BAB II

TEORI PENUNJANG

Pada bab II ini dijelaskan tentang ring, ring polinomial, matriks invertibel, dan polinomial matriks, dan teorema Cayley-Hamilton. Pembahasan mengenai ring meliputi, sifat-sifat ring, sub-ring dan ideal serta pembahasan mengenai homomorfisma dan isomorfisma.

2.1.Sifat-sifat ring

Dalam pembahasan sifat-sifat ring dibahas mengenai aksioma-aksioma suatu ring, ring komutatif, ring dengan elemen satuan, ring dengan invers terhadap operasi perkalian, ring dengan pembagi nol, daerah integral serta lapangan.

Definisi 2.1. (Raisinghania, 1980)

Suatu **ring** R adalah suatu himpunan R yang tidak kosong beserta dua hukum komposisi yang disajikan dengan tanda penjumlahan dan tanda pergandaan yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. Terhadap operasi penjumlahan merupakan grup abelian

1.1. Untuk semua a, b dalam R dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam R sedemikian hingga a + b = c.

$(\forall a, b \in R)(\exists!\, c \in R)\ a + b = c$

1.2. Untuk semua a, b, c dalam R berlaku (a + b) + c = a + (b + c)

$(\forall a, b, c \in R)(a + b) + c = a + (b + c)$

1.3. Di dalam R terdapat elemen 0 sedemikian hingga untuk setiap a dari R berlaku 0 + a = a + 0 = a

$(\exists!\ 0 \in R)\ (\forall a \in R)\ 0 + a = a + 0 = a$

1.4. untuk setiap a dalam R dapat ditemukan elemen –a dalam R sedemikian hingga $-a + a = a + (-a) = 0$

$(\forall a \in R)(\exists!\ -a \in R)\ (-a) + a = a + (-a) = 0$

1.5. Untuk setiap a,b dalam R berlaku $a + b = b + a$

$(\forall a, b \in R)\ a + b = b + a$

2. Terhadap operasi pergandaan mempunyai sifat tertutup dan assosiatif, yaitu:

2.1. Untuk semua a,b dalam R dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam R sedemikian hingga $ab = c$

$(\forall a, b \in R)(\exists!\ c \in R)\ ab = c$

2.2. Untuk semua a, b, c dalam R berlaku $(ab)\,c = a\,(bc)$

$(\forall a, b, c \in R)\ (a\,b)\,c = a\,(b\,c)$

3. Kedua aturan komposisi di atas dihubungkan dengan aksioma distributifitas sebagai berikut:

3.1. Untuk semua a, b, c dalam R berlaku $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ dan $(b + c)\,a = b\,a + c\,a$

$(\forall a, b, c \in R)\ a\,(b + c) = ab + ac$

$(\forall a, b, c \in R)\ (b + c)\,a = ba + ca$

Contoh 2.1.

Akan diselidiki himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaaan merupakan ring.

Jawab:

1. Terhadap operasi penjumlahan

1.1 Untuk semua a, b dalam $\mathbb{Z}$ dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam $\mathbb{Z}$ sedemikian hingga a + b = c.

$(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\exists!\ c \in \mathbb{Z})\ a + b = c$

1.2 Untuk semua a, b, c dalam $\mathbb{Z}$ berlaku (a + b) + c = a + (b + c)

$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})(a + b) + c = a + (b + c)$

1.3 Di dalam $\mathbb{Z}$ terdapat elemen 0 sedemikian hingga untuk setiap a dari $\mathbb{Z}$ berlaku 0 + a = a + 0 = a

$(\exists!\ 0 \in \mathbb{Z})\ (\forall a \in \mathbb{Z})\ 0 + a = a + 0 = a$

1.4 untuk setiap a dalam $\mathbb{Z}$ dapat ditemukan elemen –a dalam $\mathbb{Z}$ sedemikian hingga berlaku –a + a = a + (-a) = 0

$(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists!\ {-a} \in \mathbb{Z})\ (-a) + a = a + (-a) = 0$

1.5 Untuk setiap a,b dalam $\mathbb{Z}$ berlaku a + b = b + a

$(\forall a, b \in \mathbb{Z})\ a + b = b + a$

2. Terhadap operasi pergandaan berlaku aksioma-aksioma

2.1.Untuk semua a,b dalam $\mathbb{Z}$ dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam $\mathbb{Z}$ sedemikian hingga ab = c

$(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\exists!\ c \in \mathbb{Z})\ ab = c$

2.2. Untuk semua a, b, c dalam $\mathbb{Z}$ berlaku (ab) c = a (bc)

$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\ (a\,b)\,c = a\,(b\,c)$

3. Sifat Distributifitas

3.1. untuk semua a, b, c dalam $\mathbb{Z}$ berlakulah a (b + c) = a b + a c dan

(b + c) a = b a + c a

$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\ a\,(b + c) = ab + ac$

$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\ (b + c)\,a = ba + ca$

Sehingga himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian ($\mathbb{Z}$,+,.) merupakan ring

Sifat-sifat ring diuraikan dalam definisi berikut:

Definisi 2.2.

1. Jika R komutatif terhadap pergandaan yaitu apabila pada aksioma-aksioma suatu ring R ditambah aksioma: untuk setiap a,b $\in$R berlaku a b = b a, maka R disebut ring komutatif
2. Apabila dalam ring R dapat ditemukan elemen e_1 dengan sifat bahwa e_1 a = a untuk setiap a$\in$R maka e_1 disebut elemen satuan kiri. Apabila e_2 sedemikian hingga a e_2 = a untuk setiap a$\in$R maka e_2 disebut elemen satuan kanan. Apabila ada elemen e sedemikian hingga e a = a e = a untuk setiap a$\in$R maka disebut elemen satuan. Selanjutnya apabila pada aksioma-aksioma ring R di tambah aksioma tersebut maka R disebut ring

dengan elemen satuan. Elemen $a \in R$ disebut unit jika $ab = ba = e$ untuk $b \in R$. U(R) menyatakan unit-unit dalam R.

