BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam Bab II ini akan dibahas definisi-definisi Teori Grup, Gelanggang, Ideal, Modul dan Sub modul yang merupakan materi dasar dari Tugas Akhir ini.

2.1. Teori Grup

Definisi 1

Himpunan $G = \{a, b, c, \ldots\}$ disebut grup jika memenuhi sifat-sifat dibawah ini :

1). Tertutup, untuk setiap pasangan anggota-anggota a dan b dapat ditemukan dengan tunggal satu elemen c dalam G sedemikian sehingga $a * b = c$.

$$(\forall a, b \in G)(\exists ! c \in G)\ a * b = c.$$

2). Assosiatif, untuk setiap a, b, c dalam G berlakulah $(a * b) * c = a * (b * c)$

$$(\forall a, b, c \in G)\ (a * b) * c = a * (b * c)$$

3). Mempunyai elemen netral, yaitu ada elemen e dalam G sedemikian sehingga untuk setiap a dalam G berlaku

$e*a = a*e = a$

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G)\ e*a = a*e = a$$

4). Setiap elemen mempunyai invers, yaitu untuk setiap a dalam G dapat ditemukan a^{-1} dalam G sedemikian hingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

$$(\forall a \in G) (\exists a^{-1} \in G) a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

Apabila masih dipenuhi sifat :

5). Komutatif, yaitu untuk setiap pasangan a,b dalam G berlaku ab = ba. Dengan simbol $(\forall a,b \in G)\ a*b = b*a$ maka grupnya disebut *grup komutatif* atau *grup abelian*

Jika diambil G = R = himpunan bilangan riil dan operasi * adalah + maka aksioma diatas menjadi sebagai berikut :

1. Tertutup, $(\forall a, b \in G) (\exists ! c \in G)\ a + b = c$
2. Assosiatif, $(\forall a, b, c \in G)\ (a + b) + c = a+(b+c)$.
3. Ada elemen netral 0 sedemikian hingga,

$$(\forall 0 \in G) (\forall a \in G)\ 0+a = a+0 = a$$

4. Setiap elemen mempunyai invers, a mempunyai invers -a sedemikian hingga

$$(\forall a \in G) (\exists -a \in G)\ a+(-a) = -a+a = 0$$

Jika operasi * adalah . maka aksioma grup menjadi sebagai berikut :

1. Tertutup, $(\forall a,b \in G) (\exists ! c \in G)\ a.b = c$
2. Assosiatif, $(\forall a,b,c \in G)\ (a.b).c = a.(b.c)$.
3. Mempunyai elemen satuan,

$$(\exists e \in G) (\forall a \in G)\ e.a = a.e=a.$$

4. Ada invers untuk setiap elemen,

$$(\forall a \in G) (\exists a^{-1} \in G)\ a^{-1}.a = a.a^{-1} = e.$$

2.2. GELANGGANG (RING)

Dalam teori grup telah dibahas suatu struktur aljabar dengan satu hukum komposisi. Dan sekarang akan dibahas suatu sistim dengan dua hukum komposisi.

Definisi 2.

Suatu gelanggang ialah suatu himpunan R yang tidak kosong beserta dua hukum komposisi yang disajikan dengan tanda jumlahan dan tanda pergandaan dan yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

I. R merupakan grup abelian terhadap jumlahan, yaitu : tertutup, assositif, didalam R terdapat elemen netral 0, setiap elemen mempunyai invers dan komutatif (lihat aksioma grup.).

II. Terhadap pergandaan mempunyai sifat-sifat : tertutup dan assosiatif.

III. Kedua aturan komposisi diatas dihubungkan dengan aksioma distributivitas, yaitu

$$(\forall\ a,\ b,\ c \in R)\ a\ (b + c) = ab + ac$$

$$(\forall\ a,\ b,\ c \in R)\ (b + c)\ a = ba + ca$$

2.3. Klasifikasi Gelanggang

Ada beberapa bentuk khusus dari gelanggang dimana tiap-tiap bentuk mempunyai sifat-sifat tertentu selain dari sifat-sifat gelanggang yang telah ada.

