BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. Aljabar Matriks dan Vektor Random

Definisi 1

m tupel bilangan riil [x_1 , x_2 , . . . , x_i , . . . , x_m] ditulis dalam satu kolom disebut vektor diberi notasi huruf kecil tebal.

contoh :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Keterangan : Vektor dapat juga ditulis sebagai trasposenya yaitu :

$\mathbf{x}^T = [\ x_1\ ,\ \ x_2\ ,\ \ . . . ,\ \ x_m]$

$\mathbf{a}^T = [1,\ 0\ ,\ 0\ ]$

$\mathbf{b}^T = [1,\ -1,\ \ 1\ ,\ -1]$

$\mathbf{y}^T = [1\ ,\ 2\ ,\ -2]$

Definisi 2

Vektor $\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ . . . + a_k\mathbf{x}_k$ adalah kombinasi linier dari vektor - vektor $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$, . . . , $\mathbf{x}_k$. Himpunan semua kombinasi linier dari $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, . . . , $\mathbf{x}_k$ disebut perluasan linier dari $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, . . . , $\mathbf{x}_k$.

Definisi 3

Himpunan vektor - vektor x_1 , x_2 , . . . , x_k disebut dependen linier bila terdapat k bilangan (a_1 , a_2 , . . . , a_k) tidak semuanya nol sedemikian sehingga $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Apabila tidak, himpunan vektor tersebut disebut independen linier .

Contoh :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Karena $2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$, maka vektor - vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, dan $\mathbf{x}_3$ adalah dependen linier , karena satu diantaranya dapat ditulis sebagai kombinasi linier yang lain .

Contoh : $\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_3$.

Definisi 4

Suatu matriks adalah suatu barisan segiempat dari angka - angka atau unsur - unsur yang diatur dalam baris dan kolom. Secara lebih tepat suatu matriks dari ordo atau dimensi m dengan k (ditulis sebagai m x k) adalah kumpulan dari m x k unsur yang disusun dalam m baris dan k kolom. Jadi dengan menggunakan huruf besar tebal untuk menggambarkan matriks , suatu matriks $\mathbf{A}_{m \times k}$, bisa dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{A} = [\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

dimana a_{ij} adalah unsur yang muncul dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari **A**, $[a_{ij}]$ adalah pernyataan secara ringkas untuk matriks **A** yang unsur khasnya adalah a_{ij}. Ordo atau dimensi dari suatu matriks adalah banyaknya baris dan kolom yang seringkali ditulis dibawah matriksnya untuk memudahkan rujukan.

Definisi 5

Matriks $A_{m \times k}$ dengan elemen - elemennya a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, k$. Transpose dari matriks A, diberi notasi A^T adalah matriks berdimensi k x m dengan elemen - elemennya a_{ji}, $j = 1, 2, \dots, k$ dan $i = 1, 2, \dots, m$. Jadi A^T didapat dari A dengan menukar baris dan kolom.

Definisi 6

Matriks sebarang A dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom disebut matriks bujur sangkar.

Definisi 7

Suatu matriks bujur sangkar dengan sekurang-kurangnya satu unsur tidak nol pada diagonal utama (yaitu diagonal dari sudut atas kiri ke sudut kanan bawah) dan nol untuk semua unsur lainnya disebut matriks diagonal.

Definisi 8

Matriks **A** adalah matriks bujur sangkar dengan dimensi k x k, matriks **A** disebut simetri bila $A = A^T$, yaitu **A** simetri bila $a_{ij} = a_{ji}$ $\quad i = 1, 2, \dots, k$ dan $j = 1, 2, \dots, k$

Contoh :

$$\mathbf{I}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{4x4} = \begin{bmatrix} a & c & e & f \\ c & b & g & d \\ e & g & c & a \\ f & d & a & d \end{bmatrix}$$

Definisi 9

Matriks identitas bertipe k x k adalah matriks bujur sangkar dengan elemen pada diagonal = 1 dan = 0 untuk elemen - elemen yang lain, diberi notasi $\mathbf{I}_{k \times k}$.

Contoh :

$$\mathbf{I}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 10

Hasil kali matriks **AB** , $\mathbf{A}_{m \times n} = [\, a_{ij} \,]$ dan $\mathbf{B}_{n \times k} = [\, b_{ij} \,]$ adalah matriks $\mathbf{C}_{m \times k} = [\, c_{ij} \,]$ dimana

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj}$$

Contoh :

$$\mathbf{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

dimana :

$c_{11} = (3)\,(3) + (-1)\,(6) + (2)\,(4) = 11$

$c_{12} = (3)\,(4) + (-1)\,(-2) + (2)\,(3) = 20$

$c_{21} = (4)\,(3) + (0)\,(6) + (5)\,(4) = 32$

$c_{22} = (4)\,(4) + (0)\,(-2) + (5)\,(3) = 31$

Hasil kali **AB** ada bila banyaknya kolom matriks **A** sama dengan banyaknya baris matriks **B**. Jadi banyaknya baris matriks **AB** sama dengan banyaknya baris matriks **A**, dan banyaknya kolom matriks **AB** sama dengan banyaknya kolom matriks **B**. Perkalian matriks tidak bersifat komutatif **AB** $\neq$ **BA**.