3. Apabila dalam ring R terdapat elemen-elemen a dan b sedemikian hingga untuk $a \neq 0$, dan $b \neq 0$ berlaku $a\,b = 0$, maka dalam hal ini a disebut pembagi nol kiri dan b disebut pembagi nol kanan. Dan ring R disebut ring dengan **pembagi nol.**

   $(\exists\ a, b \in R)\ (a, b \neq 0)\ a\,b = 0.$

   Himpunan pembagi nol dalam R di lambangkan dengan Z(R).
4. Suatu ring R disebut suatu **daerah integral** jika R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak memiliki pembagi nol.
5. Suatu ring R disebut **lapangan** jika R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan sedemikian hingga setiap elemen yang tak nol memiliki invers terhadap perkalian.

Contoh 2.2.

Dari contoh 2.1.1.1. $(\mathbb{Z},+,.)$ merupakan ring. Selanjutnya diselidiki sifat-sifat ring $(\mathbb{Z},+,.)$.

Sifat-sifat ring $(\mathbb{Z},+,.)$

1. Operasi pergandaan dalam $\mathbb{Z}$ adalah komutatif, untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}$ berlaku $ab = ba \in \mathbb{Z}$, sehingga $(\mathbb{Z},+,.)$ merupakan ring komutatif.

2. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a.1 = 1.a = a$, sehingga $\mathbb{Z}$ mempunyai identitas terhadap operasi pergandaan. Dengan demikian $\mathbb{Z}$ merupakan ring dengan elemen identitas.
3. Pada $\mathbb{Z}$ tidak ditemukan untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$, $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$, sehingga $\mathbb{Z}$ tidak memiliki pembagi nol. Dengan demikian $\mathbb{Z}$ merupakan ring tanpa pembagi nol, yang tidak lain $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral.
4. Setiap elemen tak nol, kecuali 1, tidak memiliki invers terhadap perkalian. Dengan demikian $(\mathbb{Z},+,.)$ bukan merupakan lapangan.

Teorema 2.1. (Raisinghania, 1980)

Setiap lapangan merupakan daerah integral

Contoh 2.3.

1. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan merupakan ring komutatif dengan elemen identitas dan setiap elemen tak nol memiliki invers. Jadi $\mathbb{R}$ merupakan lapangan. Dan $\mathbb{R}$ juga merupakan suatu daerah integral
2. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan merupakan merupakan ring komutatif dengan elemen identitas dan setiap dua elemen yang tidak nol dalam $\mathbb{Z}$ tidak berlaku $ab = 0$. Sehingga $(\mathbb{Z},+,.)$

merupakan daerah integral, tetapi $(\mathbb{Z},+,.)$ bukan lapangan, karena hanya $1 \in \mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi pergandaan

2.2. Sub-ring dan Ideal

Selanjutnya didefinisikan tentang sub-ring dan suatu sub-ring khusus yang disebut ideal.

Definisi 2.3.

1. Suatu himpunan bagian tak kosong S dari suatu ring R disebut **sub-ring** dari ring R jika S memenuhi semua aksioma-aksioma ring. Syarat perlu dan cukup agar S merupakan sub-ring dari R adalah untuk setiap $a,b \in R$ berlaku :

   1.1. $a,b \in S \Rightarrow a-b \in S$

   1.2. $a,b \in S \Rightarrow a.b \in S$

2. Suatu sub-ring S dari R di sebut

   2.1, Ideal kanan dari R jika untuk setip $a \in S$, dan $r \in R$ maka $ar \in S$

   $a \in S, r \in R \Rightarrow a\,r \in S$

   2.2, Ideal kiri dari R jika untuk setiap $a \in S$, dan $r \in R$ maka $ra \in S$

   $a \in S, r \in R \Rightarrow r\,a \in S$

   2.3. Jika S merupakan ideal kiri dan ideal kanan dari R, maka S disebut **ideal**

   $a \in S, r \in R \Rightarrow ar \in S$ dan $ra \in S$

Contoh 2.4.

Himpunan bilangan rasional Q merupakan ring. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan sub-ring dari ring Q. akan tetapi $\mathbb{Z}$ bukan ideal kiri ataupun ideal kanan dari Q karena

$a \in \mathbb{Z}$, $r \in Q$ tidak mengakibatkan $a\,r \in \mathbb{Z}$ dan

$a \in \mathbb{Z}$, $r \in Q$ tidak mengakibatkan $r\,a \in \mathbb{Z}$

2.3. Homomorfisma dan Isomorfisma Ring

Misal X dan Y adalah dua himpunan tak kosong, maka pemetaan dari X ke Y, ditulis $f : X \to Y$, disebut pemetaan satu-satu jika : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Merupakan suatu hal yang mungkin jika ada beberapa elemen di Y yang tidak memiliki pasangan di X, maka kondisi demikian disebut pemetaan into. Sedangkan f disebut pemetaan onto, jika setiap elemen di Y mempunyai paling sedikit satu kawan di X.

Definisi 2.4.

1. Misal R dan R' adalah sembarang dua ring. Maka pemetaan f dari R into R' dikatakan sebagai **homomorfisma**, jika:

   1.1. $f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad \forall a,b \in R$

   1.2. $f(a\,b) = f(a)\ f(b) \qquad \forall a,b \in R$

Sifat ini disebut sifat baku komposisi.

2. Jika f onto, maka homomorfisma f dari R onto R' dinamakan epimorfisma, dan R' disebut bayangan homomorfis dari ring R. Disini dikatakan bahwa R homomorfik ke R' dan ditulis $R \approx R'$.

3. Jika homomorfisma f satu-satu, maka dinamakan monomorfisma.

4. Jika f onto dan satu-satu, maka dinamakan **isomorfisma.**

Pembahasan mengenai ring polinomial dibagi menjadi 3, pertama pembahasan tentang polinomial atas ring, dilanjutkan pembahasan mengenai polinomial tak-tereduksi, dan algoritma pembagian.

2.4. Polinomial atas Ring

R adalah suatu ring. Maka suatu himpunan berurutan tak hinggga $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ elemen R dengan berhingga elemen tak-nol disebut polinomial atas ring R, yaitu suatu barisan tak hingga $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ yang berasal dari R di sebut **polinomial atas ring R** jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a_i = 0$, nol dari R, untuk setiap i > n. Polinomial ini dilambangkan dengan simbol

$$f(X) = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + 0X^{n+1} + 0X^{n+2} + \ldots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$$

X bukan elemen R, X disebut indeterminate atas ring R.

