BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 PROFIL UMUM PENGADILAN NEGERI SEMARANG

Pengadilan Negeri Semarang merupakan sebuah lembaga peradilan di lingkungan peradilan umum yang berkedudukan di Kota Semarang dan berfungsi untuk memeriksa, memutus, dan menyelesaikan perkara pidana dan perdata bagi rakyat pada umumnya *(www.id.wikipedia.org, 2009)*. Pengadilan Negeri Semarang beralamat di Jl. Siliwangi No. 512 Krapyak Semarang.

Pengadilan Negeri di Indonesia terbagi menjadi dua klas berdasarkan daerah hukum, letak dan jumlah perkara, yaitu Pengadilan Negeri I yang terletak di ibukota Karesidenan dan ibukota Kotamadya dan Klas II terletak di ibukota Kabupaten. Sehingga Pengadilan Negeri Semarang termasuk Pengadilan Negeri Klas I karena terletak di ibukota Karesidenan dan ibukota Kotamadya *(www.id.wikipedia.org, 2009).*

Pengadilan Negeri berwenang mengadili segala perkara mengenai tindak perdata dan pidana yang dilakukan dalam daerah hukumnya dan Pengadilan Negeri yang dalam daerah hukumnya terdakwa bertempat tinggal, berkediaman akhir, diketemukan atau ditahan, hanya berwenang mengadili perkara tersebut jika tempat kediaman sebagian besar saksi yang dipanggil lebih dekat dengan Pengadilan Negeri itu daripada ke tempat kedudukan Pengadilan Negeri yang di daerahnya tindak pidana itu dilakukan dan apabila terdakwa melakukan tindak pidana dalam daerah hukum berbagai Pengadilan Negeri maka tiap Pengadilan Negeri itu masing-masing berwenang mengadili perkara pidana itu, dengan ketentuan dibuka kemungkinan penggabungan perkara tersebut (pasal 84 KUHP). Ketentuan senada dengan tujuan yang sama dimuat dalam pasal 252 ayat (1), (2), dan (3) HIR *(Sudarsono, 1994)*.

2.1.1 VISI DAN MISI PENGADILAN NEGERI SEMARANG

VISI

Mewujudkan supremasi hukum melalui kekuasan kehakiman yang mandiri, efektif, efisien, serta mendapatkan kepercayaan publik, profesional dan memberikan pelayanan hukum yang berkualitas, etis, terjangkau dan biaya rendah bagi masyarakat serta mampu menjawab panggilan pelayanan publik.

MISI

1. Mewujudkan rasa keadilan sesuai dengan Undang-undang dan peraturan, serta memenuhi rasa keadilan masyarakat.
2. Mewujudkan peradilan yang mandiri, independen, bebas dari campur tangan pihak lain.
3. Memperbaiki akses pelayanan di bidang peradilan bagi masyarakat.
4. Memperbaiki kualitas input internal pada proses peradilan.
5. Mewujudkan institusi peradilan yang efektif, efisien, dan bermartabat serta

dihormat.

