BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. LOGIKA PROPOSISI

2.1.1. Bahasa

Definisi 1 proposisi :

Kalimat logika proposisi dibuat oleh simbol-simbol berikut yang disebut proposisi :

- Simbol *kebenaran : benar, salah*
- Simbol *proposisi* : $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, R_2, S_2, \ldots$

Definisi 2 kalimat dalam logika proposisi :

Kalimat logika proposisi dibangun dari proposisi-proposisi yang dihubungkan dengan penghubung proposisi : *tidak, dan, atau, jika-maka, jika-dan-hanya-jika* dan *jika-maka-tidak.*

Kalimat logika proposisi dibentuk dengan aturan sebagai berikut :

- Kalimat adalah terdiri dari simbol kebenaran atau simbol proposisi.
- Jika $\mathcal{F}$ kalimat, maka *negasi*nya *(tidak $\mathcal{F}$)* juga kalimat.
- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka *konjungsi*nya *($\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$)* juga kalimat.
- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka *disjungsi*nya *($\mathcal{F}$ atau $\mathcal{G}$)* juga kalimat.
- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka *implikasi*nya *(jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$)* juga kalimat.

  Dimana $\mathcal{F}$ disebut *antesenden* dan $\mathcal{G}$ disebut *konsekuen* dari

  (jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$).

Kalimat (jika $\mathcal{G}$ maka $\mathcal{F}$) disebut *konvers* dari kalimat (jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$).

- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka *equivalen*nya *($\mathcal{F}$ jika dan hanya jika $\mathcal{G}$)* yang juga kalimat. $\mathcal{F}$ disebut *sisi bagian kiri* dan $\mathcal{G}$ disebut *sisi bagian kanan* dari ($\mathcal{F}$ jika dan hanya jika $\mathcal{G}$).
- Jika $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, dan $\mathcal{H}$ kalimat, maka *kondisi*nya *(jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$ jika tidak maka $\mathcal{H}$)* yang juga kalimat.

  $\mathcal{F}$ disebut *klausa-jika*, $\mathcal{G}$ disebut *klausa-maka*, dan $\mathcal{H}$ disebut *klausa-jika tidak maka* dari (jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$ jika tidak maka $\mathcal{H}$).

Contoh

Kalimat $\mathcal{E}$:

[{tidak(P atau Q)} jika dan hanya jika {(tidak P) dan (tidak Q)}].

Merupakan kalimat karena,

P kalimat

Q kalimat

(P atau Q), (tidak P), (tidak Q) kalimat

{tidak(P atau Q)} dan {(tidak P) dan (tidak Q)} kalimat sehingga bila diberikan ekspresi $\mathcal{E}$

[{tidak(P atau Q)} jika dan hanya jika {(tidak P) dan (tidak Q)}].

Delapan kalimat diatas merupakan sub kalimat dari $\mathcal{E}$, tujuh kalimatnya (selain $\mathcal{E}$) merupakan sub kalimat yang sebenarnya dari $\mathcal{E}$.

2.1.2. Arti Sebuah Kalimat

Definisi 3 interpretasi :

Suatu *interpretasi I* memberikan nilai kebenaran benar atau salah pada setiap anggota dari himpunan simbol-simbol proposisi.

Bila I tidak memberikan nilai kebenaran pada proposisi apapun maka I disebut *interpretasi kosong*.

I disebut interpretasi untuk $\mathcal{F}$ jika I memberi nilai kebenaran *untuk semua* simbol yang ada pada $\mathcal{F}$.

Contoh

Kalimat

$$\mathcal{F} : P \text{ atau } (\text{tidak } Q)$$

Interpretasi : I_1 : *P* benar, *Q* salah; I_2 : *P* salah, *Q* salah

Maka untuk interpretasi I_1 dan I_2 kalimat $\mathcal{F}$ bernilai benar.

Definisi 4 aturan semantik :

Misal $\mathcal{E}$ kalimat dan I interpretasi untuk $\mathcal{E}$. Maka nilai kebenaran dari $\mathcal{E}$ tergantung dari I dan ditentukan dengan aturan sebagai berikut :

- *aturan proposisi* : Nilai kebenaran untuk setiap simbol proposisi P, Q, R, ... dalam kalimat $\mathcal{E}$ sesuai dengan interpretasi I.
- *aturan benar* : Kalimat *benar* adalah benar pada I.
- *atuaran salah* : Kalimat *salah* adalah salah pada I.
- *aturan tidak* : Negasi *tidak* $\mathcal{F}$ adalah benar jika $\mathcal{F}$ salah, dan salah jika $\mathcal{F}$ benar.

- *aturan dan* : Konjungsi *F dan G* adalah benar jika *F* dan *G* keduanya benar, dan selainnya itu salah.
- *aturan atau* : Disjungsi *F atau G* adalah benar jika *F* benar atau jika *G* benar, dan selainnya itu salah.
- *aturan jika-maka* : Implikasi *jika F maka G* adalah benar jika *F* salah atau jika *G* benar, selainnya itu salah.
- *aturan jika-dan-hanya-jika* : Equivalen *F jika dan hanya jika G* adalah benar jika nilai kebenaran dari *F* adalah sama dengan nilai kebenaran dari *G*, selainnya itu salah.
- *aturan jika-maka-jika-tidak-maka* : Nilai kebenaran dari kondisi *jika F maka G jika tidak maka H* adalah jika *F* benar maka *G* benar, jika *F* salah maka *H* benar.