$a_0X^0, a_1X^1, \ldots, a_nX^n, \ldots$. disebut suku-suku dari polinomial f(X) dan elemen $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ merupakan koefisien dari suku-suku pada polinomial f(X).

$f(X) = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots$ suatu polinomial atas ring R sedemikian hingga jika $a_n \neq 0$ dan $a_i = 0$ untuk setiap i > n, maka polinomial ini disebut polinomial berderajat n, ditulis deg f(X) = n. Jika $a_i = 0$ untuk setiap i, maka f(X) adalah polinomial nol, dilambangkan dengan 0X. Polinomial f(X) atas ring R jika suku pertamanya merupakan elemen identitas dari R maka polinomial ini disebut monic polinomial. Polinomial f(X) = 0 tidak mempunyai derajat polinomial dan polinomial dengan bentuk f(X) = a_n disebut konstanta. Dan elemen $1X^0$ adalah unit dari polinomial. Himpunan semua polinomial atas ring R dengan indeterminate X, di lambangkan dengan R[X]

Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi perkalian dalam R[X].

Definisi 2.5.

Jika diberikan $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\ X^{n-i}$ dan

$g(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + \ldots + b_{n-1}X + b_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\ X^{n-k}$ keduanya dalam R[X]

maka:

1. $f(X) + g(X) = (a_0 + b_0)X^n + (a_1+b_1)X^{n-1} + \ldots + (a_n+b_n) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)\ X^{n-i}$ dan

2. $f(X) \, . \, g(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\ X^{n-i} . \sum_{k=0}^{n} b_k\ X^{n-k} = \sum_{m} c_m\ X^m$ dengan $c_m = \sum_{i+k=m} a_i b_k$

2.5. Polinomial Tak-tereduksi

Definisi 2.6.

Diberikan F[X] himpunan semua polinomial dalam X dengan koefisien dari lapangan F. Polinomial f(X), g(X), h(X)$\in$ F[X] adalah **tak-tereduksi** atas F jika f(X) tidak dapat dinyatakan sebagai suatu hasil kali/faktor g(X) h(X) dua polinomial g(X) dan h(X) yang ke-duanya berderajat kurang dari f(X). Sebaliknya f(X) disebut polinomial **tereduksi.**

Contoh 2.5.

1. Polinomial $f(X) = X^2 - 2X - 3$ tereduksi atas lapangan bilangan riil karena $X^2 - 2X - 3$ dapat difaktorkan sebagai $X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$
2. Polinomial $f(X) = X^2 - 2$ tak-tereduksi atas ring bilangan rasional Q tapi tereduksi atas ring bilangan rill. Karena pada ring bilangan riil f(X) dapat difaktorkan menjadi

   $f(X) = X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$

Teorema 2.2. (Raisinghania, 1980)

R[X] merupakan suatu ring

2.6. Algoritma Pembagian

Definisi 2.7.

Diberikan R[X] himpunan polinomial dalam X dengan koefisien dari R dan misalkan f(X), g(X) $\in$ R[X]. Jika terdapat h(X) $\in$ R[X] sedemikian hingga f(X) = g(X) h(X) maka dikatakan g(X) membagi f(X). (Ditulis $g(X) \mid f(X)$) atau g(X) adalah faktor/pembagi dari f(X).

Contoh 2.6.

Diberikan polinomial $f(X) = X^2 - 2X - 3$, $g(X) = X - 3$ dan $h(X) = X + 1$

$f(X) = g(X)h(X)$

$X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$

maka dikatakan g(X) membagi f(X), atau g(X) adalah faktor/pembagi dari f(X) ditulis $g(X) \mid f(X)$

Teorema 2.3. (Teorema Pembagian, Brown, 1993))

Misalkan f(X), g(X) sembarang polinomial dalam R[X]. Bila $g(X) \neq 0$ maka terdapat dengan tunggal polinomial u(X), v(X), r(X) dan s(X) dalam R[X] sedemikian hingga :

f(X) = u(X) g(X) + r(X), dengan r(X) = 0 atau deg r(X)< deg g(X)

f(X) = g(X) v(X) + s(X), dengan s(X) = 0 atau deg s(X)< deg g(X)

Definisi 2.8.

Misalkan R[X] himpunan polinomial dalam X dengan koefisien dari R. f(X), g(X) $\in$ R[X], dan andaikan $g(X) \neq 0$.

a. Jika f(X) = u(X) g(X) + r(X) dengan r(X) = 0 atau deg r(X)< deg g(X) maka r(X) disebut sisa kanan dari pembagian f(X) dengan g(X).

b. Jika f(X) = g(X) v(X) + s(X) dengan s(X) = 0 atau deg s(X)< deg g(X) maka s(X) disebut sisa kiri dari pembagian f(X) dengan g(X).

Jika koefisien pemimpin dari g(X) adalah unit dalam R maka dengan teorema 2.3. sisa kiri (kanan) dari pembagian f(X) dengan g(X) adalah tunggal. Tetapi sisa kanan dari pembagian f(X) dengan g(X) tidak perlu sama dengan sisa kiri.

Andaikan R ring komutatif, dan $f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$ adalah polinomial dalam R[X]. Jika $z \in$ R, dan X disubstitusikan terhadap z maka akan didapat : $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$.

Jika R bukan ring komutatif maka f(z) mempunyai dua kemungkinan nilai.

Definisi 2.9.

Diberikan $f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \in R[X]$. Misal $z \in R$ maka $f_R(z)$ dan $f_L(z)$ akan melambangkan dua elemen di R sebagai berikut :

a. $f_R(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$

b. $f_L(z) = z^n a_0 + z^{n-1} a_1 + \dots + z a_{n-1} + a_n$

$f_R(z)$ disebut nilai kanan dari f(X) di z dan $f_L(z)$ disebut nilai kiri dari f(X) di z. Jika R bukan ring komutatif maka jelas $f_R(z)$ tidak sama dengan $f_L(z)$.

Selanjutnya akan diuraikan versi nonkomutatif untuk teorema sisa.

Teorema 2.4. (Teorema Sisa, Brown, 1993)

Diberikan $f(X) \in R[X]$ dan misalkan $z \in R$, maka terdapat polinomial u(X) dan v(X) dalam R[X] sedemikian hingga :

a. $f(X) = u(X)\,(X - z) + f_R(z)$

b. $f(X) = (X - z)\,v(X) + f_L(z)$

$f_R(z)$ adalah sisa kanan dari pembagian f(X) dengan (X – z), dan $f_L(z)$ adalah sisa kiri dari f(X) dengan (X – z).