Teorema 1

Diberikan matriks **A dan B** sedemikian sehingga hasil kali matriks tersebut ada, maka:

$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Bukti :

Misalkan $A_{m \times n} = [\, a_{ij} \,]$ dan $B_{n \times p} = [\, b_{ij} \,]$, maka $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [\, c_{ij} \,]$ berdimensi m x p. Akan dibuktikan $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. Pada ruas kiri elemen - elemen baris ke-i kolom ke-j dari **AB** adalah :

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, c_{ij} ini juga merupakan elemen - elemen baris ke-j kolom ke-i dari $(\mathbf{AB})^T$.

Pada ruas kanan elemen - elemen baris ke-j dari $\mathbf{B}^T$ adalah $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$, dan elemen - elemen kolom ke-i dari $\mathbf{A}^T$ adalah $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, maka elemen - elemen baris ke-j kolom ke-i dari $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ adalah :

$b_{1j}\, a_{i1} + b_{2j}\, a_{i2} + \ldots + b_{nj}\, a_{in}$

$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

Jadi $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ ■

Definisi 11

Determinan suatu matriks bujur sangkar $A_{n \times n}$ dinotasikan dengan $|\mathbf{A}|$, yang didefinisikan sebagai :

$$| \mathbf{A} | = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij}$$

Dimana c_{ij} adalah kofaktor pada a_{ij} yang didefinisikan sebagai $(-1)^{i+j}$ kali suatu determinan dari submatriks A yang dibentuk dengan menghapus baris ke-i kolom ke-j . Sedangkan determinan suatu skalar adalah skalar itu sendiri.

contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{maka :} \quad | \mathbf{A} | = 1$$

Definisi 12

Matriks bujur sangkar $\mathbf{A}_{k \times k}$ disebut non-singular bila $\mathbf{A}_{k \times k}\, \mathbf{X}_{k \times 1} = \mathbf{0}_{k \times 1}$, mengakibatkan $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Suatu matriks yang tidak non-singular disebut singular. Matriks bujur sangkar disebut non-singular bila rank matriks sama dengan banyaknya baris (kolom).

Keterangan : apabila suatu matriks mempunyai determinan yang tidak nol, berarti rank matriksnya = k , maka matriks tersebut non-singular, bila determinannya sama dengan nol pasti singular. Matriks yang non-singular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Definisi 13

Jika A adalah sebarang matriks n x n dan c_{ij} adalah kofaktor a_{ij} , maka matriks :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks kofaktor A. Transpose matriks ini dinamakan adjoin A dan dinyatakan dengan adj (A).

Teorema 2

Jika A adalah matriks yang punya invers maka :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

Bukti :

Pertama akan ditunjukkan A adj (A) = det (A) **I.**

Tinjau hasil kali :

$$\mathbf{A} \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{j1} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{j2} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Masukan dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari A adj(A) adalah :

$a_{i1} c_{j1} + a_{i2} c_{j2} + \ldots + a_{in} c_{jn}$. Jika i = j , maka $a_{i1} c_{j1} + a_{i2} c_{j2} + \ldots + a_{in} c_{jn}$ adalah ekspansi kofaktor dari det (A) sepanjang baris ke-i dari A. Sebaliknya jika $i \neq j$, maka koefisien - koefisien a dan kofaktor - kofaktor berasal dari baris - baris A yang berbeda , sehingga $a_{i1} c_{j1} + a_{i2} c_{j2} + \ldots + a_{in} c_{jn} = 0$, maka

$$\mathbf{A} \operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(\mathbf{A}) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(\mathbf{A}) \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A})\,\mathbf{I}$$

karena A punya invers maka det A $\neq 0$ sehingga :

A adj (A) = det (A) I dapat ditulis sebagai:

$$\frac{1}{\det(A)}[A \operatorname{adj}(A)] = I$$

dengan mengalikan kedua ruas dari kiri dengan A^{-1} akan menghasilkan :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

■

Teorema 3

A dan **B** matriks bujur sangkar dengan dimensi sama , invers matriks dibawah ini ada, maka berlaku :

$(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Bukti :

Pandang bentuk :

$B^{-1} A^{-1} A\,B = B^{-1} I\,B = B^{-1} B = I$ dan

$A\,B\,B^{-1} A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$

Jadi jelaslah bahwa $B^{-1}A^{-1}$ adalah invers dari **AB** sehingga berlaku $(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, hal ini dapat diperluas untuk umum yaitu : $(A\,B\,C \ldots Z)^{-1} = Z^{-1} \ldots C^{-1} B^{-1} A^{-1}$. ■

Definisi 14

A adalah matriks m x n dapat ditulis menjadi submatriks.