2.1.3. Sifat - Sifat Kalimat

Definisi 5 absah, terpenuhi, kontradiksi, berakibat, equivalen, konsisten :

Kalimat *F* adalah *absah* jika *F* bernilai benar terhadap semua interpretasi I. Kalimat absah dari logika proposisi disebut *tautologi*.

Kalimat *F* disebut *terpenuhi* jika *F* bernilai benar terhadap suatu interpretasi I.

Kalimat *F* disebut *kontradiksi* jika *F* bernilai salah terhadap setiap interpretasi I.

Kalimat *F* disebut *berakibat* kalimat *G* jika untuk setiap interpretasi I jika *F* bernilai benar *G* juga bernilai benar.

Dua kalimat $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ disebut *equivalen* jika untuk setiap interpretasi I untuk $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Himpunan kalimat-kalimat $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... disebut *konsisten* jika terdapat suatu interpretasi I sehingga semua $\mathcal{F}_i$ bernilai benar.

Contoh

Kalimat

P

terpenuhi, karena benar untuk interpretasi apapun yang memberi P nilai benar. Tetapi kalimat tersebut tidak absah karena kalimat tersebut salah terhadap interpretasi apapun yang memberi P nilai salah.

Kalimat

P dan (tidak P)

kontradiksi, karena salah untuk interpretasi apapun tanpa memperhatikan apakah nilai P benar atau salah.

Kalimat

(P dan Q) berakibat P

karena terhadap interpretasi apapun dimana (P dan Q) benar, P juga benar.

Dua kalimat

P dan tidak (tidak P)

equivalen, karena masing-masing kalimat benar terhadap suatu interpretasi yang memberi P nilai benar, dan terhadap setiap interpretasi yang memberi P nilai salah.

Dua kalimat

P dan Q

tidak equivalen, karena mempunyai nilai kebenaran yang berbeda terhadap setiap interpretasi yang memberi nilai berbeda pada P dan Q.

Himpunan kalimat

P, P atau Q, tidak Q

konsisten, karena masing-masing kalimat adalah benar terhadap interpretasi, dimana P adalah benar dan Q adalah salah.

Himpunan kalimat

P, tidak P, tidak Q

inkonsisten, karena pada akhirnya salah satu dari kalimat salah terhadap interpretasi tanpa memperhatikan apakah nilai P dan Q benar atau salah. Jika P benar, kalimat kedua salah. Jika P salah kalimat pertama salah.

2.1.4. Substitusi

Definisi 6 substitusi total :

Jika $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ kalimat, maka notasi $\mathcal{F} \blacktriangleleft \{\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{H}\}$ disebut substitusi total, yaitu menyatakan kalimat yang diperoleh dari kalimat $\mathcal{F}$ dengan mengganti setiap pemunculan $\mathcal{G}$ dengan $\mathcal{H}$.

Contoh

$$\begin{bmatrix} P & dan & \\ (Q & atau & P) \end{bmatrix} \blacktriangleleft \{P \leftarrow (\text{jika R maka S})\}$$

adalah

(jika R maka S) dan

(Q atau (jika R maka S))

Operasi substitusi tidak akan berpengaruh jika sub kalimat yang akan diganti tidak ada dalam kalimat.

Definisi 7 substitusi parsial :

Jika $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ kalimat, maka notasi $\mathcal{F} \triangleleft \{\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{H}\}$ disebut substitusi parsial, yaitu menyatakan kalimat yang diperoleh dari kalimat $\mathcal{F}$ dengan mengganti satu atau lebih pemunculan $\mathcal{G}$ dengan $\mathcal{H}$ atau tidak ada pemunculan $\mathcal{G}$ yang diganti sama sekali.

Contoh

[P atau P] $\triangleleft$ *{P* $\leftarrow$ *Q}*

adalah

P atau P	(tidak ada penggantian P)
Q atau P	(pengantian P pertama)
P atau Q	(penggantian P kedua)
Q atau Q	(penggantian kedua P)

2.2. Logika Predikat

2.2.1. Bahasa

Definisi 8 simbol-simbol :

Kalimat logika predikat dibentuk atas simbol-simbol :

- Simbol kebenaran : benar dan salah
- simbol konstanta : a, b, c, a', b', c', a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ...
- Simbol variabel : u, v, w, x, y, z, u', v', w', x', y', z', u_1, v_1, ...

- Simbol fungsi : f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, ...

  Setiap simbol fungsi terdapat bilangan integer n yang menunjukkan banyaknya argumen dari fungsi tersebut dan disebut arity simbol fungsi.

- Simbol predikat : p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, ...

  Setiap simbol fungsi terdapat bilangan integer n yang menunjukkan banyaknya argumen dari predikat tersebut dan disebut arity simbol predikat. (dalam logika predikat tidak memuat simbol berupa huruf besar).