6. Melaksanakan kekuasan kehakiman yang mandiri, tidak memihak dan transparan.

2.1.2 WILAYAH HUKUM

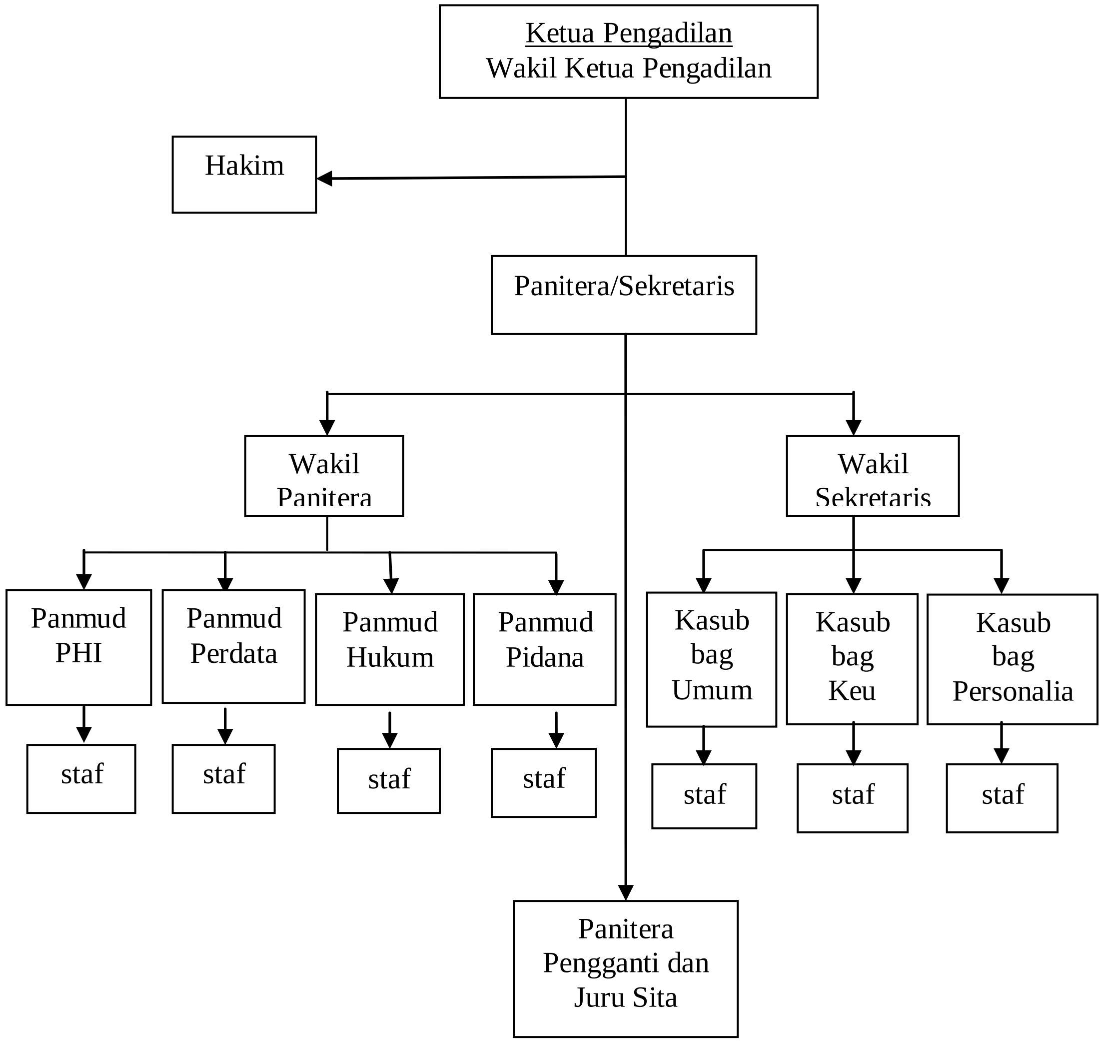
Pengadilan Negeri Semarang merupakan salah satu pelaksana kekuasaan kehakiman di lingkungan peradilan umum. Tugas pokok Pengadilan Negeri Semarang adalah sebagai berikut:

1. Mengadili, dan menyelesaikan perkara yang diajukan kepadanya sesuai dengan Undang-Undang No. 4 Tahun 2004 tentang Kekuasaan Kehakiman.
2. Menyelenggarakan Administrasi Perkara dan Administrasi Umum lainnya.

Pengadilan Negeri Semarang masuk dalam wilayah hukum Pengadilan Tinggi Jawa Tengah, dengan luas wilayah kurang lebih 371,52 km^2 yang terdiri dari 16 (enam belas) kecamatan dan 177 (seratus tujuh puluh tujuh) kelurahan.

2.1.3 STRUKTUR ORGANISASI PENGADILAN NEGERI SEMARANG

Struktur Organisasi Pengadilan Negeri Semarang dapat dilihat pada Gambar 2.1 sebagai berikut :



Gambar 2.1

Struktur Organisasi Pengadilan Negeri Semarang

2.1.4 FASILITAS

2.1.4.1 Gedung Pengadilan

Gedung utama Pengadilan Negeri Semarang terletak Jl. Siliwangi No. 512 Semarang, berdiri di atas lahan seluas 4.000 m^2. Terdapat 6 ruang sidang di gedung ini yang dapat digunakan untuk menyidangkan perkara-perkara pidana, perdata, niaga dan perkara-perkara pidana yang melibatkan anak. Dilengkapi juga dengan :

a) Lobi Depan

   Pengadilan Negeri Semarang dilengkapi dengan lobi depan seluas 6 x 6 m^2.