Bukti :

a. Dengan teorema 2.4. maka diperoleh pernyataan: terdapat dengan tunggal polinomial u(X) dan r(X) dalam R[X] sedemikian hingga

$$f(X) = u(X)\,(X - z) + r(X) \qquad (2.1)$$

Selanjutnya berlaku salah satu $r(X) = 0$ atau $\deg r(X) < \deg (X - z) = 1$, maka $r(X) = r$ suatu konstan di R. Jika $f(X) = 0$ atau jika $\deg (f) = 0$ maka $u(X) = 0$ dan $f(X) = r = f_R(z)$.

Sekarang andaikan $\deg f(X) = n \geq 1$. Persamaan 2.1. mengakibatkan deg $u(X) = n - 1$. Misalkan :

$$u(X) = c_0 X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + \dots + c_{n-2} X + c_{n-1}$$

Bila $u(X)$ disubstitusikan ke persamaan 2.1. akan diperoleh :

$$f(X) = (c_0 X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + \dots + c_{n-2} X + c_{n-1})(X - z) + r(X)$$

$$= (c_0 X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_{n-2} X^2 + c_{n-1} X) - (c_0 X^{n-1} z + c_1 X^{n-2} z + \dots + c_{n-2} X z + c_{n-1} z) + r(X)$$

$$= c_0 X^n + (c_1 - c_0 z) X^{n-1} + \dots + (c_{n-1} - c_{n-2} z) X + (r - c_{n-1} z) \qquad (2.2)$$

Dengan menukarkan X dengan z maka 2.2. menjadi :

$$f_R(z) = c_0 z^n + (c_1 - c_0 z) z^{n-1} + \dots + (c_{n-1} - c_{n-2} z) z + (r - c_{n-1} z) = r$$

b. Dengan teorema 2.4. maka diperoleh pernyataan: terdapat dengan tunggal polinomial $v(X)$ dengan $s(X)$, sedemikian hingga

$$f(X) = (X - z)\, v(X) + s(X) \qquad (2.3)$$

Selanjutnya berlaku salah satu $s(X) = 0$ atau deg (s) < deg $(X - z) = 1$, maka $s(X) = s$ suatu konstanta di R. Jika $f(X) = 0$ atau jika deg $f(X) = 0$ maka $v(X) = 0$ dan $f(X) = s = f_L(z)$.

Sekarang asumsikan deg $f(X) = n \geq 1$. Persamaan 2.3. mengakibatkan deg $v(X) = n - 1$. Misalkan :

$$v(X) = c_0 X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + \dots + c_{n-2} X + c_{n-1}$$

Bila $v(X)$ disubstitusikan kepersamaan 2.3. maka akan didapat

$$f(X) = (X - z)(c_0 X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + \dots + c_{n-2} X + c_{n-1}) + s(X)$$

$$= (c_0 X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_{n-2} X^2 + c_{n-1} X) - (c_0 X^{n-1} z + c_1 X^{n-2} z + \dots + c_{n-2} X z + c_{n-1} z) + s(X)$$

$$= c_0 X^n + (c_1 - c_0 z) X^{n-1} + \dots + (c_{n-1} - c_{n-2} z) X + (r - c_{n-1} z) \qquad (2.4)$$

Dengan menukarkan X dengan z dalam $v(X)$ maka persamaan 2.4. menjadi

$$f_L(z) = z^n c_0 + z^{n-1}(c_1 - c_0 z) + \dots + z(c_{n-1} - c_{n-2} z) + (r - c_{n-1} z) = s$$

$\square$

Contoh 2.7.

Diberikan $f(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1$ dan $z = 3$, dimana $f(X) \in R[X]$ dan $z \in R$. Akan dicari pembagian $f(X)$ dengan $(X - z)$.

Pembagian $X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1$ dengan $(X - 3)$ yaitu :

3	1	-3	2	4	-1
		3	0	6	30
	1	0	2	10	29

Didapat sisa pembagian f (X) dengan g(X) yaitu 29, sehingga

$X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1 = (X^3 + 2X + 10)(X - 3) + 29$

Jika $f(X) = u(X)\, v(X)$ dalam $R[X]$, maka $u(X)$ disebut faktor kiri (pembagi kiri) dari $f(X)$, sebaliknya $v(X)$ disebut faktor kanan (pembagi kanan) dari $f(X)$. dengan menggunakan terminologi tersebut didapatkan akibat 2.5. untuk teorema 2.4.

Akibat 2.5. (Brown, 1993)

a. $X - z$ merupakan pembagi kanan dari $f(X)$ dalam $R[X]$ jika dan hanya jika $f_R(z) = 0$.

b. $X - z$ merupakan pembagi kiri dari $f(X)$ dalam $R[X]$ jika dan hanya jika $f_L(z) = 0$.

Contoh 2.8.

Diberikan $f(X) = X^3 + 4X^2 - 4X - 1$

Jika diambil $z = 1$ sehingga

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & -4 & -1 \\ & & 1 & 5 & 1 \\ \hline & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

Diperoleh $X - 1$ adalah pembagi (faktor) dari $f(X)$

Pembahasan mengenai matriks invertibel meliputi matriks dengan masukan dari ring komutatif, rank matriks atas ring komutatif, serta sistem persamaan linier homogen. Berikut ini dibahas mengenai matriks dengan masukan dari ring komutatif.

2.7. Matriks dengan Masukan dari Ring Komutatif

Definisi 2.10.