Gelanggang dapat diklasifikasikan sebagai berikut:

1. Gelanggng komutatif.
2. Gelangang dengan elemen satuan
3. Gelanggang pembagi.
4. Lapangan.
5. Daerah integral.

Definisi 3

Jika (R +, .) adalah gelangang, maka R disebut *gelanggang komutatif*, jika ab =ba untuk setiap a, b $\in$ R.

Contoh 1.

Himpunan bilangan genap (0, ±2, ±4 , ...) adalah gelanggang komutatif.

Definisi 4

Jika (R, +, .) adalah gelanggang, maka R disebut *gelanggang dengan elemen satuan*, jika terdapat elemen e $\in$ R sedemikian hingga ae = ea= a untuk setiap a$\in$ R.Dan e disebut *elemen satuan kanan/kiri* dari R. Jika ab = e ; a$\in$R b $\in$ R maka b disebut invers kanan dari a dan a disebut *invers* kiri dari b. Jika elemen a dari R adalah *invers* kanan b dan invers kiri c maka b = c dan a dikatakan mempunyai invers

Contoh 2.

Himpunan bilangan bulat (0, ±1, ±2, ...) adalah gelanggang dengan elemen satuan.

Definisi 5

Elemen a disebut *pembagi nol* (divizor of zero) dalam gelanggang R jika dan hanya jika terdapatlah elemen $b \neq 0$ sedemikian hingga $ab = ba = 0$.

(i). $(\exists\, b)\,\{\, b \in R \;\&\; b \neq 0 \;\&\; ab = 0 \,\}$ a adalah pembagi nol kiri.

(i). $(\exists\, b)\,\{\, b \in R \;\&\; b \neq 0 \;\&\; ba = 0 \,\}$ a adalah pembagi nol kanan.

Elemen a disebut *pembagi nol sejati* (proper divizor of zero) jika dan hanya jika a adalah pembagi nol dan $a \neq 0$ ($a \neq 0$ & $b \neq 0$ & $ab = 0$).

Definisi 6

Bila a bukan pembagi nol kiri, maka berlaku $ax = ay \longrightarrow x = y$. Bila a bukan pembagi nol kanan, maka berlaku $xa = ya \longrightarrow x = y$. Dan hal ini dikatakan memenuhi *hukum kansellasi* (penghapusan).

Definisi 7

Suatu gelanggang R yang tidak nol disebut *gelanggang pembagi* jika himpunan $R^* = R - \{ 0 \}$terdiri dari elemen-elemen yang $\neq$ 0 merupakan grup terhadap penggandaan.

Definisi 8

Bila gelanggang R memenuhi aksioma

- ada elemen satuan e,
- komutatif dan
- setiap elemen a $\neq$ 0 mempunyai invers terhadap pergandaan.

Maka gelanggang R disebut R *Lapangan* (Field). Suatu gelanggang pembagi yang komutatif juga disebut *Lapangan.*

Definisi 9

Apabila gelanggang R memenuhi aksioma :

- ada elemen satuan,
- komutatif dan
- tidak mempunyai pembagi nol sejati,

maka gelanggang R disebut *Daerah Integral (integral domain).*

Contoh 3.

Jika diambil a,b adalah bilangan bulat, maka :

$R = \{ a + b\sqrt{2} \mid a,b = \text{bilangan bulat} \}$ adalah merupakan lapangan.

Karena R adalah himpunan bagian dari bilangan - bilangan riil yang didefinisikan terhadap jumlahan dan pergandaan didalam R, maka (R,+,.) adalah gelanggang komutatif.

Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa $R^* = R-\{0\}$ mempunyai elemen satuan.

Demikian juga untuk membuktikan bahwa setiap elemen yang tidak sama dengan nol mempunyai invers.

Dengan demikian terbukti (R,+,) adalah lapangan.

2.4. Gelanggang Bagian (Subring)

Definisi 10

Suatu himpunan bagian S yang tidak kosong dari gelanggang R disebut suatu *gelanggang bagian* jika S adalah gelanggang pula dengan aturan komposisi yang sama.