Contoh :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

Dimana :

$A_{11} = m_1 \times n_1$

$A_{12} = m_1 \times n_2$

$A_{21} = m_2 \times n_1$

$A_{22} = m_2 \times n_2$

$m = m_1 + m_2$ dan $n = n_1 + n_2$

Definisi 15

Jika $\mathbf{A} = [\ a_{ij}\ ]$ matriks bujur sangkar dengan dimensi k x k, maka *trace* dari matriks **A**, ditulis tr(A) adalah jumlah elemen - elemen pada diagonal.

Proposisi 1

Jika **B** adalah matriks dengan dimensi m x k dan **C** adalah matriks dengan dimensi k x m, maka tr (**B C**) = tr (**C B**).

Bukti :

Sesuai dengan definisi perkalian matriks maka **B C** mempunyai $\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, c_{ji}$ pada elemen diagonal ke-i sehingga :

$$\text{tr}\ (\mathbf{B\,C}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, c_{ji}$$

sedangkan **C B** mempunyai $\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\, b_{ij}$ pada elemen diagonal ke-j sehingga :

$$\text{tr}\ (\mathbf{C\,B}) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} c_{ji}\, b_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, c_{ji}$$

maka terbukti bahwa :

$\mathrm{tr}\,(\mathbf{B\,C}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C\,B})$ ∎

Proposisi 2

Jika A matriks simetri dengan dimensi k x k dan x adalah vektor dengan dimensi k x 1 maka $x^T A x = \mathrm{tr}\,(x^T A x) = \mathrm{tr}\,(A x x^T)$.

Bukti :

Karena $\mathbf{x}^T$ A x sama dengan skalar maka $x^T A x = \mathrm{tr}\,(x^T A x)$. Dan selanjutnya berdasarkan proposisi 1, bila $x^T = \mathbf{B}$ dengan m = 1 dan A x = **C**, maka :

$$\mathrm{tr}\,(x^T (A x)) = \mathrm{tr}\,((A x)\,x^T) = \mathrm{tr}\,(A x x^T)$$

∎

Definisi 16

Bentuk kuadrat $\mathbf{x}^T A x$ disebut definit positif jika $x^T A x > 0$ untuk semua $x \neq \mathbf{0}$,sedangkan matriks simetri A disebut matriks definit positif jika $x^T A x$ adalah bentuk kuadrat definit positif. Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Variabel Random, Fungsi Distribusi dan Ekspektasi

Definisi 17

Jika X adalah sebuah variabel random diskrit maka dapat dihubungkan sebuah bilangan $p_x(x_i) = P\,(X = x_i)$ dengan masing - masing hasil x_i dalam R_x untuk i = 1 , 2 , 3 , . . . , n, . . . dimana bilangan $p_X(x_i)$ memenuhi :

1. $p_X(x_i) \geq 0$ untuk seluruh i

2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$

Fungsi p_x disebut fungsi probabilitas dari variabel random.

Definisi 18

Sebuah variabel random X dikatakan kontinu jika terdapat fungsi $f_x(\,.\,)$ sedemikian hingga

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du$$ untuk setiap bilangan riil x.

Definisi 19

Diberikan variabel random X maka rata-rata X ditunjukkan dengan μ_X atau E[X] yang didefinisikan sebagai :

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j \; f_x(x_j)$$ jika X variabel random diskrit.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_x(x)\; dx$$ jika X variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f_X(x)$.

Definisi 20

Diberikan variabel random X , varian X ditunjukkan dengan var[X] didefinisikan sebagai

$$\mathrm{var}[X] = \Sigma_j \,(x_j - \mu_x)^2 \; f_x(x_j)$$ jika X variabel random diskrit

$$\text{var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x)\, dx$$ jika X variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f_X(x)$.

Keterangan :

Sifat - sifat dari varian adalah

(i) var [X+a] = var [X]

(ii) var [bX] = b^2 var [X]

Definisi 21

Jika X variabel random, g(.) adalah sebuah fungsi maka harga ekspektasi g(.) pada variabel random X ditunjukkan dengan E[g(X)] dan didefinisikan sebagai:

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j) f_x(x_j)$$ jika X variabel random diskrit

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x)$$ jika X variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f_X(x)$.