1. Himpunan seluruh $m \times n$ matriks dengan elemen-elemennya dari R dilambangkan dengan $M_{mxn}(R)$. Matriks nol dalam $M_{mxn}(R)$ di lambangkan dengan 0.
2. Jika $A,B \in M_{mxn}(R)$, $[A]_{ij}$ melambangkan masukan ke-i,j dari matriks A.

   a. A + B adalah matriks $m \times n$ yang masukan ke-i,j adalah $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$

   b. Jika $r \in R$, maka rA adalah matriks $m \times n$ yang masukan ke-i,j adalah

   $[rA]_{ij} = r[A]_{ij}$

   c. Jika $A \in M_{mxn}(R)$ dan $A \in M_{nxp}(R)$ perkalian AB dari A dan B didefinisikan sebagai $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kj}$ untuk i = 1, . . . , n dan j = 1, . . . , p

$A \in M_{mxn}(R)$. baris ke-i dari A akan dilambangkan dengan dengan $Row_i(A)$. Kolom ke-j dari A dinotasikan dengan $Col_j(A)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mxn}(R)$$

baris ke-i dari $A \in M_{mxn}(R)$ diformulasikan dengan

$Row_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ untuk i = 1, . . . , m

Kolom ke-j dari $A \in M_{mxn}(R)$ diformulasikan dengan

$$Col_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t \text{ untuk } j = 1, \ldots, n$$

$Row_i(A) \in M_{1 \times n}(R)$ dan $Col_j(A) \in M_{mx1}(R)$ dan $R^m = M_{mx1}(R)$, kolom vektor berukuran n.

Partisi m x n matriks A menjadi m baris vektor:

$$A = \begin{bmatrix} \underline{Row_1(A)} \\ \underline{Row_2(A)} \\ . \\ . \\ . \\ Row_m(A) \end{bmatrix} = (Row_1(A); Row_2(A); ...; Row_m(A))$$

Jika $\lambda_i = Row_i(A)$ untuk i = 1, . . . , m, maka $A = (\lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m)$

Partisi m x n matriks A menjadi n kolom vektor:

$A = (Col_1(A)|Col_2(A)| \ldots | Col_n(A))$

Jika $\delta_j = Col_j(A)$ untuk j = 1 . . . n, maka $A = (\delta_1 \mid \delta_2 \mid ... \mid \delta_n)$

Jika $A \in M_{mxn}(R)$ dan $B \in M_{nxp}(R)$, maka

$AB = (ACol_1(B) \mid ACol_2(B) \mid \ldots \mid Acol_p(A)B)$

Jika $A \in M_{mxn}(R)$ dan $B \in M_{nxp}(R)$, maka

$AB = (Row_1(A)\,B; Row_2(A)B; \ldots; Row_m(A)B)$

Definisi 2.11.

Jika A adalah sembarang matriks m x n, maka **transpos A** dilambangkan dengan $\mathbf{A^t}$ dan didefinisikan matriks n x m yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, dan kolom keduanya adalah baris kedua dari A, dan seterusnya sampai kolom ke-n adalah baris ke-n dari A. Dapat di notasikan $[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$.

Sifat-sifat matriks transpos diberikan pada teorema berikut ini

Teorema 2.6 (Anton, 1997)

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(kA)^t = kA^t$

4. $(AB)^t = B^t A^t$

Contoh 2.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

transpos matriks A dilambangkan dengan A^t merupakan matriks berikut ini

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Definisi 2.12.

1. Jika A adalah matriks yang berukuran n x n ,**minor** masukan a_{ij} dinyatakan dengan $M_{ij}(A)$ dan didefinisikan menjadi determinan submatriks bila baris ke-i dan kolom ke-j dari suatu matriks dihilangkan.

   Misal diberikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ jika baris pertama dan kolom ke-j dihilangkan maka minor matriks dari A adalah:

   $$M_{ij}(A) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Elemen $(-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ disebut **kofaktor** dari A. Kofaktor dari A dilambangkan dengan $\mathrm{cof}_{ij}(A) = C_{ij}(A)$

3. A adalah matriks simetris yang berukuran n x n. **Determinan** dilambangkan dengan det(A). Determinan matriks A dapat dihitung dengan mengalikan masukan-masukan dari suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang di hasilkan, yakni setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

   $\det(A) = a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + \ . \ . \ . + a_{nj}C_{nj}(A)$ (ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j)

   $\det(A) = a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + \ . \ . \ . + a_{in}C_{in}(A)$ (ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i)

Contoh 2.10.

Selanjutnya tentukan minor matriks A, kofaktor matriks A dan determinan matriks A.

Jawab:

1. Minor matriks A pada contoh 2.9 adalah

$$M_{11}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -13 \qquad M_{12}(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10 \qquad M_{13}(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 24$$

$$M_{21}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -13 \qquad M_{22}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \qquad M_{23}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$M_{31}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_{32}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 \qquad M_{33}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

2. Elemen-elemen kofaktor matriks A ditentukan dengan cara berikut:

$$C_{11}(A) = (-1)^{1+1} M_{11}(A) = (1)(-13) = -13$$

$$C_{12}(A) = (-1)^{1+2} M_{12}(A) = (-1)(-10) = 10$$

$C_{13}(A) = (-1)^{1+3} M_{13}(A) = (1)(24) = 24$

$C_{21}(A) = (-1)^{2+1} M_{21}(A) = (-1)(-13) = 13$

$C_{22}(A) = (-1)^{2+2} M_{22}(A) = (1)(-7) = -7$

$C_{23}(A) = (-1)^{2+3} M_{23}(A) = (-1)(9) = -9$

$C_{31}(A) = (-1)^{3+1} M_{31}(A) = (1)(0) = 0$

$C_{32}(A) = (-1)^{3+2} M_{32}(A) = (-1)(-9) = 9$

$C_{33}(A) = (-1)^{3+3} M_{33}(A) = (1)(6) = 6$

Sehingga kofaktor matriks A adalah matriks berikut:

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -13 & 10 & 24 \\ 13 & -7 & -9 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

3. Determinan matriks A dengan melakukan ekspansi pada kolom ke-1

det (A) = a_{11} C_{11} (A) + a_{21} C_{21} (A) + a_{31} C_{31}(A)

= (1)(-13) + (4)(13) + (2)(0)

= 39

Sifat-sifat determinan diberikan dalam teorema berikut ini

Teorema 2.7. (Anton, 1997)

$A \in M_{nxn}(R)$ maka det (A) = det (A^t)

Definisi 2.13.

Adjoin dari matriks A didefinisikan dengan rumus :

$(\text{adj}(A))_{ij} = \text{cof}_{ji}(A)$, untuk setiap i,j = 1,2,…,n

Contoh 2.11.