Definisi 9 term :

Term dalam logika predikat adalah ekspresi yang menyatakan objek. Dibangun dengan aturan sebagai berikut :

- Konstanta a, b, c, ... adalah term.
- Variabel u, v, w, ... adalah term.
- Jika t_1, t_2, ... t_n adalah term-term, dimana $n \geq 1$ dan f simbol fungsi berarity n, maka aplikasinya

  $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah term.

- Jika $\mathcal{F}$ kalimat dan s dan t adalah term-term, maka kondisi

  jika $\mathcal{F}$ *maka s jika tidak maka t* adalah term.

Contoh

simbol fungsi f adalah biner, yaitu berarity 2 dan simbol fungsi g ternary, yaitu berarity 3 maka

a adalah term (a konstanta);

x adalah term (x variabel);

f(a,x) adalah term (a dan x term dan f simbol fungsi biner);

g(x,f(a,x),a) adalah term (x, f(a,x), dan a adalah term dan simbol fungsi ternary).

Definisi 10 proposisi :

Proposisi dalam logika predikat dimaksudkan untuk menggambarkan hubungan dua objek. Dibangun dengan aturan sebagai berikut :

- Simbol kebenaran

  benar dan *salah* adalah proposisi.

- Jika t_1, t_2, ..., t_n adalah term-term, dimana n $\geq$ 1 dan p adalah simbol predikat berarity n, maka

  $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ adalah proposisi.

Contoh

Jika p simbol predikat ternary, maka

p(a, x, f(a, x)) adalah proposisi,

karena a, x, dan f(a,x) adalah term-term dan p simbol predikat ternary.

Definisi 11 kalimat :

Kalimat dalam logika predikat dibangun dari proposisi-proposisi, seperti dalam logika proposisi, disusun dengan aturan sebagai berikut :

- Setiap proposisi adalah kalimat.
- Jika $\mathcal{F}$ kalimat, maka *negasi*nya *(tidak $\mathcal{F}$)*.
- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka *konjungsi*nya *($\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$)*, dan *disjungsi*nya *($\mathcal{F}$ atau $\mathcal{G}$)*.

- Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat , maka *implikasi*nya *(jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$)*, dan *equivalensi*nya *($\mathcal{F}$ jika dan hanya jika $\mathcal{G}$)*.
- Jika $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ kalimat, maka *kondisi*nya *(jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$ jika tidak maka $\mathcal{H}$)*
- Jika x suatu variabel dan $\mathcal{F}$ kalimat, maka

  ((untuk semua x)$\mathcal{F}$) dan *((untuk suatu x)$\mathcal{F}$)*

  adalah kalimat. Prefiks "*untuk semua*" dan "*untuk suatu*" disebut *universal quantifier* dan *existensial quantifier* dan $\mathcal{F}$ disebut *skup quantifier*.

Contoh

Simbol fungsi f dan g biner yaitu dengan arity dua dan simbol predikat p ternary maka :

p(a,x,f(a,x)) adalah kalimat (karena proposisi).

q(g(b,x),y) adalah kalimat (karena proposisi).

((*untuk suatu y*)q(g(b,x),y)) adalah kalimat (karena skup quantifier eksistensial (*untuk suatu y*) kalimat).

(p,(a,x,f(a,x)) dan ((*untuk suatu y*)q(g(b,x,y))) adalah kalimat (karena kedua konjungsi adalah kalimat).

(((*untuk semua x*)p(a,x,f(a,x))) dan ((*untuk suatu y*)q(g(b,x),y))) adalah kalimat (karena skup quantifier universal (*untuk semua x*) kalimat).

Definisi 12 ekspresi :

Ekspresi adalah sebuah term atau kalimat.

Definisi 13 subterm, subkalimat, subekspresi :

- Setiap term yang digunakan membentuk term t (termasuk t sendiri) atau kalimat $\mathcal{F}$ disebut subterm dari t atau $\mathcal{F}$.
- Setiap kalimat yang digunakan membentuk term t atau kalimat dari $\mathcal{F}$ (termasuk $\mathcal{F}$ sendiri) disebut subkalimat dari t atau $\mathcal{F}$.
- Sub term bersama sub kalimat dari term t (termasuk t sendiri) disebut sub ekspresi dari t.

Demikian pula, sub term dan sub kalimat dari kalimat $\mathcal{F}$ (termasuk $\mathcal{F}$ sendiri) disebut subekspresi dari $\mathcal{F}$.

2.2.2. Variabel Bebas dan Terikat

Definisi 14 pemunculan terikat dan bebas :

Pemunculan variabel x diekspresi $\mathcal{E}$ (kalimat atau term) dikatakan terikat jika x terdapat di dalam skup quantifier di $\mathcal{E}$.

Terikat dengan quantifier yang paling dalam yang berisi pemunculan x.

Pemunculan variabel x diekspresi $\mathcal{E}$ dikatakan pemunculan bebas jika x tidak terdapat di dalam skup semua quantifier di $\mathcal{E}$.

Contoh

Kalimat

$$\mathcal{E} : (untuk\ semua\ x)\begin{bmatrix} p(x,y \\ dan \\ (untuk \quad suatu \quad y)q(y,z) \end{bmatrix}$$

Kejadian x dalam p(x,y) terikat dalam $\mathcal{E}$, dengan quantifier (*untuk semua x*). Kejadian z dalam q(y,z) adalah bebas dalam $\mathcal{E}$ kejadian y dalam p(x,y) adalah bebas, jika kejadian y dalam q(y,z) adalah terikat, dengan quantifier (untuk suatu y).