Jadi ($\{S,+,.\} \subseteq \{R,+,.\}$)

Himpunan bagian S dari gelanggang R disebut *gelanggang bagian* jika dan hanya jika

a) $a-b \in S$ dimana $a\in S$, $b\in S$

b) $a.b \in S$ dimana $a\in S, b\in S$

Gelanggang bagian {0}, {R} disebut *gelanggang bagian* *tidak sejati* (improper) sedangkan gelanggang bagian yang selain itu disebut *gelanggang bagian sejati.*

Contoh 4.

Diketahui R = {0, ±1, ±2, ...} maka R' = {0, ±2, ±4,...} adalah suatu gelanggang bagian dari R terhadap jumlahan dan pergandaan..

2.5. Gelanggang Suku Banyak (Ring Polynomial)

Definisi 11.

Misal R gelanggang. Suatu sukubanyak f(x) dengan koefisien di dalam R adalah jumlahan tak berhingga

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots.. + a_n x^n + \ldots\ldots$$

dimana $a_i \in R$ dan $a_i = 0$ untuk semuanya selain bilangan berhingga dari nilai i. a_i adalah koefisien dari f(x). Jika i>0 maka $a_i \neq 0$. Dengan demikian nilai terbesar dari i adalah merupakan derajat dari f(x). Jika tidak demikian, ada i >0) maka f(x) adalah berderajat 0. Dan disebut *sukubanyak nol.*

Jadi $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots.. + a_n x^n + \ldots..$dimana $a_i = 0$ untuk i > 0.

Jumlahan dan pergandaan dari sukubanyak dengan koefisien dalam gelanggang R didefinisikan sebagai berikut :

Jika $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$

untuk i = 0,....., n dan

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_n x^n + \ldots\ldots$$

untuk j = 0,....., n

Maka untuk jumlahan sukubanyak :

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots\ldots + c_n x^n + \ldots\ldots$$

dimana $c_n = a_n + b_n$, dan untuk pergandaan sukubanyak :

$$f(x)\ g(x) = d_0 + d_1 x + \ldots\ldots + d_n x^n + \ldots\ldots$$

dimana

$$d_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i}$$

himpunan sukubanyak di atas ditulis dengan simbol R[x]

2.6. IDEAL

Definisi 12

Suatu gelanggang bagian I dari gelanggang R disebut *ideal* dari R jika :

1. $x, y \in I \rightarrow x - y \in I$

2. $x \in I$ dan $r \in R \rightarrow x\,r \in I$ dan $r\,x \in I$

Dan ditulis $I \angle R$.

Setiap ideal adalah merupakan gelanggang bagian, tetapi gelanggang bagian belum tentu merupakan ideal.

Contoh 5.

Diketahui Q adalah himpunan bilangan riil, merupakan gelanggang dan Z himpunan bilangan bulat adalah gelanggang bagian dari k tetapi bukan ideal didalam k. Sebab misal $1/2 \in k$, $1 \in Z$ tetapi $1/2 \,.\, 1 \notin Z$

Contoh 6.

Himpunan bagian dari R yang terdiri atas elemen 0 saja yaitu {0}. Dan disebut *ideal nol*. R sendiri merupakan suatu ideal disebut *ideal satuan*. Ideal nol dan ideal R merupakan ideal R yang disebut *trivial ideal (ideal tak sejati)*. Sedangkan bila ada ideal selain {0} dan R. sendiri disebut *ideal sejati*.

Definisi 13

Diberikan R gelanggang. Ideal $I \angle R$ dikatakan *dibangun secara berhingga* jika I dapat dibangun berhingga oleh elemen - elemen $a_1, a_2, ..a_n \in R$ sedemikian sehingga $I = (a_1, a_2, ..a_n)$.

Definisi 14

Ideal $I \angle R$ dikatakan *ideal utama* jika idealnya dibangun oleh satu elemen. Sebagai contohnya (a) adalah ideal yang dibangun oleh satu elemen yaitu a.

2.6.1. IDEAL MAKSIMAL

Definisi 15

Misal R gelanggang, Ideal $I \neq R$ dari R disebut *ideal maksimal* bila dan hanya bila jika $J \angle R$ maka $J = I$ atau $J = R$.

Theorama 1.