Keterangan :

Sifat - sifat Ekspektasi :

(i) E [c] = c

(ii) E [c g(X)] = c E[g(X)]

(iii) E [c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)] = c_1 E[g_1(X)] + c_2 E[g_2(X)]

Definisi 22

Jika X variabel random dengan fungsi densitas f_X (.) , maka harga ekspektasi exp (tX) didefinisikan sebagai fungsi pembangkit momen x , jika harga ekspektasi itu ada untuk setiap harga t dimana -h < t < h ; h >0 .

Fungsi pembangkit momen ditunjukkan dengan $m_X(t)$ atau $m(t)$. maka :

$$m(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f_X(X)\,dX$$ Jika variabel random X kontinu, dan

$$m(t) = E[e^{tX}] = \sum_{j=1}^{n} e^{tX_j} f_X(X_j)$$ jika variabel random X diskrit.

Jika fungsi pembangkit momen diturunkan r kali terhadap t maka diperoleh :

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{xt} f_X(x)\,dx$$

$$\frac{d^r}{dt^r} m(0) = E[X^r] = \mu_r$$ untuk t mendekati 0 .

Definisi 23

Variabel random dimensi k $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ didefinisikan sebagai variabel kontinu dimensi k jika dan hanya jika terdapat fungsi densitas $f_{X1,X2,\ldots,Xk}(\cdot, \ldots, \cdot) \geq 0$ sedemikian hingga :

$$F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\ldots,X_k}(u_1, \ldots, u_k)\,du_1 \ldots du_k$$

untuk semua $(x_1, x_2, \ldots x_k)$. $f_{X1,X2,\ldots,Xk}(\cdot, \ldots, \cdot)$ didefinisikan sebagai fungsi densitas gabungan .

Definisi 24

Diberikan X dan Y dua variabel random yang didefinisikan dalam ruang probabilitas sama, maka covarian X dan Y ditunjukkan dengan cov[X ,Y] yang didefinisikan sebagai :

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_y)]$$

Definisi 25

Diberikan X_1 , X_2 , . . . , X_n sampel random dari sebuah densitas f(.) , maka didefinisikan

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ adalah rata - rata sampel , dan

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$ adalah varian sampel untuk n > 1

Definisi 26

Dalam kasus vektor densitas gabungan dari [Y , Z] dinotasikan dengan ξ (y , z) ditentukan sebagai berikut :

ξ (y,z) = f [G_1(y,z) ,G_2 (y,z)] . J (y,z)

dimana J (y,z) disebut transformasi jacobian yang diperoleh dengan determinan berikut :

$$J(y, z) = \begin{vmatrix} \partial G_1 / \partial y & \partial G_1 / \partial z \\ \partial G_2 / \partial y & \partial G_2 / \partial z \end{vmatrix}$$

dan densitas Y misalkan g ditentukan dengan :

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(y, z)\, dz$$

2.3. Deret Binomial, Deret Mac Laurin dan Fungsi Gamma

Deret Binomial

Teorema 4

Misalkan n suatu bilangan bulat positif maka untuk setiap nilai x dan y akan diperoleh :

$$(x+y)^n = y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^{n-(n-1)} + \binom{n}{n} x^n \qquad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

dimana $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Bukti :

Digunakan induksi matenatika , untuk n=1 maka :

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = x+y$$

rumus benar untuk n=1.

Andaikan rumus benar untuk n maka akan ditunjukkan rumus benar untuk n+1 yaitu :

$$(x+y)^{n+1} = (y+x)\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right]$$

$$= y\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right] + x\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right]$$

$$= y\left[\binom{n}{0} y^{n} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}\right] + x\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} + \binom{n}{n} x^{n}\right]$$

$$= \binom{n}{0} y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} \qquad (2)$$

Jika pada penjumlahan kedua dari persamaan (2) semua k diganti dengan k-1 maka diperoleh:

$$(x+y)^{n+1} = y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k-1} x^{k} y^{n+1-k} + \binom{n}{n} x^{n+1}$$

$$(x+y)^{n+1} = y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^{k} y^{n+1-k} + x^{n+1}$$

$$= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} x^{k} y^{n+1-k} + x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^{k} y^{n+1-k} \qquad \blacksquare$$

Deret Mac Laurin

Jika suatu fungsi dapat diwakili oleh deret pangkat dalam x , maka deret itu tentu dalam bentuk deret Mac Laurin . Bentuk umum deret Mac Laurin adalah :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^{2} + \ldots \qquad (3)$$

Fungsi Gamma

Definisi 27

Fungsi gamma ditunjukkan dengan $\Gamma(.)$ didefinisikan sebagai :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \qquad \text{untuk } n > 0.$$

Sifat - sifat fungsi Gamma :