Definisi 15 variabel bebas dan terikat :

Variabel x adalah terikat dalam suatu ekspresi $\mathcal{E}$ jika paling sedikit terdapat satu pemunculan terikat x dalam $\mathcal{E}$, dan bebas dalam $\mathcal{E}$. Jika paling sedikit terdapat satu pemunculan bebas x dalam $\mathcal{E}$.

Definisi 16 kalimat tertutup :

Kalimat yang tidak mengandung pemunculan bebas dari semua variabelnya disebut kalimat tertutup.

Definisi 17 simbol bebas :

Simbol-simbol bebas dari sebuah ekspresi $\mathcal{E}$ terdiri atas variabel bebas dari $\mathcal{E}$, semua simbol konstanta, simbol fungsi dan simbol predikat dari $\mathcal{E}$.

Contoh

Kalimat simbol bebas

$$(untuk\ semua\ x)\begin{bmatrix} p(x,y) \\ dan \\ (untuk \quad suatu \quad y)q(y,f(a,z)) \end{bmatrix}$$

y dan z adalah variabel bebas, a konstanta, f simbol fungsi , p dan q simbol predikat.

2.2.3. Arti Sebuah Kalimat

Definisi 18 interpretasi :

Sebuah interpretasi I pada logika predikat selalu dikaitkan dengan himpunan dari objek-objek yang ditinjau. Himpunan ini jelas tidak kosong dan disebut domain, interpretasi I memberi nilai pada :

- Setiap konstanta a sebuah elemen a_I di D.
- Setiap variabel bebas x sebuah elemen x_I di D.
- Setiap simbol fungsi f dengan arity n, sebuah fungsi dengan arity yang sama yaitu $f_I(d_1, d_2, ..., d_n)$ di D.
- Setiap simbol predikat p dengan arity n, sebuah predikat n-ary, yaitu $p_I(d_1, d_2, ..., d_n)$ dalam D nilainya benar atau salah.

Dalam logika predikat, I dikatakan interpretasi, jika I memberi nilai pada masing-masing simbol bebas.

Contoh

Ɛ : jika p(x, f(x))

maka (*untuk suatu y*) p(a,y)

Perhatikan bahwa Ɛ mempunyai sebuah variabel bebas x.

Jika I adalah interpretasi Ɛ dengan domain bilangan-bilangan riil.

a adalah $\sqrt{2}$

x adalah π

$f_I(d)$ adalah d/2

$p_I(d_1,d_2)$ adalah $d_1 \geq d_2$

$\mathcal{E}_I$: jika $\pi \geq \pi/2$

maka ada sebuah bilangan riil d

sedemikian hingga $\sqrt{2} \geq d$

Definisi 19 perluasan interpretasi :

Bila I merupakan suatu interpretasi dengan domain D maka setiap konstanta a dan d pada domain D dapat didefinisikan perluasan untuk interpretasi I, yaitu J tetap dengan domain D dengan notasi :

J : (a $\leftarrow$ d) o I

yang berarti :

1. memberi nilai d pada konstanta a
2. nilai konstanta yang lain nilainya sesuai I
3. variabel x, fungsi f dan predikat p nilainya tetap sesuai I pula

Analog untuk variabel x dengan notasi : (x $\leftarrow$ d) o I

fungsi f dengan notasi : (f $\leftarrow$ d) o I

predikat p dengan notasi : (p $\leftarrow$ d) o I

2.2.4. Aturan Semantik

Definisi 20 aturan semantik :

$\mathcal{E}$ adalah sebuah ekspresi dan I adalah interpretasi untuk $\mathcal{E}$ dengan domain D maka nilai dari $\mathcal{E}$ dalam I ditentukan berdasarkan aturan semantik :

- aturan konstanta

  Nilai dari konstanta a adalah elemen domain a_I

- aturan variabel

  Nilai dari variabel x adalah elemen domain x_I

- aturan aplikasi

  Nilai dari aplikasi $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ adalah elemen domain $f_I(d_1, d_2, ..., d_n)$ dimana f_I adalah fungsi f dan $d_1, d_2, ..., d_n$ nilai-nilai dari term-term $t_1, t_2, ..., t_n$ dalam I.

- aturan-aturan benar salah

  Benar bernilai benar

  Salah bernilai salah

- aturan penghubung logika

  Jika, dan, atau, jika-maka, jika-dan-hanya-jika, jika-maka-jika-tidak.

2.3. Logika Predikat Lanjutan

2.3.1. Katalog Skema Kalimat Absah

- Dualitas quantifier

  tidak(*untuk semua x*) $\mathcal{F}$

  jika dan hanya jika

  (*untuk suatu x*) [tidak $\mathcal{F}$]

- **Hukum kontraposisi**

  (jika $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{G}$)

  jika dan hanya jika

  (jika(tidak $\mathcal{G}$) maka (tidak $\mathcal{F}$))

- **Redundan quantifier**

  (*untuk semua x*) $\mathcal{G}$

  jika dan hanya jika

  $\mathcal{G}$

Proposisi renaming variabel terikat :

Misalkan (untuk ... x) $\mathcal{G}$[x] kalimat dan misalkan x\` suatu variabel yang bukan kejadian bebas dalam (untuk ... x) $\mathcal{G}$[x].