Misalkan R suatu gelanggang dan $I \neq R$ ideal R maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. I ideal maksimal.
2. gelanggang kuosen R/I tidak mempunyai ideal sejati.
3. Jika ada elemen $x \in R$, $x \notin I$ maka $I + (x) = R$.

Akan dibuktikan :

a) (i) $\longrightarrow$ (ii)

Jika I ideal maksimal maka gelanggang kuosen R/I tidak memunyai ideal sejati.

Bukti :

Ideal didalam R/I adalah berbentuk J/I dimana J adalah ideal didalam R yang memuat I. Jika $J/I \neq 0$ maka $J \neq I$. Karena I ideal maksimal maka J = R Sehingga ideal-ideal R/I adalah R/I sendiri dan ideal nol.

Terbukti.

b) (ii) $\longrightarrow$ (iii)

Jika gelanggang kuosen R/I tidak mempunyai ideal sejati dan terdapat elemen $x \in R$, $x \notin I$ maka I + (x) = R.

Bukti :

Ambil $x \in R$ dan $x \notin I$. maka I + (x) adalah ideal dari R yang memuat I. Maka I + (x)/I adalah tanpa ideal nol didalam R/I. Sehingga I + (x) = R.

Terbukti.

c) (iii) $\longrightarrow$ (i)

Jika terdapat elemen $x \in R$, $x \notin I$ dan I + (x) = R maka I adalah ideal maksimal.

Bukti :

Misal $J \supset I$. Jika $J \neq I$ ambil suatu elemen $x \in J$, $x \notin I$. Karena jika ada elemen $x \in R$. $x \notin I$ maka $I + (x) = R$. Berarti $J \supset I + (x) = R$. Dengan demikian $J = R$ berarti I ideal maksimal.

Terbukti.

Definisi 16

Syarat rangkaian naik berlaku dalam gelanggang R jika dan hanya jika setiap deretan naik terdiri dari idela-ideal :

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq$ ....

pasti dapat ditemukan suatu bilangan bulat positif m sedemikian sehingga untuk $n \geq m$ berlaku $A_n = A_m$.

2.6.2. IDEAL PRIMA

Definisi 17

Misalkan R gelanggang komulatif dan $I \neq R$ ideal R, I *ideal prima* bila dan hanya bila jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$

Contoh 7.

Misalkan R gelanggang komutatif. Ideal {0} *ideal prima* jika dan hanya jika R tidak mempunyai pembagi nol sejati.

Teorema 2.

Jika R gelanggang dengan elemen satuan maka setiap ideal maksimal adalah ideal prima.

Bukti :

Ambil I ideal maksimal dan A, B ideal-ideal didalam R. Sedemikian sehingga $AB \subseteq I$. Misal $A \not\subseteq I$ maka $A + I = R$

$e = a + m$, $a \in A$, $m \in I$.

Ambil $b \in B$, maka $b = ab + mb \subseteq AB + I \subseteq I$. Sehingga

$B \subseteq I$. Karena $AB \subseteq I$ dan $A \not\subseteq I \longrightarrow B \subseteq I$.

Terbukti I adalah ideal prima.

Theorema 2 tidak berlaku sebaliknya, berikut ini contoh bahwa tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 8.

Gelanggang dari bilangan-bilangan bulat mempunyai ideal (0) yang merupakan ideal prima, tetapi ideal ini bukan merupakan ideal maksimal.

2.7. MODUL

Pandang abelian group M dan gelanggang R. Dalam hal ini R selalu mempunyai elemen satuan yang disajikan dengan e atau 1, tetapi R tidak perlu komutatif dan apabila R diambil komutatif maka setiap kali akan dinyatakan secara eksplisit.

Definisi 18

Abelian group M disebut modul kiri atas R bhb untuk setiap $r \in R$ dan $x \in M$ maka $rx \in M$ dan memenuhi syarat-syarat berikut :

i. $r(x + y) = rx + ry$

ii. $(r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x$

iii. $(r_1r_2)x = r_1(r_2x)$

iv. $1.x = x$

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $x, y \in M$

Sedangkan untuk modul kanan berlaku $xr \in M$ dan memenuhi syarat-syarat berikut :

i. $(x + y)r = xr + yr$

ii. $x(r_1 + r_2) = xr_1 + xr_2$

iii. $x(r_1r_2) = (xr_1)r_2$

iv. $x.1. = x$

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $x, y \in M$

Disini R mempunyai elemen satuan maka disebut *unitary modul* atau *modul unitair* dan apabila R tidak mempunyai elemen satuan maka dengan sendirinya 4 tidak disyaratkan. Dalam pembicaraan ini dibahas modul unitair dan untuk selanjutnya yang dimaksud dengan modul adalah modul kiri.