Adjoin matriks A ditentukan sebagai berikut

$((\mathrm{adj}(A))_{ij} = \mathrm{cof}_{ji}(A)$, ini berarti adjoin matriks A merupakan transpos dari matriks kofaktor A, maka Adjoin matriks A adalah matriks sebagai berikut:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -13 & 13 & 0 \\ 10 & -7 & -9 \\ 24 & -9 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Teorema 2.8. (Anton, 1997)

Untuk sembarang matriks simetris A berukuran n x n

$A\,(\mathrm{adj}\,(A)) = (\mathrm{adj}\,(A))\,A = (\det\,(A))\,I_n$

Contoh 2.12.

Terdapat matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, det (A) = 39

dan

$$A(\mathrm{adj}(A)) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 & 13 & 0 \\ 10 & -7 & -9 \\ 24 & -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix}$$

$$= 39 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 39I$$

Definisi 2.14.

Diberikan $A \in M_{nxn}(R)$. A **invertibel** jika terdapat $B \in M_{nxn}(R)$ suatu matriks berukuran n x n sedemikian hingga

$$AB = BA = I_n.$$

Teorema 2.9. (Brown, 1993)

Diberikan $A \in M_{nxn}(R)$, maka A invertibel jika hanya jika det (A) $\in$ U(R).

Persamaan A(adj(A))= (adj(A))A = det (A).I_n dalam teorema 2.8. dapat digunakan untuk menentukan unit dalam matriks $M_{nxn}(R)$.

Definisi 2.15.

Diberikan R ring komutatif R, $Gl(n,R) = \{A \in M_{nxn}(R) \mid \det(A) \in U(R)\}$ melambangkan himpunan matriks invertibel dalam $M_{nxn}(R)$. Gl(n,R) disebut juga General Linear Grup dari matriks berukuran n x n atas R.

2.8. Rank Matriks atas Ring Komutatif

Definisi 2.16.

1. R adalah ring komutatif. **R-modul** adalah grup abelian (M,+) bersama dengan fungsi $f : R \times M \rightarrow M$ (dimana bayangan dilambangkan dengan f(r,m) = rm), memenuhi kondisi-kondisi berikut:

   $(x + y)m = xm + yn$

   $x(m + n) = xm + xn$

   $(xy)m = x(ym)$

2. $\mathbf{Ann_R(m)} = \{x \in R | xm = 0\}$. Dengan $m \in M$ dan M adalah R-modul.,

   $Ann_R(M) = \{x \in R \mid xm = 0, \text{ untuk setiap } m \in M\}$

3. $\mathbf{I_t(A)}$ melambangkan ideal dalam R dibangun oleh minor t x t dari A.

   Dengan $A \in M_{mxn}(R)$. dan $t = 1, \ldots, r = \min\{m,n\}$.

Contoh 2.13.

1. $R = \mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ adalah ring komutatif.

$M = \mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat), adalah grup abelian $(M,+)$

Suatu fungsi $f : R \times M \to M$ dan bayangan $f(r,m) = rm$, untuk setiap $x,y \in R$ dan setiap $m,n \in M$ berlaku:

$(x + y)m = xm + ym$ (sifat distributif penjumlahan bilangan bulat)

$x(m + n) = xm + xn$ (sifat distributif penjumlahan bilangan bulat)

$(xy)n = x(yn)$ (sifat assosiatif perkalian bilangan bulat)

M memenuhi semua aksioma R-modul. Sehingga M adalah R-modul.

2. M adalah R-modul

$\mathrm{Ann}_R(M) = (0)$

Karena $0 \in R$ berlaku $0.m = 0$, untuk setiap $m \in M$.

3. Misal $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R)$

$$I_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4R, I_1(A) = 2R, I_0 = R$$

Untuk memperoleh $I_t(A)$, pertama-tama menghitung determinan setiap submatriks $t \times t$ dari A, dan dilanjutkan menentukan ideal dari R yang dibangun oleh determinan ini. Sehingga setiap minor $(t + 1) \times (t + 1)$ dari A terdapat dalam $I_t(A)$. Sehingga diperoleh rantai ideal dalam R berikut ini:

$$I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \ldots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq R \qquad (2.5)$$

Perluasan definisi $I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}$ diberikan berikut ini

$$I_t(A) = \begin{cases} (0), t > \min\{m,n\} \\ R, t \leq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

sehingga diperoleh

$$(0) = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq \ldots \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R \quad (2.7)$$

Lemma 2.10.(Brown, 1993)

$B \in M_{mxp}(R)$ dan $C \in M_{pxn}(R)$. maka

$I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}$

Aplikasi dari lemma 2.10. yang penting seperti terdapat pada akibat berikut ini

Akibat 2.11. (Brown, 1993)

$A \in M_{mxn}(R)$, $P \in Gl(m,R)$ dan $Q \in Gl(m,R)$. maka

$I_t(PAQ) = I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbb{Z}$

Selanjutnya diuraikan sifat-sifat rank dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.12.(Brown, 1993)

$A \in M_{mxn}(R)$

a. $0 \leq rk(A) \leq \min\{m,n\}$

b. $rk(A) = rk(A^t)$

c. $rk(A) = rk(PAQ)$ untuk setiap $P \in Gl(m,R)$ dan $Q \in Gl(n,R)$

d. $rk(A) = 0$ jika hanya jika $Ann_R(I_t(A)) \neq (0)$

e. Jika $m = n$, maka $rk(A) < n$ jika hanya jika $\det(A) \in Z(R)$

Contoh 2.14.

$R = \mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R)$$

A merupakan matriks tak nol, dan setiap elemen dalam A merupakan pembagi nol dalam R. $I_2(A) = 4R$, $I_1(A) = 2R$, dan $Ann_R(4R) = 3R \neq 0$, $Ann_R(2R) = 3R \neq 0$. Sehingga oleh teorema 2.12.d mengakibatkan $rk(A) = 0$.

2.9. Sistem Persamaan Linier Homogen

Pada bagian ini diberikan teorema sistem persamaan linier pada ring komutatif R.

$$\begin{aligned} &a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1n}x^n = b_1 \\ &a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + \ldots + a_{2n}x^n = b_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &a_{m1}x^1 + a_{m2}x^2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (2.8)$$

sistim linier pada 2.8 merupakan m persamaan dengan n variabel yang tidak di ketahui. Koefisien a_{ij} dalam persamaan ini merupakan elemen dari R, dan konstanta $b_i, \ldots, b_m$ juga merupakan elemen R. Persamaan 2.9 dapat dinyatakan sebagai berikut

$$AX = B \qquad (2.9)$$

Disini $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}(R)$, $B = (b_1, \ldots, b_m)^t \in R^m$, dan $X = (x_1, \ldots, x_n)^t \in (R[x_1, \ldots, x_n])^n$. $x_1, \ldots, x_n$ merupakan indeterminate dalam R.