b) Ruang Sidang

   Jumlah ruang sidang di Pengadilan Negeri Semarang terdiri dari 6 ruang sidang. Berikut adalah daftar ruang sidang di Pengadilan Negeri Semarang :

   1. Ruang Sidang Utama
   2. Ruang Sidang I
   3. Ruang Sidang II
   4. Ruang Sidang III
   5. Ruang Sidang Niaga I
   6. Ruang Sidang Niaga II

c) Ruang Panitera Muda Perdata

Panitera Muda Perdata beserta staf panitera perdata menerima permohonan dan gugatan perkara perdata. Kantor kepaniteraan perdata menempati ruangan seluas 13,5 x 6,5 m^2.

d) Ruang Panitera Muda Pidana

Ruangan Kepanitera Pidana ini berfungsi untuk menerima pendaftaran perkara pidana dimana Panitera Muda Pidana beserta stafnya menempati ruangan kantor kepaniteraan pidana seluas 6,5 x 10 m^2.

e) Ruang Panitera Muda Hukum

Panitera Muda Hukum bertanggung jawab untuk mengumpulkan semua data perkara baik pidana dan perdata serta menyusun laporan data perkara. Panitera Muda Hukum dan staf kepaniteraan hukum di Pengadilan Negeri Semarang menempati ruangan kantor seluas 10 x 6 m^2.

f) Ruang Panitera Muda PHI

Panitera Muda PHI dan staf kepaniteraan PHI menempati ruangan seluas 10 x 10 m^2.

g) Ruang Sub Bagian Umum

Sub Bagian Umum bertugas memberikan pelayanan guna terciptanya proses peradilan dan menangani surat-menyurat yang bukan bersifat perkara. Kepala sub Bagian Umum Pengadilan Negeri Semarang menempati ruang kantor seluas 6 x 4,5 m^2 beserta staf bagian umum.

h) Ruang Tahanan

Pengadilan Negeri Semarang memiliki dua Ruang Tahanan yang diperuntukkan bagi para terdakwa untuk menunggu waktu sebelum persidangan bagi mereka dimulai. Ruang tahanan tersebut adalah Ruang Tahanan Wanita dan Ruang Tahanan Pria.

2.1.4.2 Jam Kerja

Jam kerja Pengadilan adalah:

Senin - Kamis	07.00 – 15.00
Jumat	07.00 – 15.00 Istirahat 11.30 – 13.00

(www.pn-semarangkota.go.id, 2009).

2.2 DESKRIPSI ANTRIAN

Antrian terjadi pada kondisi apabila obyek-obyek yang menuju suatu area untuk dilayani, namun kemudian menghadapi keterlambatan disebabkan oleh mekanisme pelayanan yang mengalami kesibukan. Hal ini dikarenakan adanya ketidakseimbangan antara yang dilayani dengan pelayannya. Contoh antrian :

1. Antrian pada pelayanan kasir supermarket
2. Antrian pada lampu merah (orang menyeberang maupun kendaraan)
3. Antrian pesawat akan mendarat di suatu bandara

4. Antrian pelayanan dokter
5. Nasabah mengantri di teller untuk melakukan transaksi
6. Mobil antri untuk dicuci
7. Antrian membeli bahan bakar

Teori antrian pertama kali dikemukakan dan dikembangkan oleh AK. Erlang, seorang insinyur Denmark pada tahun 1910. Teori antrian adalah teori yang menyangkut studi matematis dari antrian-antrian atau baris-baris penungguan. Sedangkan suatu proses antrian (*queueing process*) adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris (antrian) jika semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut *(Kakiay, 2004)*.

Sebuah sistem antrian adalah suatu proses kelahiran-kematian dengan suatu populasi yang terdiri atas para pelanggan yang sedang menunggu mendapatkan pelayanan atau yang sedang dilayani. Suatu kelahiran terjadi apabila seorang pelanggan tiba di suatu fasilitas pelayanan, sedangkan apabila pelanggannya meninggalkan fasilitas tersebut maka terjadi suatu kematian. Keadaan sistem adalah jumlah pelanggan dalam suatu fasilitas pelayanan. Sistem sistem antrian dicirikan oleh lima buah komponen yaitu pola kedatangan para pelanggan, pola pelayanan, jumlah pelayanan, kapasitas fasilitas untuk menampung para pelanggan dan aturan dimana para pelanggan dilayani (*Bronson, 1991)*.