Contoh 9.

Apabila R(x) suatu himpunan polynomial-polynomial berderajat 7 dalam variabel x atas gelanggang R dari himpunan bilangan-bilangan bulat dan yang diberikan definisi :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_7 x^7$$
$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots + b_7 x^7$$
$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\ldots + c_7 x^7$$
$$r \,.\, p(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \ldots\ldots + d_7 x^7$$

dimana : $p(x), q(x) \in R(x)$: $r, a_i, b_i \in R$

$$c_i = a_i + b_i \ ; \ d_i = r.a_i \ ; \ 0 \le i \le 7$$

maka R(x) merupakan suatu modul atas R

Misalkan ambil p(x), q(x) ∈ R(x) dan 3,4 ∈ R yaitu :

$$p(x) = 1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7$$
$$q(x) = 3 - 2x + 2x^2 - x^3 - 3x^4 + 2x^6 - 4x^7$$

Maka :

1) $p(x).(3+4) = p(x).7$

$= (1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7).7$

$= 7 + 14x - 7x^2 - 14x^3 + 7x^4 - 21x^5 + 7x^7$

$\in R(x)$

Sedang

2) $p(x).3 + p(x).4$

$= (1 + 2x + - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7).3 +$

$(1 + 2x + - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7).4$

$= (3 + 6x - 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 9x^5 + 3x^7$

$(4 + 8x - 4x^2 - 8x^3 + 4x^4 - 12x^5 + 4x^7$

$= 7 + 14x - 7x^2 - 14x^3 + 7x^4 - 21x^5 + 7x^7$

$\in R(x)$

Dari (1) dan (2) terlihatlah bahwa :

$p(x).(3+4) = p(x).3 + p(x).4$

Juga

3) $\{p(x) + q(x)\}.3$

$= (4 + x^2 - 3x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 3x^7).3$

$= 12 + 3x^2 - 9x^3 - 6x^4 - 9x^5 + 6x^6 - 9x^7$

$\in R(x)$

Sedang

4) $p(x).3 + q(x).3$

$= (1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7).3$

$(3 - 2x + 2x^2 - x^3 - 3x^4 + 2x^6 - 4x^7).3$

$= 3 + 6x - 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 9x^5 + 12x^7$

$9 - 6x + 6x^2 - 3x^3 - 9x^4 + 6x^6 - 12x^7$

$= 12 + 3x^2 - 9x^3 - 6x^4 - 9x^5 + 6x^6 - 9x^7$

$\in R(x)$

Dari (3) dan (4) terlihatlah bahwa :

$\{p(x) + q(x)\}.3 = p(x).3 + q(x).3$ Begitu pula :

5) $(3.4).p(x)$

$= 12 \;.\; (1 + 2x + - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7)$

$= 12 + 24x - 12x^2 - 24x^3 + 12x^4 - 36x^5 + 12x^7$

$\in R(x)$

6) $3.(4.p(x)$

$= 3.(4.(1 + 2x + - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7)$

$= 12 + 24x - 12x^2 - 24x^3 + 12x^4 - 36x^5 + 12x^7$

$\in R(x)$

Dari (5) dan (6) terlihatlah bahwa :

$(3.4).p(x) = 3.\{4.p(x)\}$

Definisi 19

Suatu M Modul atas R dikatakan *dibangun secara hingga* jika terdapat elemen $m_1, m_2, .. m_n \in M$ sedemikian hingga untuk setiap elemen $m \in M$ dan $r_i \in R$, $1 \leq i \leq n$ mempunyai bentuk : $m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_3 m_3 + \ldots + r_n m_n$, dan n berhingga.