(i) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!$

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$

2.4. Distribusi Normal Multivariate dan Distribusi Terkait

2.4.1. Distribusi Normal Multivariate

Definisi 28

Variabel random X didefinisikan berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 jika mempunyai fungsi densitas :

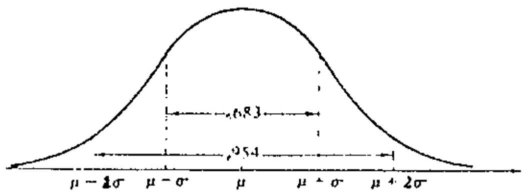
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{dimana} -\infty < x < \infty.$$

Sifat - sifat distribusi normal :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X)\,dX = 1 \qquad \text{dan}$$

$$m_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2) \tag{4}$$

Plot dari fungsi ini merupakan bentuk lonceng seperti tampak pada gambar 2 di bawah ini :



Gambar 2

Densitas normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2

Seperti tampak pada gambar 2 maka :

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}68$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$

Fungsi densitas normal dengan mean μ dan variansi σ^2 ditulis dengan notasi $N(\mu, \sigma^2)$. Natasi ini akan diperluas untuk kasus *multivariate* .

Kuantitas $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$

diperluas untuk vektor x dengan dimensi p ,

menjadi : $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$

dimana $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{x})$

$\Sigma = \text{kov}(\mathbf{x})$, Σ dianggap definit positif .

Supaya volume di bawah luasan $e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$ sama dengan 1,

maka diperlukan konstan $(2\pi)^{-p/2} \, |\Sigma|^{-1/2}$, dengan demikian densitas *multivariate* normal p dimensi untuk vektor random adalah :

$\mathbf{x} = [\, x_1 , \; x_2 , \; \ldots , \; x_p \,]^T$ yang mempunyai bentuk :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)} \qquad -\infty < x_i < \infty$$

$i = 1 , 2 , \ldots , p$ diberi notasi $N_p (\mu , \Sigma)$.

Sekarang akan ditunjukkan bila **X** berdistribusi normal *multivariate* maka kombinasi linier dari komponen - komponen **X** juga berdistribusi normal *multivariate* . Dan dalam hal ini pembuktian teorema dilakukan dengan menggunakan fungsi pembangkit momen.

Teorema 5

Jika **X** berdistribusi $N_p (\mu , \Sigma)$ maka **AX** berdistribusi $N_q (\mathbf{A}\mu , \mathbf{A\Sigma A}^T)$ dimana **A** berdimensi q x p .

Bukti :

X berdistribusi $N_p (\mu , \Sigma)$ berdasarkan persamaan (4) maka :

$$M_X(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{t}^T \mu + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}}$$

$$\begin{aligned} M_{AX}(\mathbf{t}) &= E\left(e^{\mathbf{t}^T A X} \right) \\ &= E\left(e^{(A^T \mathbf{t})^T X} \right) \\ &= M_X (A^T \mathbf{t}) \\ &= e^{(A^T \mathbf{t})^T \mu + \frac{1}{2} (A^T \mathbf{t})^T \Sigma (A^T \mathbf{t})} \\ &= e^{\mathbf{t}^T (A\mu) + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T (A \Sigma A^T) \mathbf{t}} \end{aligned}$$

persamaan tersebut tidak lain adalah merupakan bentuk fungsi pembangkit momen distribusi normal *multivariate* dengan q parameter , dimana rata - ratanya adalah $A\mu$ dan matriks kovariansi $A\Sigma A^T$. Jadi AX berdistribusi $N_q(A\mu, A\Sigma A^T)$. ■

Distribusi sampling dari $\overline{X}$ dan S

Diberikan matriks :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} = [\, X_1 \; X_2 \; \ldots \; X_n \,]$$

Merupakan sampel random dari populasi normal dengan rata -rata μ dan matriks kovariansi Σ . Selanjutnya distribusi sampling $\overline{X}$ dan S dapat ditunjukkan analog dengan kasus *univariate.*

Proposisi 3

Jika X_1 , X_2 , . . . , X_n adalah sampel random dari populasi normal *univariate* dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 maka $\overline{X}$ berdistribusi N (μ , 1/n σ^2).

Bukti :

dibuktikan dengan fungsi pembangkit momen . Jika X berdistribusi normal *univariate* dengan mean μ dan variansi σ^2 berdasarkan persamaan 4 maka :

$$M_{X(t)} = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

sehingga untuk $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari populasi normal *univariate* dengan mean μ dan variansi σ^2

$$M_{x_i}(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \qquad \text{dimana} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$M_{\bar{x}}(t) = M_{\Sigma \frac{x_i}{n}}(t) = \left[M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$$

$$= \left[e^{t\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n^2}} \right]^n = \left[e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n}} \right]$$

Jadi $\bar{X}$ berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 / n ■

Proposisi 4

Jika $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ sampel random dari distribusi normal p *variate* dengan mean $\boldsymbol{\mu}$ dan kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$, maka $\bar{\mathbf{X}}$ berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu}, 1/n\, \boldsymbol{\Sigma})$.