Persamaan 2.8(atau 2.9) mempunyai solusi (dalam R^n) jika terdapat vektor $\xi \in R^n$ sedemikian hingga $A\xi = B$. Jika $B = 0$, maka sistem $AX = 0$ disebut sistem persamaan homogen. Suatu sistem persamaan homogen selalu mempunyai paling sedikit satu solusi, misal $\xi = 0 = (0,\ldots,0)^t \in R^n$. Disebut $\xi = 0$ solusi trivial pada $AX = 0$. Suatu vektor $\xi \in R^n$ disebut solusi non trivial untuk $AX = 0$, jika $\xi \neq 0$, dan $A\xi = 0$.

Seperti yang pada teorema berikut

Teorema 2.13.(Brown, 1993)

$A \in M_{mxn}(R)$. Sistem persamaan homogen $AX = 0$ memiliki solusi non-trivial jika hanya jika $rk(A) < n$.

2.10. Polinomial Matriks

Definisi 2.17.

Diberikan $M_{nxn}(R[X])$ himpunan matriks dengan elemen-elemennya polinomial dalam $R[X]$. Misalkan $A \in M_{nxn}(R[X])$ maka untuk setiap $i \neq j = 1,2, \ldots, n$.

$[A]_{ij} = a_0^{(i,j)} X^p + a_1^{(i,j)} X^{p-1} + \ldots + a_{p-1}^{(i,j)} X + a_p^{(i,j)}$ adalah suatu polinomial dalam $R[X]$. Jika $A \neq 0$ dan misalkan p adalah derajat-derajat maksimal dari elemen-elemen yang juga tidak nol di A. Maka berlaku :

$p = \max \{\deg([A]_{ij}) \mid [A]_{ij} \neq 0,\ 1 \leq i, j \leq n\}$

Matriks A dapat ditulis sebagai polynomial matriks dari deg p dalam X, yaitu :

$$A=\begin{bmatrix} a_0^{(1,1)}X^p+\ldots+a_p^{(1,1)} & \ldots & a_0^{(1,n)}X^p+\ldots+a_p^{(1,n)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_0^{(n,1)}X^p+\ldots+a_p^{(n,1)} & \ldots & a_0^{(n,n)}X^p+\ldots+a_p^{(n,n)} \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

$$A=\begin{bmatrix} a_0^{(1,1)} & \ldots & a_0^{(1,n)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_0^{(n,1)} & \ldots & a_0^{(n,n)} \end{bmatrix} X^p + \begin{bmatrix} a_1^{(1,1)} & \ldots & a_1^{(1,n)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_1^{(n,1)} & \ldots & a_1^{(n,n)} \end{bmatrix} X^{p-1} + \ldots + \begin{bmatrix} a_p^{(1,1)} & \ldots & a_p^{(1,n)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_p^{(n,1)} & \ldots & a_p^{(n,n)} \end{bmatrix}$$

Untuk setiap matriks A yang berukuran n x n dengan elemen-elemen yang berasal dari R[X] dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk :

$A = A_0 X^p + A_1 X^{p-1} + \ldots + A_{p-1} X + A_p$ dengan $A_0, A_1, \ldots, A_p \in M_{nxn}(R)$ dan $p = \max \{ \deg([A]_{ij}) \mid [A]_{ij} \neq 0,\ 1 \leq i, j \leq n \}$.

Jika A = 0 maka diambil p = 0.

Contoh 2.15.

Jika $A = \begin{bmatrix} 3X^2+4X+1 & X+2 \\ 1 & X^2-4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(Z[X])$

maka A dapat disajikan dalam bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X^2 + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

maka polinomial matriks A berderajat 2.

Definisi 2.18.

Diberikan $(M_{nxn}(R))[X]$ himpunan polinomial dalam X dengan koefisien dari $M_{nxn}(R)$. Misalkan $f(X), g(X) \in (M_{nxn}(R))[X]$ dengan :

$f(X) = A_0X^p + A_1X^{p-1} + \ldots + A_{p-1}X + A_p$

$g(X) = B_0X^q + B_1X^{q-1} + \dots + B_{q-1}X + B_q$

1. $f(X)$ dan $g(X)$ dikatakan sama jika $p = q$ dan $A_i = B_i$, dengan $i = 0,1,2,\dots,n$.
2. Penjumlahan $f(X) + g(X)$ adalah suatu polinomial dalam X dengan koefisien dari $M_{nxn}(R)$.
3. Perkalian $f(X).g(X)$ adalah suatu polinomial dari deg $(p + q)$.
4. a. Jika X disubstitusikan dengan skalar k maka :

   $f(X)= A_0 k^p + A_1 k^{p-1} + \dots + A_{p-1} k + A_p$

   b.Jika X disubstitusikan dengan matriks C berukuran n x n, dan karena matriks tidak komutatif, maka akan didapat

   $f_R(C) = A_0C^p + A_1C^{p-1} + \dots + A_{p-1}C + A_p$

   $f_L(C) = C^p A_0 + C^{p-1} A_1 + \dots + CA_{p-1} + A_p$

   $f_R(C)$ disebut nilai kanan dan $f_L(C)$ disebut nilai kiri.

Contoh 2.16.

Diberikan $f(X) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X^2 + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Akan dicari nilai kanan dan nilai kiri dari C.

$$f_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 86 & 120 \\ 41 & 52 \end{bmatrix} \text{ adalah nilai kanan dari C}$$

dan nilai kiri dari matriks C adalah :

$$f_L(C) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 & 56 \\ 121 & 52 \end{bmatrix}$$

2.11. Teorema Cayley-Hamilton

Pada bagian ini akan di bahas tentang teorema Cayley-Hamilton, teorema ini memegang peranan penting dalam mengkonstruksi suatu suatu polinomial dari pembagi nol pada matriks atas ring komutatif.

Himpunan matriks yang elemennya berasal dari polinomial disimbolkan dengan $M_{nxn}(R[X])$ sedangkan $(M_{nxn}(R))[X]$ melambangkan himpunan suatu polinomial dengan koefisiennya berupa matriks.