Ukuran-ukuran kinerja dapat dipergunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian untuk maksud pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut. Ukuran kinerja sistem seperti L_s, L_q, W_s dan W_q, dimana :

L_s = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

L_q = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

W_s = waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem

W_q = waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian

Dengan sistem terdiri dari antrian dan saran pelayanan *(Taha, 1996)*.

Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap sistem antrian adalah sebagai berikut :

1. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan biasanya diperhitungkan melalui waktu antar kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Bila bentuk kedatangan ini tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu persatu. Asumsinya adalah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjuk bahwa kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan λ. Bila kedatangan individu-individu mengikuti suatu distribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan atau *interarival time* (yaitu waktu antara kedatangan setiap individu) adalah random dan mengikuti suatu distribusi eksponensial *(Kakiay, 2004)*.

Distribusi kedatangan dibagi menjadi dua, yaitu :

a. Kedatangan secara individu (*single arrivals*)

b. Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*) (*Taha, 1996*).

Perlu diperhatikan pula apakah penolakan (*balking*) atau pembatalan (*reneging*) diperkenankan. Penolakan terjadi pabila seorang pelanggan menolak untuk memasuki suatu fasilitas pelayanan karena antriannya terlalu panjang. Pembatalan terjadi apabila seorang pelanggan yang telah berada dalam suatu antrian meninggalkan antrian dan fasilitas pelayanan yang dituju karena dia menunggu terlalu lama. Bila tidak disebutkan secara khusus, anggapan standarnya adalah bahwa semua pelanggan tiba satu per satu dan juga tidak terjadi penolakan dan pembatalan *(Bronson, 1991)*.

2. Distribusi Waktu Pelayanan

Pola pelayanan biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan (*service time*), yaitu waktu yang dibutuhkan seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik, atau berupa suatu variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui. Besaran ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang telah berada di dalam fasilitas pelayanan dan tidak bergantung pada keadaannya. Yang perlu diperhatikan apakah seorang pelanggan hanya dilayani oleh satu pelayan atau suatu barisan pelayan. Bila tidak disebutkan secara khusus, maka anggapan dasarnya adalah bahwa satu pelayan saja dalam melayani secara tuntas urusan seorang pelanggan (*Bronson, 1991*).

Distribusi pelayanan memerlukan proses pelayanan yang dilakukan secara random, dengan menggunakan distribusi peluang tertentu, seperti distribusi eksponensial atau distribusi Poisson. Proses pelayanan ini terdapat dua komponen penting, yaitu :

a. Pelayanan secara individual (*single service*)
b. Pelayanan secara kelompok (*bulk service*)

Pola pelayanan dapat konstan dari waktu ke waktu. Rata-rata pelayanan (*mean server rate*) diberi simbol μ merupakan jumlah pelanggan yang dapat dilayani dalam satuan waktu, sedangkan rata-rata waktu yang digunakan untuk melayani setiap pelanggan diberi simbol $\frac{1}{\mu}$ unit (satuan). Jadi $\frac{1}{\mu}$ merupakan rata-rata waktu yang dibutuhkan untuk suatu pelayanan (*Taha, 1996*).

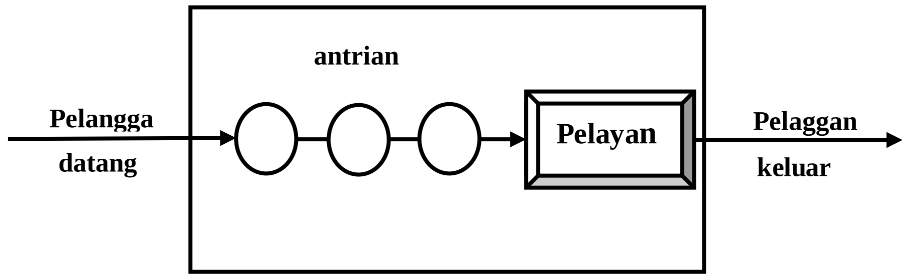
3. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrian yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan dibagi tiga bentuk, yaitu:

a. Bentuk series, dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar
b. Bentuk paralel, dalam beberapa garis lurus antara satu dengan yang lain paralel
c. Bentuk *network station* (jaringan), dapat didesain series maupun paralel dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun.