Misalkan $\mathcal{F}$ kalimat dan misalkan $\mathcal{F}$\` akibat dari pemindahan atau beberapa kejadian dari (untuk ... x) $\mathcal{G}$[x] dalam $\mathcal{F}$ dengan (untuk ...x') $\mathcal{G}$[x'].

Maka

$\mathcal{F}$ dan $\mathcal{F}$' equivalen.

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{F}$' equivalen cukup ditunjukkan bahwa

(untuk ... x) $\mathcal{G}$[x]

adalah equivalen dengan

(untuk ... x') $\mathcal{G}$[x']

Dalam kasus ini (untuk ... x) adalah universal quantifier (*untuk semua* x). Untuk menentukan bahwa (*untuk semua* x) $\mathcal{G}$[x] equivalen dengan (*untuk semua* x') $\mathcal{G}$[x']

ditunjukkan bahwa nilai kebenarannya sama dalam satu interpretasi. Tetapi untuk sebarang interpretasi I, diketahui

(*untuk semua* x) $\mathcal{G}$[x] benar dalam I

tepat bila untuk setiap elemen d dalam domain,

$\mathcal{G}$[x] benar dalam (x ← d) o I

tepat bila untuk setiap elemen d dalam domain,

$\mathcal{G}$[x'] benar dalam (x' ← d) o I

tepat bila

(*untuk semua* x') $\mathcal{G}$[x'] benar dalam I

terbukti.

Contoh

Kalimat

$\mathcal{F}$: (*untuk semua* y) [p(x',y) dan (*untuk suatu* x) q(y,x)]

dan sub kalimatnya

(untuk ... x) $\mathcal{G}$[x] : (*untuk suatu* x) q(y,x)

maka menurut proposisi kita memindahkan kejadian dari sub kalimat.

(untuk ... x) $\mathcal{G}$[x] dalam $\mathcal{F}$ dengan

(untuk ... x') $\mathcal{G}$[x'] : (*untuk suatu* x') q(y,x')

diperoleh kalimat

$\mathcal{F}'$: (*untuk semua* y) [p(x',y) dan (*untuk suatu* x') q(y,x')]

equivalen dengan $\mathcal{F}$.

2.4. Teori-teori khusus

2.4.1. Teori

Definisi 21 vocabulary :

Vocabulary dari sebuah teori adalah suatu sub himpunan : c_1, c_2, c_3,... pada konstanta logika predikat, suatu sub himpunan : f_1, f_2, f_3, ... merupakan simbol fungsi logika predikat, suatu sub himpunan : p_1, p_2, p_3, ... merupakan simbol predikat logika predikat.

Definisi 22 aksioma :

Aksioma suatu teori adalah himpunan kalimat tertutup $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ...

Dan bisa dikatakan bahwa teori didefinisikan dengan aksioma-aksiomanya.

Definisi 23 teori :

Suatu teori terdiri dari bahasa dan himpunan kalimat (yang disebut aksioma). Bahasa teori adalah bahasa logika predikat yang vocabularynya, yaitu sub himpunan partikular dari simbol-simbol yang terdapat dalam logika predikat pada umumnya.

Contoh

Misalkan akan didefinisikan suatu teori dengan domain bilangan asli dalam interpretesi I, yaitu

$f(x) : 2x$

$g(x) : x^2$

$p(x,y) : x \le y$

(lebih tepatnya, p_I (d,e) terpenuhi jika $d \le e$)

Dengan demikian vocabulary dari teori ini terdiri dari simbol fungsi f dan g, simbol predikat p dan tidak ada simbol konstanta.

Aksioma teori ini merupakan himpunan kalimat tertutup sebagai berikut :

$\mathcal{F}_1$: (*untuk semua x*) p(x, f(x))

(untuk semua x, $x \le 2x$)

$\mathcal{F}_2$: (*untuk semua x*) p(x, g(x))

(untuk semua x, $x \le x^2$)

$$\mathcal{F}_3 : \begin{matrix}(\textit{untuk semua } x)\\ (\textit{untuk semua } y)\end{matrix}\begin{bmatrix}\textit{jika } p(x,y)\\ \textit{maka } p(x, f(y))\end{bmatrix}$$

(untuk semua x, untuk semua y, jika $x \le y$ maka $x \le 2y$)

$$\mathcal{F}_4 : \begin{matrix}(\textit{untuk semua } x)\\ (\textit{untuk semua } y)\end{matrix}\begin{bmatrix}\textit{jika } p(x,y)\\ \textit{maka } p(x, g(y))\end{bmatrix}$$

(untuk semua x, untuk semua y, jika $x \le y$ maka $x \le y^2$)

Definisi 24 model, validitas, konsistensi :

Suatu interpretasi I merupakan model untuk sebuah teori jika setiap aksioma $\mathcal{A}_i$ dari teori benar dalam I.