Bukti :

Diberikan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ sampel random dari distribusi normal p *variate* dengan mean $\boldsymbol{\mu}$ dan kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$, maka :

$$M_{\bar{\mathbf{X}}}(\mathbf{t}) = M_{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{X}_i}{n}}(\mathbf{t}) \qquad \text{dimana} \qquad \bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$= \left(M_{\mathbf{X}_i}\left(\frac{\mathbf{t}}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left[e^{t^T \frac{\mu}{n} + \frac{1}{n} \frac{t^T \Sigma t}{n^2}} \right]^n$$

$$M_{X_i}(t) = e^{t^T \mu + ½ t^T \Sigma t}$$

$$= e^{t^T \mu + ½ t^T \frac{\Sigma}{n} t}$$

Jadi $\overline{X}$ berdistribusi normal dengan mean μ dan kovariansi $1/n\ \Sigma$. ■

Teorema 6

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random independen dari distribusi dengan rata - rata μ dan varian $\sigma^2 < \infty$, maka:

$$Y = \frac{Z - n\,E[\,X\,]}{\sqrt{n}\ \sigma} \tag{5}$$

berdistribusi mendekati distribusi normal standar untuk n mendekati tak terhingga, dimana :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Bukti :

Diketahui X_i independen maka fungsi pembangkit momen Z dapat ditunjukkan sebagai perkalian dari fungsi pembangkit momen X_i , i = 1 , 2 , . . . , n sehingga:

$M_Z(t) = [\,M_X(t)\,]^n$

dimana $M_{X_i}(t) = M_X(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Selanjutnya diberikan $Y = aZ + b$ (6)

maka fungsi pembangkit momen untuk Y adalah :

$$M_Y(t) = E[\exp(Yt)]$$
$$= E[\exp(aZt + bt)]$$
$$= \exp(bt)\, M_Z(at)$$

dari persamaan (5) dan (6) maka diperoleh :

$$a = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \quad \text{dan} \quad b = \frac{-\sqrt{n}\,E[X]}{\sqrt{n}\sigma}$$

sehingga fungsi pembangkit momen untuk Y adalah :

$$M_{Y(t)} = \exp\left(\frac{-\sqrt{n}\,E[X]\,t}{\sigma}\right) M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$M_{Y(t)} = \exp\left(\frac{-E[X]\,t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n$$

Selanjutnya jika $\exp\left(\frac{-E[X]\,t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ dan $M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$

diekspansikan dengan deret Mac laurin pada t = 0 maka diperoleh :

$$\exp\left(\frac{-E[X]\,t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{E[X]}{\sigma}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{E^2[X]}{2\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots$$

$$M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = E\left[1 + \frac{tX}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(tX)^2}{2!\,n\sigma^2} + \frac{(tX)^3}{3!\,(\sqrt{n}\sigma)^3} + \ldots\right]$$

$$= 1 + \frac{E[X]}{\sigma}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{E[X^2]}{2\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots$$

dari hasil ekspansi tersebut maka :

$$M_Y(t) = \left[1 - \frac{E[X]}{\sigma}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{E^2[X]}{2\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots\right]^n \cdot$$

$$\left[1 + \frac{E[X]}{\sigma}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{E[X^2]}{2\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{E[X^2] - E^2[X]}{2\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots\right]^n$$

$$\cong \left|1 + \frac{t^2}{2n}\right|^n$$

untuk $t \to 0$ atau $n \to \infty$

Diketahui $\lim\limits_{n \to \infty}\left[1 + \frac{X}{n}\right]^n = e^x$

maka : $\lim\limits_{n \to \infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n}\right]^n = e^{t^2/2}$

sehingga sesuai dengan sifat distribusi normal, maka bentuk tersebut tidak lain adalah berdistribusi normal standar.

2.4.2. Distribusi terkait

2.4.2.1. Distribusi Gamma

Definisi 29

Jika X variabel random dengan fungsi densitas :

$$f_X(x; r, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda\ x)^{r-1}\ e^{-\lambda x}\ I_{(0,\infty)}\ (x)$$

dimana $r > 0$ dan $\lambda > 0$ maka x didefinisikan mempunyai distribusi gamma .