Ada beberapa sistem di dalam antrian, yaitu :

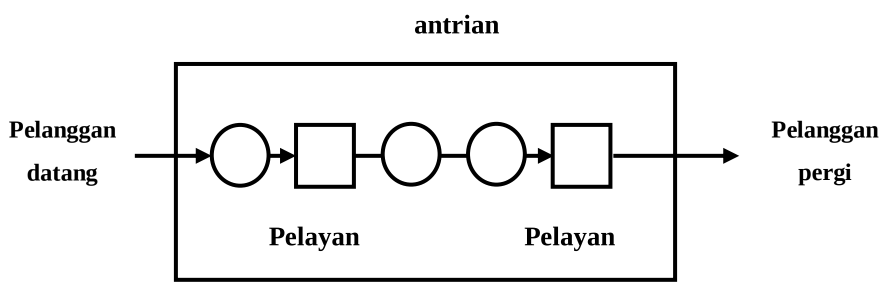
a. Satu antrian satu pelayanan (*Single Channel Single Phase*)



Gambar 2.2
Sistem Antrian Satu Pelayanan (*Single Channel Single Phase*)

Gambar 2.2 merupakan suatu sistem di mana hanya terdapat satu layanan dengan satu tahapan pelayanan.

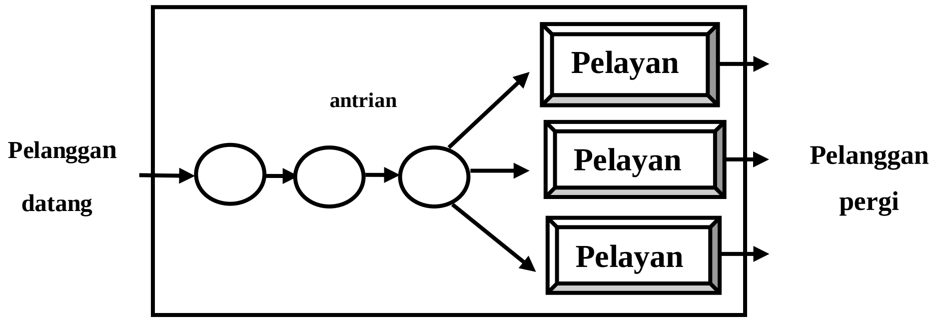
b. Satu antrian beberapa pelayanan seri (*Single Channel Multiple Phase*)



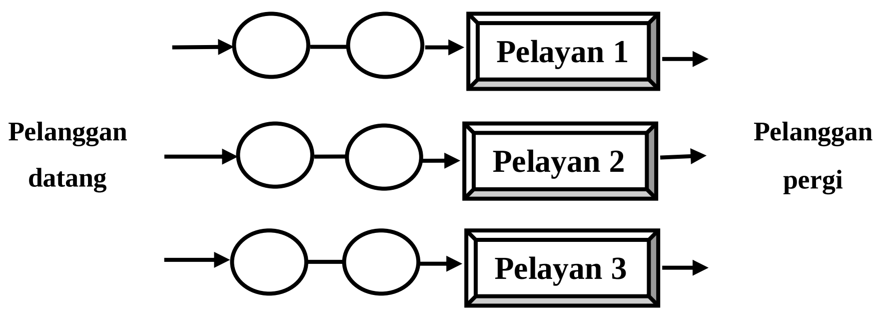
Gambar 2.3
Sistem Satu Antrian Beberapa Pelayanan Seri (*Single Channel Multiple Phase*)

Gambar 2.3 merupakan sistem antrian di mana hanya terdapat satu layanan tetapi melalui beberapa tahapan pelayanan.

c. Satu antrian beberapa pelayanan paralel (*Multiple Channel Single Phase*)



Gambar 2.4
Sistem Satu Antrian Beberapa Pelayanan Paralel (*Multiple Channel Single Phase*)



Gambar 2.5
System Satu Antrian Beberapa Pelayanan Paralel (*Multiple Channel Single Phase*)

Gambar 2.4 dan gambar 2.5 merupakan sistem antrian di mana dalam satu sistem terdapat beberapa layanan tetapi masing-masing layanan hanya melalui satu tahapan pelayanan.