- Sebuah kalimat tertutup $\mathcal{S}$ dari suatu teori, adalah absah dalam teori jika $\mathcal{S}$ benar dalam setiap model untuk teori.
- Sebuah kalimat $\mathcal{S}$ berakibat sebuah kalimat $\mathcal{T}$ dalam teori, jika $\mathcal{S}$ benar dalam sebuah model untuk teori, juga benar dalam model.
- Dua kalimat $\mathcal{S}$ dan $\mathcal{T}$ equivalen dalam teori, jika $\mathcal{S}$ dan $\mathcal{T}$ mempunyai nilai kebenaran yang sama dalam setiap model untuk teori.

- Suatu teori adalah konsisten jika terdapat paling sedikit satu model untuk teori.

2.4.2. Teori Strict Partial Ordering

Teori strict partial ordering p adalah teori dimana dalam vocabularynya terdapat simbol predikat p, didefinisikan dengan aksioma berikut :

$$\mathcal{S}_1: \begin{matrix} (untuk \quad semua \quad x) \\ (untuk \quad semua \quad y) \\ (untuk \quad semua \quad z) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika \quad p(x,y) \quad dan \quad p(y,z) \\ maka \quad p(x,z) \end{bmatrix} \qquad \text{(transitif)}$$

$$\mathcal{S}_2: \quad (untuk \quad semua \quad x)[tidak \quad p(x,x)] \qquad \text{(irrefleksif)}$$

Pada teori ini akan digunakan notasi konvensional $x \prec y$ dari p(x,y). Jadi $\mathcal{S}_1$ dan $\mathcal{S}_2$ dapat ditulis :

$$\mathcal{S}_1: \begin{matrix} (untuk \quad semua \quad x) \\ (untuk \quad semua \quad y) \\ (untuk \quad semua \quad z) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika \quad x \prec y \quad dan \quad y \prec z \\ maka \quad x \prec z \end{bmatrix}, \text{ absah}$$

(transitif)

$$\mathcal{S}_2: \quad (untuk \quad semua \quad x)[tidak \quad (x \prec x)], \text{ absah}$$

(irrefleksif)

Di sini $x \prec y$ merupakan notasi informal untuk p(x,y).

Proposisi asimetri strict partial ordering :

$$\mathcal{S}_3: \begin{matrix} (untuk \quad semua \quad x) \\ (untuk \quad semua \quad y) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika \quad x \prec y \\ maka \quad tidak(y \prec x) \end{bmatrix} \qquad \text{(asimetri)}$$

adalah absah.

Bukti

Seandainya, kalimat $\mathcal{S}_3$ tidak absah, terdapat elemen x dan y sedemikian hingga keduanya $x \prec y$ dan $y \prec x$. Maka, dengan aksioma $\mathcal{S}_1$ didapat $x \prec x$. Tetapi kontradiksi dengan aksioma $\mathcal{S}_2$ irrefleksif, sehingga $\mathcal{S}_3$ absah.

Pada prakteknya, orang menggunakan kalimat $x \succ y$ sinonim dengan $y \prec x$. Simbol predikat biner $\succ$ disebut invers dari $\prec$ dalam vocabulary dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathcal{S}_4 : \begin{matrix} (untuk \quad semua \quad x) \\ (untuk \quad semua \quad y) \end{matrix} \begin{bmatrix} x \succ y \\ jika \quad dan \quad hanya \quad jika \quad y \prec x \end{bmatrix}$$

(invers)

Contoh

- *Relasi lebih-kecil*

Ambil interpretasi I dalam bilangan integer yang menunjukkan relasi *lebih-kecil* pada simbol predikat biner $\prec$. Maka I adalah model untuk teori *Strict partial ordering* $\prec$, karena aksioma transitif dan irrefleksif untuk $\prec$ keduanya dipenuhi dalam interpretasi I.

$\mathcal{S}_1$: untuk setiap bilangan integer d_1, d_2, dan d_3,

jika $d_1 < d_2$ dan $d_2 < d_3$

maka $d_1 < d_3$

$\mathcal{S}_2$: untuk setiap bilangan integer d,

tidak$(d < d)$

$\mathcal{S}_3$: untuk setiap bilangan integer d_1 dan d_2,

jika $d_1 < d_2$

maka tidak$(d_2 < d_1)$

$\mathcal{S}_4$: untuk setiap bilangan integer d_1 dan d_2,

$d_1 < d_2$

jika dan hanya jika $d_2 > d_1$

maka semua pernyataan di atas bernilai benar.

2.5. Teori Kesamaan

2.5.1. Teori

Vocabulary dari teori kesamaan terdiri dari simbol predikat biner = dan sebuah himpunan tak spesifik dari simbol-simbol konstanta, fungsi dan predikat yang lain.