Teorema 7

Jika X berdistribusi gamma dengan parameter r dan λ maka :

(i) $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$

(ii) $E[x] = r/\lambda$ dan (iii) $\mathrm{var}[x] = r/\lambda^2$ untuk $t<\lambda$

Bukti :

$M_X(t) = E[\exp(tx)]$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\ e^{tx}\ x^{r-1}\ e^{-\lambda x}\ dx$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r \int_0^\infty \frac{(\lambda - t)^r}{\Gamma(r)}\ x^{r-1}\ e^{-(\lambda - t)x}\ dx$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$ sehingga :

$$M'_X(t) = r\ \lambda^r\ (\lambda - t)^{-r-1}$$

$$M''_X(t) = r\ (r+1)\ \lambda^r\ (\lambda - t)^{-r-2}$$

$$E[X] = M'_x(0) = \frac{r}{\lambda}$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$= M''_x(0) - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 = \frac{r}{\lambda^2}$$

■

2.4.2.2. Distribusi Chi-kuadrat

Definisi 30

Jika X variabel random dengan fungsi densitas :

$$f_X(X) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} X^{k/2-1} e^{-X/2} I_{(0,\infty)}(X)$$

maka X didefinisikan mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas k.

Γ(.) adalah fungsi Gamma dengan Γ(n) = (n - 1) ! dan mempunyai sifat Γ(n) = (n - 1) Γ(n - 1) dengan parameter k/2 dan $\frac{1}{2}$ sehingga variabel random X mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan :

E [X] = k

Var [X] = 2 k , dan fungsi karakteristik :

$$\phi(X) = \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{k/2} \qquad , \quad t < ½$$

Teorema 8

Jika X_i , i = 1 , 2 , 3, . . . , k berdistribusi normal independen dengan rata - rata μ_i dan varian σ_i , maka :

$$U = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas k.

Bukti :

Diberikan $Z_i = (X_i - \mu_i) / \sigma_i$ adalah variabel random independen dan berdistribusi normal standar dengan i = 1 , 2 , 3 , . . . , k. Maka

$$\begin{aligned} M_U(t) &= E[\exp(tU)] \\ &= E[\exp(t \Sigma Z_i^2)] \\ &= E[\prod_{i=1}^{k} \exp(t Z_i^2)] \\ &= \prod_{i=1}^{k} E[\exp(t Z_i^2)] \end{aligned}$$

Karena :

$$\begin{aligned} E[\exp(t Z^2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tZ^2) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp(-½ Z^2) \, dZ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-½ (1-2t) Z^2) \, dZ \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(1-2t)Z^2\right) dZ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \qquad \text{untuk} \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

Maka :

$$\prod_{i=1}^{k} E\left[\exp(tZ_i^2)\right] = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{k/2} \qquad \text{untuk} \qquad t < \tfrac{1}{2}$$

Bentuk ini tidak lain adalah fungsi karakteristik dari distribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas k. Maka U berdistribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas k ditulis χ^2_k . ∎

Akibatnya :

Jika X_1 , X_2, . . . , X_n adalah sampel random dari distribusi normal dengan rata - rata μ dan varian σ^2 maka :

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

berdistribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas n (7)

Proposisi 5

Jika X_1 , X_2, . . . , X_n adalah sebuah sampel random dari satu populasi normal dengan rata - rata μ dan varian σ^2 maka (n - 1) s^2 / σ^2 beridistribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas n - 1.

Bukti :

Diberikan :
$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})}{\sigma^2} \qquad (8)$$

Jika $\overline{X}$ dalam persamaan (8) diganti dengan μ, maka

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$ dan menurut persamaan (7)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$ berdistribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas n.

Jika:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(X_i-\overline{X}) + (\overline{X}-\mu)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (\overline{X}-\mu)^2 + 2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2 + 2(\overline{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\overline{X}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2 + 2(\overline{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2$$ maka

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$ atau

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} + \frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} \qquad (9)$$

Karena $\overline{X}$ berdistribusi normal dengan rata - rata μ dan varian σ^2/n maka kuantitas $(\overline{X} - \mu)^2 / \{\sigma^2 / n\}$ berdasarkan persamaan (7) berdistribusi χ^2_1, dan jelaslah bahwa $(n - 1)\, s^2 / \sigma^2$ dalam persamaan (9) berdistribusi Chi-kuadrat dengan χ^2_{n-1}.

Selain itu dapat pula dikatakan bahwa $(n - 1)\, s^2$ dalam persamaan (9) berdistribusi identik dengan $\sigma^2 (Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_{n-1}^2)$ sehingga dapat ditulis:

$$(n - 1)\, s^2 = (\sigma Z_1)^2 + (\sigma Z_2)^2 + \ldots + (\sigma Z_{n-1})^2 \qquad (10)$$

dimana σZ_i berdistribusi $N(0, \sigma^2)$ dengan $Z_i = (X_i - \mu) / \sigma$.

2.4.2.3. Distribusi t

Definisi 31

Jika X variabel random dengan fungsi densitas :

$$f(X) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{(1+X^2/k)^{(k+1)/2}}$$

maka X didefinisikan berdistribusi t dengan derajat bebas k .