4. Disiplin Pelayanan

Disiplin pelayanan adalah aturan dalam mana para pelanggan dilayani, atau disiplin pelayanan (*service discipline*) yang memuat urutan (*order*) para pelanggan menerima layanan. Disiplin pelayanan dibagi dalam empat bentuk, yaitu:

a. FCFS (*First Come First Served*), pertama datang pertama dilayani

b. LCFS (*Last Come First Served*), terakhir datang pertama yang dilayani

c. SIRO (*Service Random In Random Order*), pelayanan dalam random order

d. Prioritas pelayanan, pelayanan dilakukan khusus pada pelanggan utama (VIP *customer*)

5. Ukuran Antrian

Besarnya antrian pelanggan yang akan memasuki fasilitas pelayanan pun perlu diperhatikan. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrian, yaitu:

a. Ukuran kedatangan secara tidak terbatas (*infinite queque*)

b. Ukuran kedatangan secara terbatas (*finite queque*)

6. Sumber Pemanggilan

Dalam fasilitas pelayanan, yang berperan sebagai sumber pemanggilan dapat berupa mesin maupun manusia. Sumber pemanggilan dibagi menjadi dua, yaitu :

a. Sumber pemanggilan terbatas (*finite calling source*)

b. Sumber pemanggilan tidak terbatas (*infinite calling source*) *(Kakiay, 2004)*.

2.3 NOTASI KENDALL

Notasi (a/b/c);(d/e/f) pada awalnya dirancang oleh D. G. Kendall (1953) dalam bentuk (a/b/c) dan dikenal dalam literatur sebagai notasi Kendall. Selanjutnya, Lee (1966) menambahkan simbol d dan e dalam notasi Kendall tersebut, kemudian ditambahkan dengan simbol f, yang mewakili kapasitas sumber pemanggilan. Simbol-simbol a, b, c, d, e, dan f adalah unsur-unsur dasar dari model ini sebagai berikut :

a = distribusi kedatangan

b = distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan)

c = jumlah pelayan paralel (c = 1, 2, … , ∞)

d = peraturan pelayanan (FCFS, LSCF, SIRO)

e = jumlah maksimum yang diijinkan dalam sistem (dalam antrian + pelayanan)

f = ukuran sumber pemanggilan *(Taha , 1996)*.

Notasi standar ini dapat diganti dengan :

M =Distribusi kedatangan atau keberangkatan dari proses Poisson atau distribusi kedatangan dan keberangkatan berdistribusi Eksponensial.

D = Konstanta atau *deterministic inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan)

k = Jumlah pelayan dalam bentuk paralel atau seri.

N = Jumlah maksimum pelanggan (*customer*) dalam sistem.

E_d = Erlang atau Gamma distribusi untuk waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter = d.

G = Distribusi umum dari *service time* atau keberangkatan (*departure*).

GI = Distribusi umum yang independen dari proses kedatangan (*Interactive time*).

GD = *General Dicipline* (disiplin umum) dalam antrian (FCFS, LCFS, SIRO).

NPD= *Non-Preemtive Discipline*

PRD = *Preemtive Disciplin*e *(Kakiay, 2004).*

2.4 UKURAN *STEADY STATE*

Ukuran *steady-state* sistem antrian disimbolkan dengan ρ dan dapat dihitung dengan rumus :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Dengan :

λ = rata-rata jumlah pelanggan yang datang

μ = rata-rata waktu pelayanan

Keadaan *steady-state* dapat terpenuhi apabila $\rho < 1$ yang berarti bahwa rata-rata jumlah pelanggan yang datang kurang dari rata-rata waktu pelayanan. Sedangkan jika $\rho > 1$, maka kedatangan terjadi dengan kelajuan yang lebih cepat daripada dapat ditampung oleh pelayan, keadaan yang sama berlaku apabila $\rho = 1$.

Probabilitas *steady-state* dari *n* pelanggan dalam sistem (P_n), sebagai fungsi dari λ_n dan μ_n, dapat dicari dengan menggunakan rumus :

$$P_n = \rho^n P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1} P_0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dengan :

P_0 : Probabilitas pelayanan kosong / tidak ada antrian = 1- ρ

Perlu diingat bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

(*Taha, 1996*).

2.5 PROSES POISSON DAN DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Menurut Gross dan Haris (1998), pada umumnya model antrian diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, atau sama dengan rata-rata kedatangan dan rata-rata pelayanannya mengikuti distribusi Poisson. Distribusi Poisson juga merupakan probabilitas diskrit yang dapat meramalkan jumlah kedatangan pada suatu waktu tertentu.