Jadi M modul atas R yang dibangun secara hingga dapat ditulis :

$M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$; $R = r_1 + r_2 .. r_n$

$$= 3 + 6x - 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 9x^5 + 12x^7$$

$$9 - 6x + 6x^2 - 3x^3 - 9x^4 + 6x^6 - 12x^7$$

$$= 12 + 3x^2 - 9x^3 - 6x^4 - 9x^5 + 6x^6 - 9x^7$$

$$\in R(x)$$

Dari (3) dan (4) terlihatlah bahwa :

$\{p(x) + q(x)\}.3 = p(x).3 + q(x).3$ Begitu pula :

5) $(3.4).p(x)$

$$= 12 \,.\, (1 + 2x + - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7)$$

$$= 12 + 24x - 12x^2 - 24x^3 + 12x^4 - 36x^5 + 12x^7$$

$$\in R(x)$$

6) $3.(4.p(x)$

$$= 3.(4.(1 + 2x + - x^2 - 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7)$$

$$= 12 + 24x - 12x^2 - 24x^3 + 12x^4 - 36x^5 + 12x^7$$

$$\in R(x)$$

Dari (5) dan (6) terlihatlah bahwa :

$(3.4).p(x) = 3.\{4.p(x)\}$

Definisi 19

Suatu M Modul atas R dikatakan *dibangun secara hingga* jika terdapat elemen $m_1, m_2, ..m_n \in M$ sedemikian hingga untuk setiap elemen $m \in M$ dan $r_i \in R$, $1 \le i \le n$ mempunyai bentuk : $m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_3 m_3 + \ldots + r_n m_n$, dan n berhingga.

Jadi M modul atas R yang dibangun secara hingga dapat ditulis :

$$M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i \ ; \ R = r_1 + r_2 .. r_n$$

2.8. Sub Modul

Definisi 20.

Suatu himpunan bagian (subset) tak kosong N dari M modul atas R disebut N *submodul* atas R jika dipenuhi :

i. $a - b \in N$ untuk setiap $a, b \in N$

ii. $ra \in N$ dan $ar \in N$ untuk setiap $a \in N$, $r \in R$

Modul nol (dinotasikan dengan {0}) dan modul M merupakan Submodul atas R yang disebut *trivial submodul* (submodul tak sejati), sedangkan bila ada submodul selain {0} dan M sendiri dari M modul atas R maka disebut *submodul sejati.*

Contoh 10.

Pandang Z(x) himpunan polinomial derajad 4 dengan koefisien bilangan bulat modul dari Z dan R(x) himpunan polinomial derajad 2 juga koefisien bilangan bulat dengan definisi jumlahan dan pergandaan seperti pada Z(x) maka R(x) merupakan submodul dari Z(x).

Penjelasan :

Ambil sembarang elemen $r_1(x)$, $r_2(x)$ dalam R(x) dan $m \in Z$, dengan $r_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ sedangkan $r_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, dimana a_i, b_i elemen Z untuk setiap i = 0, 1, 2, maka:

i. $r_1(x) - r_2(x) = (a_o + a_1x + a_2x^2) - (b_o + b_1x + b_2x^2)$

$= (a_o - b_o) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2$

Jelas bahwa $a_i - b_i$ adalah elemen Z untuk i=0,1,2. sehingga $(r_1(x) - r_2(x)) \in R(x)$ untuk setiap $r_1(x), r_2(x) \in R(x)$.

ii. $m(r_1(x)) = m(a_o + a_1x + a_2x^2)$

$= ma_o + ma_1x + ma_2x^2$

Jadi a_i adalah bilangan bulat, sehingga $m(r_1(x))$ termuat dalam R(x).

Karena syarat (i) dan (ii) dipenuhi berarti R(x) merupakan submodul dari modul Z(x).

2.9. Persamaan Linier Homogen

Bentuk umum : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$A\bar{x} = \bar{0}$ dimana

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Syarat perlu dan cukup agar sistim persamaan linier homogen mempunyai penyelesaian untuk $\bar{x} \neq \bar{0}$ adalah $|A| = 0$.

Jika $|A| \neq 0$ maka persamaan tersebut akan mempunyai penyelesaian adalah $\bar{x} = \bar{0}$.