Teorema 9

Jika Z berdistribusi normal standar dan U berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat bebas k , dan jika Z dan U independen maka $Z/\sqrt{(U/k)}$ berdistribusi t dengan derajat bebas k.

Bukti :

Pandang X = Z / √(U/k), karena Z dan U independen maka fungsi densitas gabungannya adalah :

$$f_{Z,U}(Z,U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} U^{(k/2)-1}\, e^{-\frac{1}{2}U}\, e^{-\frac{1}{2}Z^2}\, I_{(0,\infty)}(U)$$

Selanjutnya dibuat transformasi X= Z /√ (U/k) dan Y=U maka berdasarkan definisi 26 diperoleh Jacobian √ (y/k) sehingga :

$$f_{X,Y}(x\ ,y\ ) = \sqrt{y/k}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} y^{(k/2)-1}\, e^{-\frac{1}{2}y}\, e^{-\frac{1}{2}X^2\, y/k}\, I_{(0,\infty)}(y\ )$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2}\int_0^{\infty} y^{(k/2)-1+\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}(1+X^2/k)\,y}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)}\,\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\,\frac{1}{(1+X^2/k)^{(k+1)/2}} \qquad (11)$$

Sesuai dengan definisi 31 maka persamaan (11) berdistribusi t dengan derajat bebas k. ■

Proposisi 6

Jika X_1 , X_2 , . . . ,X_n adalah sampel random dari distribusi normal , dan misalkan $\overline{X}$ dan S^2 menunjukkan rata-rata sampel dan varian maka :

$$\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \quad \text{berdistribusi t dengan derajat bebas n-1} \qquad (12)$$

Bukti :

Jika pembilang dan penyebut dalam persamaan (12) dibagi dengan σ , maka diperoleh :

$$\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}}{S/(\sigma\sqrt{n})} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}$$

Karena $(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ berdasarkan teorema 6 berdistribusi N (0 , 1) dan S^2/σ^2 berdasarkan proposisi 5 berdistribusi χ^2_{n-1} / (n-1) sehingga sesuai dengan teorema 9 maka:

$\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ berdistribusi t dengan derajat bebas n-1 ■

proposisi 7

Jika $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ adalah rata-rata sampel , S_1^2 dan S_2^2 adalah varian sampel maka:

$$t = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \tag{13}$$

berdistribusi t dengan derajat bebas $n_1 + n_2 - 2$.

dimana S_p adalah varian gabungan yang didefinisikan sebagai :

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \tag{14}$$

Bukti :

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\dfrac{1}{\sigma} \sqrt{\dfrac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

Karena berdasarkan teorema 6 $\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

berdistribusi normal standar, dan

$\dfrac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2 + \sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{\sigma^2}$ berdistribusi Chi-Kuadrat,

maka sesuai dengan teorema 9

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

berdistribusi t dengan derajat bebas $n_1 + n_2 - 2$ ■

2.4.2.4. Distribusi F

Definisi 32

Jika X Variabel random dengan fungsi densitas :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

maka X didefinisikan berdistribusi F dengan derajat bebas m dan n.

Teorema 10

Diberikan U variabel random berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat bebas m dan V variabel random berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat bebas n, U dan V independen maka variabel random

$X = \dfrac{U/m}{V/n}$ berdistribusi F dengan derajat bebas m dan n.

Bukti :

Karena U dan V independen berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat bebas m dan n maka berdasarkan definisi 26 dan 30 maka fungsi densitas gabungannya adalah :

$$= \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\,2^{(m+n)/2}}\, u^{(m-2)/2} v^{(n-2)/2} e^{-\frac{1}{2}(u+v)} I_{(0,\infty)}(u)\, I_{(0,\infty)}(v)$$

Untuk mendapatkan distribusi X maka dilakukan transformasi X=(U/m)/(V/n) dan Y =V , dan Jacobiannya adalah (m/n)y , sehingga :

$$f(x,y) = \left(\frac{m}{n}\right)y\,\frac{1}{\Gamma(m/2)\;\Gamma(n/2)\,2^{(m+n)/2}}\left(\frac{m}{n}xy\right)^{(m-2)/2} y^{(n-2)/2} e^{-\frac{1}{2}[(m/n)xy+y]}\,dy$$

dan

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m/2)\;\Gamma(n/2)\,2^{(m+n)/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{(m-2)/2}\int_0^\infty y^{(m+n-2)/2} e^{-\frac{1}{2}[(m/n)x+1)]y}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}}\,I_{(0,\infty)}(x)$$

Sesuai dengan definisi 32 maka X berdistribusi F dengan derajat bebas m dan n. ■