Proses jumlah kedatangan dianggap $\{N(t), t \geq 0\}$, dimana N(t) dinotasikan jumlah kedatangan yang terjadi sampai waktu t, dengan N (0) = 0, yang mengikuti tiga asumsi sebagai berikut :

i. Probabilitas terjadi satu kedatangan antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah sama dengan $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Dapat ditulis Pr{terjadi kedatangan antara t dan $t + \Delta t$}= $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, dimana λ adalah suatu konstanta yang *independent* dari N (t), Δt adalah elemen penambah waktu, dan $o(\Delta t)$ dinotasikan sebagai banyaknya kedatangan yang bisa diabaikan jika dibandingkan dengan Δt, dengan $\Delta t \to 0$, yaitu :

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

ii. P {lebih dari satu kedatangan antara t dan $\mathrm{t} + \Delta\mathrm{t}$ } adalah sangat kecil atau bisa dikatakan diabaikan = $o(\Delta\mathrm{t})$.

iii. Jumlah kedatangan pada interval yang berturutan adalah tetap/independen, yang berarti bahwa proses mempunyai penambahan bebas, yaitu jumlah kejadian yang muncul pada setiap interval waktu tidak tergantung pada interval waktunya.

<u>*Theorema I*</u>

Untuk suatu proses Poisson, jumlah kedatangan terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λt dan kemungkinan dari n kedatangan adalah $\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.

Bukti :

dihitung P_n (t), untuk n ≥ 1

P_n $(t + \Delta t)$ = Pr {n kedatangan pada t dan tidak ada kedatangan pada Δt }+ Pr {n-1 kedatangan pada t dan satu kedatangan pada Δt }+ Pr {n-2 kedatangan pada t dan dua kedatangan pada Δt }+ .....+ Pr {tidak ada kedatangan pada t dan n kedatangan pada Δt } (2.1)

Dengan menggunakan asumsi (i), (ii), dan (iii) maka persamaan (2.1) menjadi:

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= P_n(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + \\ &\quad P_{n-2}(t)o(\Delta t) + \cdots + P_0(t)o(\Delta t) \\ &= P_n(t)[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$o(\Delta t)$ menyatakan bentuk {n-j kedatangan pada t dan j pada Δt; 2 ≤ j ≤ n}

Untuk n = 0 adalah

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t - o(\Delta t)]$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t - P_0(t)o(\Delta t) \tag{2.3}$$

Dari persamaan (2.2) dan (2.3) dan ditambah dengan $o(\Delta t)$, adalah

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) - P_0(t) &= -\lambda\Delta t P_0(t) - o(\Delta t)P_0(t) + o(\Delta t) \\ &= -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dan $P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = -\lambda\Delta t P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o(\Delta t) \quad (n \geq 1)$ (2.5)

Persamaan (2.4) dan (2.5) dibagi dengan Δt dan diambil limit yaitu $lim \to 0$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}\right] &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] \\ &= -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}\right] &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_n(t)}{\Delta t} + \frac{\lambda(\Delta t)P_{n-1}(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] \\ &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

karena $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, maka

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \tag{2.6}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (n \geq 1) \tag{2.7}$$

Dari persamaan (2.6), untuk n = 0 diperoleh :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda\, dt$$

$$lnP_0(t) = -\lambda t$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Dari persamaan (2.7), untuk n = 1 diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t)e^{\lambda t} = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right) = \lambda$$

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \int \lambda\, dt$$

$$P_1(t) \ = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Untuk n = 2, diperoleh:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda\lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t)e^{\lambda t} = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_2(t)\right) = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t}P_2(t) = \int \lambda^2\, t\, dt$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2.1} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Untuk n = 3, diperoleh:

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda P_3(t) + \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t)e^{\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_3(t)\right) = \frac{1}{2}\lambda^3 t^2$$

$$e^{\lambda t}P_3(t) = \int \frac{1}{2}\lambda^3\, t^2\, dt$$

$$e^{\lambda t}P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3$$

$$P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3.2.1} e^{-\lambda t}$$

$$P_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

Sehingga dapat diambil suatu rumus umum, yaitu :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad ; \qquad n \geq 0 \tag{2.8}$$

Terbukti bahwa probabilitas n kedatangan adalah $\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

Theorema 2

Jika kedatangan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel random waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial.

Bukti :

f (t) = fungsi densitas probabilitas dari interval waktu t antar pemunculan kejadian yang berturut-turut, t ≥0.

