : proporsi ikan *croaker*

y : kekenyalan roti ikan

Perhitungan:

$b_1 = y_1 = 2.05$

$b_2 = y_2 = 1.42$

$b_3 = y_3 = 1.88$

$b_{12} = 4y_{12} - 2y_1 - 2\,y_2 = 0.88$

$b_{13} = 4y_{13} - 2y_1 - 2y_3 = 0.36$

$b_{23} = 4y_{23} - 2y_2 - 2\,y_3 = 0.42$

Terlihat bahwa : $b_1 > b_3 > b_2$

Ini menunjukkan bahwa dari campuran komponen tunggal, komponen 1 (ikan mullet) menghasilkan tepung ikan yang paling kenyal apabila dibandingkan dengan kedua komponen yang lain. Sedangkan dari campuran biner terlihat bahwa

b_{12} , b_{13}, $b_{23} > 0$ yang berarti ketiga campuran menghasilkan kekenyalan yang sama.

Jadi persamaan yang diperoleh adalah:

$y(x) = 2.05x_1 + 1.42x_2 + 1.88x_3 + 0.88x_{12} + 0.36x_{13} + 0.42x_{23}$

Setelah diperoleh model akan diuji apakah respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*. Tes dilakukan dengan hipotesis:

H0 : $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_0$ dan $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$

(respon tidak tergantung pada komponen-komponen *mixture*)

H1 : minimal ada satu k dengan $\beta_k \neq \beta_0$ (respon tergantung pada komponen-komponen *mixture*)

Data pengamatan diolah dengan bantuan SPSS 10 untuk mendapatkan JKR, JKG dan JKT untuk membuat tabel analisis varian. Dari output diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 2.11. Analisis Varian untuk kekenyalan roti ikan

Sumber varian	db	Jumlah kuadrat (JK)	Rata-rata kuadrat (RK)	F hitung	F tabel
Regresi	5	0,567	0,115	22,177	4,39
Galat	6	0,03115	0,005192		
Total	11	0,607			

Dari output didapat F hitung = 37,812 dan $F_{(5;6;0,05)}$ = 4,39. Karena F hitung melebihi F tabel maka Ho ditolak yang berarti respon bergantung pada komponen *mixture*.

2.5. MODEL REDUKSI

Model reduksi dibuat dengan tujuan untuk mengetahui model uyang terbaik yang dapat menggambarkan respon yang diamati. Model reduksi tidak mempunyai bentuk khusus. Dari model yang digunakan sebelumnya, hanya direduksi menjadi model yang paling sederhana.

Model reduksi dapat diselesaikan dengan beberapa cara. Pada rancangan *Simplex-Lattice* {3,2} dapat direduksi dengan menghilangkan bagian interaksi b_{ij} dengan i<j . Hipotesis yang digunakan:

H0 : model reduksi sesuai

H1 : model reduksi tidak sesuai

Statistik uji yang digunakan adalah:

$$F_{hit} = \frac{\left[JKR_{lengkap} - JKR_{reduksi}\right]/r}{JKR_{lengkap}/(N-p)}$$

dengan $JKR_{lengkap}$: jumlah kuadrat regresi dari model lengkap (model awal)

$JKR_{reduksi}$: jumlah kuadrat model reduksi

R : rank yaitu banyaknya paramater yang direduksi

H0 akan ditolak jika F hitung melebihi $F_{(r,N-p;\alpha)}$, yang berarti model reduksi tidak sesuai untuk menggambarkan respon yang diamati.

Selain dengan menghilangkan bagian interaksi b_{ij} dapat juga dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponennya. Model reduksi ini dilakukan jika besarnya nilai b_i dan b_j, mendekati (hampir) sama.