Aksioma-aksioma dasar :

$$\mathcal{E}_1 : \begin{matrix} (untuk \quad semua \quad x) \\ (untuk \quad semua \quad y) \\ (untuk \quad semua \quad z) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika \quad x = y \quad dan \quad y = z \\ maka \quad x = z \end{bmatrix}$$

(transitif)

$$\mathcal{E}_2 : \begin{matrix} (untuk \quad semua \quad x) \\ (untuk \quad semua \quad y) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika \quad x = y \\ maka \quad y = x \end{bmatrix}$$

(simetri)

$$\mathcal{E}_3 : \quad (untuk \quad semua \quad x) \quad [x = x]$$ (refleksif)

Skema aksioma substitusi

Untuk setiap k-simbol fungsi f dalam vocabulary dan untuk setiap i dari 1 sampai k,

$$\mathcal{E}_4 : \begin{matrix} (untuk\ semua\ z_1) \\ \vdots \\ (untuk\ semua\ x)(untuk\ semua\ z_{i-1}) \\ (untuk\ semua\ y)(untuk\ semua\ z_{i+1}) \\ \vdots \\ (untuk\ semua\ z_k) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika\ x = y \\ maka \\ f(z_1, \cdots, z_{i-1} \\ x, z_{i+1}, \cdots, z_k) \\ = f(z_1, \cdots, z_{i-1} \\ y, z_{i+1}, \cdots, z_k) \end{bmatrix}$$

(substitusi fungsi untuk f)

untuk setiap l simbol predikat q (selain dari pada =) dalam vocabulary dan untuk setiap j dari 1 sampai l

$$\mathcal{E}_5 : \begin{matrix} (untuk\ semua\ z_1) \\ \vdots \\ (untuk\ semua\ x)(untuk\ semua\ z_{j-1}) \\ (untuk\ semua\ y)(untuk\ semua\ z_{j+1}) \\ \vdots \\ (untuk\ semua\ z_l) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika\ x = y \\ maka \\ q(z_1, \cdots, z_{j-1}, \\ x, z_{j+1}, \cdots, z_l) \\ jika\ dan\ hanya\ jika \\ q(z_1, \cdots, z_{j-1}, \\ y, z_{j+1}, \cdots, z_l) \end{bmatrix}$$

(substitusi predikat untuk q)

Keduanya, skema aksioma substitusi fungsi $\mathcal{E}_4$ dan substitusi predikat $\mathcal{E}_5$ mewakili himpunan-himpunan aksioma-aksioma, satu atau lebih untuk masing-masing simbol fungsi dan simbol predikat. Jika ada sejumlah simbol-simbol fungsi dan predikat tak terbatas dalam vocabulary, maka aksioma-aksioma substitusi fungsi atau substitusi predikat menjadi tak terbatas.

Proposisi aturan semantik untuk kesamaan :

Jika I model untuk teori kesamaan, adalah sebuah interpretasi untuk term-term t_1 dan t_2.

Jika

nilai t_1 dalam I

adalah sama dengan

nilai t_2 dalam I

maka

$t_1 = t_2$ benar dalam I

hasil ini disebut "peraturan =".

Bukti

Andaikan term-term t_1 dan t_2 mempunyai nilai sama, d elemen domain dalam I. Akan diperlihatkan bahwa kalimat $t_1 = t_2$ benar dalam I.

Dengan mengambil $=_I$ menjadi relasi biner untuk simbol predikat kesamaan = dalam I. Maka (dengan aturan semantik proposisi, karena nilai-nilai dari t_1 dan t_2 masing-masing adalah d).

nilai dari $t_1 = t_2$ dalam I adalah $d =_I d$

akan ditunjukkan bahwa

$d =_I d$ adalah benar

Sudah diasumsikan bahwa I adalah sebuah model untuk teori kesamaan. Sesuai aksioma refleksif E_3,

(*untuk semua x*) [x = x]

adalah benar dalam I, maka kalimat :

$t_1 = t_1$ dalam I adalah $d =_1 d$

karena itu $d =_1 d$ benar.

2.5.3. Penggantian

Proposisi penggantian :

Andaikan x sebuah peubah, t sebuah term dan $\mathcal{F}[x]$ adalah sebuah kalimat, dimana x tidak muncul/kejadian bebas dalam t.

maka

(*untuk semua x*) [jika x = t maka $\mathcal{F}[x]$] adalah equivalen dengan $\mathcal{F}[t]$

(universal)

dan

(*untuk suatu x*) [x = t dan $\mathcal{F}[x]$] adalah equivalen dengan $\mathcal{F}[t]$

(eksistensial)

Dalam teori kesamaan pembuktian bergantung pada observasi berikut tentang operator substitusi total dan parsial.

Bukti (penggantian)

Pertama kita tetapkan bagian universal. Cukup menunjukkan, jika salah satu sisi adalah benar, sisi lainnya juga benar.

$\Rightarrow$

(*untuk semua x*) [jika x = t maka $\mathcal{F}[x]$] adalah benar.

kita akan menunjukkan bahwa

$\mathcal{F}[t]$ benar

(dengan proposisi quantifier universal instan, x diganti dengan t)

jika t = t maka $\mathcal{F}[t]$

benar.

Perhatikan, penggantian x dengan t tidak mempunyai pengaruh pada term t dalam x = t, karena x bukan kejadian bebas dalam t. Karena (dengan aksioma refleksif $\mathcal{E}_3$)

t = t

benar. $\mathcal{F}[t]$ benar

$\Leftarrow$

Anggap $\mathcal{F}[t]$ benar, akan ditunjukkan bahwa :

(*untuk semua x*) [jika x = t maka $\mathcal{F}[x]$]

juga benar. x elemen sebarang, dan

x = t

(dengan aksioma simetri $\mathcal{E}_2$)

t = x

Akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{F}[x]$ benar (dengan proposisi pembalikan substitusi), F[x] equivalen ke salah satu kalimat yang dinotasikan dengan $\mathcal{F}[t]$ $\{t \longleftarrow x\}$. Karena t = x dan $\mathcal{F}[t]$ benar, $\mathcal{F}[t]$ $\{t \longleftarrow x\}$ benar, karena itu $\mathcal{F}[x]$ benar.