Teorema 2.14. (Brown, 1993)

Ring $M_{nxn}(R[X])$ dan $(M_{nxn}(R))[X]$ isomorfik melalui pemetaan $\psi(A) = \sum_{j=0}^{p} A_j X^{p-j}$ untuk $A \in M_{nxn}(R[X])$.

Isomorfisma $\psi : M_{nxn}(R[X]) \cong (M_{nxn}(R))[X]$ dengan formula :

$\psi(A) = \sum_{j=0}^{p} A_j X^{p-j}$ berguna dalam membuktikan teorema Cayley – Hamilton.

Definisi 2.19.

1. **Trace** dari $A \in M_{nxn}(R)$ adalah penjumlahan elemen-elemen diagonal dalam A, yang dilambangkan dengan $T_r(A)$.

$$T_r(A) = \sum_{j=1}^{n} [a]_{jj}$$

2. Diberikan $A \in M_{nxn}(R)$, $C_A(X)$ adalah **polinomial karakteristik** dari A, dimana $C_A(X) = \det(XI_n - A)$.

$$C_A(X) = \det\left[\begin{bmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \det\begin{bmatrix} X-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X-a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \qquad (2.11)$$

Dalam persamaan 2.11

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{n}[a]_{jj} = -T_r(A) \text{ dan } a_n = (-1)^n \det A$$

$C_A(X)$ adalah polinomial dalam R[X].

Dari uraian diatas dapat dilihat bahwa polinomial karakteristik dari sembarang matriks $A \in M_{nxn}(R)$ selalu monic polynomial dari derajat n dalam R[X]. Dengan kata lain $C_A(X)$ adalah elemen tetap dari R[X] untuk sembarang matriks $A \in M_{nxn}(R)$.

Contoh 2.15.

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_{nxn}(R)$ dengan R ring bilangan bulat. Matriks karakteristik dari A yaitu $(XI_n - A)$

$$(XI_n - A) = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X-1 & -2 & -3 \\ -2 & X-5 & -3 \\ -3 & -4 & X-1 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik A yaitu det $(XI_n - A)$

$$= \det \begin{bmatrix} X-1 & -2 & -3 \\ -2 & X-5 & -3 \\ -3 & -4 & X-1 \end{bmatrix}$$

$$= X^3 - 7X^2 - 14X + 14$$

Teorema 2.15. (Cayley–Hamilton, Brown, 1993)

Diberikan R ring komutatif. Jika $A \in M_{nxn}(R)$ maka $C_A(A) = 0$.

bukti:

Karena $C_A(X) = \det(XI_n - A)$ dan R ring komutatif maka menurut teorema 2.8.

$(XI_n - A)\,\text{adj}\,(XI_n - A) = \text{adj}\,(XI_n - A)(XI_n - A) = (\det((XI_n - A))\, I_n$

$\text{adj}(XI_n - A)(XI_n - A) = C_A(X)\, I_n$ (2.12)

Persamaan (2.12) merupakan pernyataan mengenai matriks dalam $M_{nxn}(R[X])$. Dengan menggunakan lemma isomorfisma $M_{nxn}(R[X])$ terhadap $(M_{nxn}(R))[X]$ melalui pemetaan $\psi(A) = \sum_{j=0}^{p} A_j X^{p-j}$, persamaan (2.12) dapat diinterpretasikan dalam ring polinomial $(M_{nxn}(R))[X]$. Misalkan :

$C_A(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$, dan

$f(X) = X^n + (a_1 I_n) X^{n-1} + \ldots + (a_n I_n) \in (M_{nxn}(R))[X]$.

ψ isomorfisma ring dari $M_{n \times n}(R[X])$ ke $(M_{nxn}(R))[X]$, maka

$$\psi(C_A(X) I_n) = \psi(X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n) I_n$$

$$= X^n I_n + a_1 X^{n-1} I_n + \ldots + a_n I_n$$

$= X^n + (+a_1 I_n) X^{n-1} + \ldots (a_n I_n)$

$= f(X) \in (M_{nxn}(R))[X]$

dan $\psi(XI_n - A) = XI_n - A = (X - A)$ adalah polinomial linear dalam $(M_{nxn}(R))[X]$.

Dengan menggunakan ψ untuk persamaan (2.12)

$\psi(\text{adj}(XI_n - A)(XI_n - A)) = \psi(C_A(X) I_n)$

$\psi(\text{adj}(XI_n - A)(XI_n - A)) = f(X)$

$\text{adj}(XI_n - A)(X - A)) = f(X)$

Sehingga didapat $(X - A)$ adalah pembagi kanan dari $f(X)$ dalam $(M_{nxn}(R))[X]$. Dengan kata lain $f_R(A) = 0$, oleh akibat 2.5, karena

$0 = f_R(A) = A^n + (a_1 I_n) A^{n-1} + \ldots + (a_n I_n) = C_A(A) I_n$

maka $C_A(A) = 0$.

❑

Contoh 2.18.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{nxn}(R)$, dengan R bilangan bulat

$(XI_n - A) = \begin{bmatrix} X-3 & -4 \\ -1 & X-2 \end{bmatrix}$ dan $\text{adj}(XI_2 - A) = \begin{bmatrix} X-2 & 4 \\ 1 & X-3 \end{bmatrix}$

Diperoleh:

$$C_A(X)I_n = (XI_n - A)\text{adj}(XI_n - A) = \begin{bmatrix} X^2 - 5X + 2 & 0 \\ 0 & X^2 - 5X + 2 \end{bmatrix} \in M_{nxn}(R[X])$$

$$C_A(X)I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X^2 + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in (M_{nxn}(R))[X]$$

jika A disubtitusikan terhadap X maka

$$C_A(A) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}-5 & 0\\0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}13 & 20\\5 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-15 & -20\\-5 & -10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Akibat 2.16. (Brown, 1993)

Jika $A \in Gl(n,R)$, maka $A^{-1} = g(A)$ untuk suatu $g(X) \in R[X]$.

Contoh 2.19.

Dari contoh 2.5.2. didapat persamaan polinomial karakteristik

$A^3 - A^2 - 14A - 14I_n = 0$

$14I_n = A(A^2 - A - 14I_n)$

diperoleh : $A^{-1} = \frac{1}{14}(A^2 - A - 14I_n) = g(A)$