Bukti dari eksistensial parsial bertumpu pada bagian universal.

(*untuk suatu x*) [x = t dan $\mathcal{F}[x]$] equivalen ke $\mathcal{F}[t]$, benar

tepat bila

tidak (*untuk suatu x*) [x = t dan $\mathcal{F}[x]$] equivalen ke (tidak $\mathcal{F}[t]$)

tepat bila

(*untuk semua x*)[tidak(x = t dan $\mathcal{F}$[x])] equivalen ke (tidak $\mathcal{F}$[t])

tepat bila

(*untuk semua x*)[jika x = t maka (tidak $\mathcal{F}$[x])] equivalen ke (tidak $\mathcal{F}$[t])

tetapi dari universal parsial dari proposisi, (tidak $\mathcal{F}$[x]) diganti dengan F[x]

Dengan cara yang sama diperoleh versi yang lebih umum dari proposisi di atas, dimana n peubah $x_1, x_2, ..., x_n$ dalam sebuah kalimat $\mathcal{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$ diganti dengan n term $t_1, t_2, ..., t_n$ seperti berikut :

Proposisi penggantian umum :

Anggap $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah peubah-peubah $t_1, t_2, ..., t_n$ adalah term-term dan $\mathcal{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$ adalah sebuah kalimat, dimana tak satupun dari peubah-peubah $x_1, x_2, ..., x_n$ merupakan kejadian-kejadian bebas pada setiap term-term $t_1, t_2, ..., t_n$.

Kemudian

$$\begin{matrix} (untuk\ semua\ x_1) \\ (untuk\ semua\ x_2) \\ \vdots \\ (untuk\ semua\ x_n) \end{matrix} \begin{bmatrix} jika\ x_1 = t_1\ dan \\ x_2 = t_2\ dan \\ \vdots \\ x_n = t_n \\ maka\ F[x_1, x_2, \cdots, x_n] \end{bmatrix}$$

(universal)

equivalen dengan

$\mathcal{F}[t_1, t_2, ..., t_n]$

dan

$$\begin{matrix}(untuk\ suatu\ x_1)\\(untuk\ suatu\ x_2)\\ \vdots \\(untuk\ suatu\ x_n)\end{matrix}\begin{bmatrix}jika\ x_1 = t_1\ dan\\ x_2 = t_2\ dan\\ \vdots \\ x_n = t_n dan\\ F[x_1, x_2, \cdots, x_n]\end{bmatrix} \qquad \text{(eksistensial)}$$

equivalen dengan

$$\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$$

2.5.4. Teori of Weak Partial Ordering

Contoh pertama dari teori dengan kesamaan adalah teori of weak partial ordering. Vocabulary dari teori ini terdiri dari sebuah simbol predikat biner, yang mana ditunjukkan dengan $\preceq$, maupun dengan simbol kesamaan =. Arti dari simbol $\preceq$ didefinisikan dengan aksioma-aksioma khusus sebagai berikut :

$$\mathcal{W}_1 : \begin{matrix}(untuk\ semua\ x)\\(untuk\ semua\ y)\\(untuk\ semua\ z)\end{matrix}\begin{bmatrix}jika\ x \preceq y\ dan\ y \preceq z\\ maka\ x \preceq z\end{bmatrix}$$

(transitif)

$$\mathcal{W}_2 : \begin{matrix}(untuk\ semua\ x)\\(untuk\ semua\ y)\end{matrix}\begin{bmatrix}jika\ x \preceq y\ dan\ y \preceq x\\ maka\ x = y\end{bmatrix}$$

(antisimetri)

$\mathcal{W}_3$: *(untuk semua x)* [$x \preceq x$]

(refleksif)

Dalam setiap teori kesamaan, mempunyai aksioma-aksioma transitif, simetri, dan refleksif $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ dan $\mathcal{E}_3$ untuk kesamaan. Karena simbol predikat biner $\preceq$ dalam vocabulary ini, ada dua hal dari skema aksioma substitusi predikat $\mathcal{E}_5$:

$$
\begin{array}{l}
(\textit{untuk semua } x) \\
(\textit{untuk semua } y) \\
(\textit{untuk semua } z)
\end{array}
\left[
\begin{array}{l}
\textit{jika } x = y \\
\textit{maka } x \preceq z \\
\textit{jika dan hanya jika } y \preceq z
\end{array}
\right]
$$

(substitusi kiri untuk $\preceq$)

dan

$$
\begin{array}{l}
(\textit{untuk semua } x) \\
(\textit{untuk semua } y) \\
(\textit{untuk semua } z)
\end{array}
\left[
\begin{array}{l}
\textit{jika } x = y \\
\textit{maka } z \preceq x \\
\textit{jika dan hanya jika } z \preceq y
\end{array}
\right]
\text{(substitusi kanan untuk } \preceq\text{)}
$$