F (t) = fungsi distribusi kumulatif dari t

Jika suatu kumpulan variabel random waktu antar dua kedatangan berurutan dimisalkan T, maka

P {T > t}= P {tidak ada kedatangan dalam waktu t} = $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$\int_T^{\infty} f(t)dt = P_0\,(t) = e^{-\lambda t}$$

atau menggunakan F(t) sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$$F(t) = P\,\{T \leq t\} = 1 - P\,(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (2.9)$$

maka fungsi densitasnya adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (2.10)$$

yang merupakan fungsi densitas dari distribusi eksponensial.

Dengan parameter λ maka fungsi pembangkit momennya diperoleh rata-rata, yaitu :

$$M_T(x) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{tx} f(t)dt \text{ ; t kontinu} \\ \sum e^{tx} f(t) \text{ ; t diskrit} \end{cases}$$

$$M_T(x) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - x)t}\, dt$$

$$= \left.\frac{-\lambda e^{-(\lambda-x)t}}{\lambda - x}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

$$M'_T(x) = \frac{\lambda}{(\lambda - x)^2} \;\; dan \;\; M''_T(x) = \frac{2\lambda}{(\lambda - x)^3}$$

E(T) diperoleh dari :

$$E(T) = M_{T'}(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T^2) = M_{T''}(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Sehingga

$$\mathrm{Var}(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \;\; \text{dan} \;\; E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Jadi, waktu antar kedatangan yang berurutan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata $1/\lambda$. Jika waktu antar kedatangan $1/\lambda$ maka jumlah kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah distribusi Poisson dengan rata-rata kedatangan adalah λ.

2.6 MODEL ANTRIAN

2.6.1 (M/M/c) : (GD/∞/∞)

Para pelanggan tiba dengan laju konstan λ dan maksimum c pelanggan dapat dilayani secara berbarengan dan laju pelayanan per pelayan adalah μ. Pengaruh penggunaan c pelayan yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika jumlah pelanggan dalam sistem adalah n, dan n ≥ c, maka laju keberangkatan gabungan dari sarana tersebut sama dengan μ. Sedangkan jika n < c, maka laju pelayanan adalah nμ. Jadi dalam bentuk model yang digeneralisasikan, diperoleh

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\lambda, & n < 0 \\ c\lambda, & n \geq 0 \end{cases}$$

P_n untuk n < c sebagai

$$P_n = \rho .\, P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0$$

$$= \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

P_n untuk n ≥ c,

$$P_n = \rho .\, P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{(c-1)\mu(c-2)\mu\ldots(c\mu)\ (c\mu)^{n-c}}\ P_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\ P_0$$

$$= \frac{\rho^n}{n!c^{n-c}}\ P_0$$

karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, maka nilai P_0 ditentukan dari

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

yang memberikan

$$P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\} = 1$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\}^{-1}$$

Jika dimisalkan j = n – c, maka diperoleh

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \right\}^{-1}$$

karena

$$\sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j$$

merupakan deret geometri tak hingga maka

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{1}{1-\rho/c}\right) \right\}^{-1}$$

dengan $\frac{\rho}{c} < 1$.

Selanjutnya kita mencari ukuran kinerjanya yaitu L_q, L_s , W_q dan W_s .

Jika diketahui

$$\frac{\rho}{c} < 1 \text{ atau } \frac{\lambda}{\mu c} < 1$$

maka

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) P_n$$

dengan k = n – c, maka diperoleh

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} k P_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c^k c!} P_0 = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \left[\frac{1}{1-\rho/c}\right] = \frac{1}{(1-\rho/c)^2}$$

maka

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}\right]$$

$$= P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \left[\frac{c^2}{(c-\rho)^2}\right]$$

$$= P_0 \frac{\rho^c}{c(c-1)!} \frac{\rho}{c} \left[\frac{c^2}{(c-\rho)^2}\right]$$

$$= P_0 \frac{\rho^c}{(c-1)!} \rho \left[\frac{1}{(c-\rho)^2}\right]$$

$$= P_0 \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!} \cdot \frac{1}{(c-\rho)^2}$$

$$= \left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right] P_c$$

kemudian

$L_s = L_q + \rho$

$$= \left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right] P_c + \rho$$

$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

$$= \frac{\left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right] P_c}{\lambda}$$

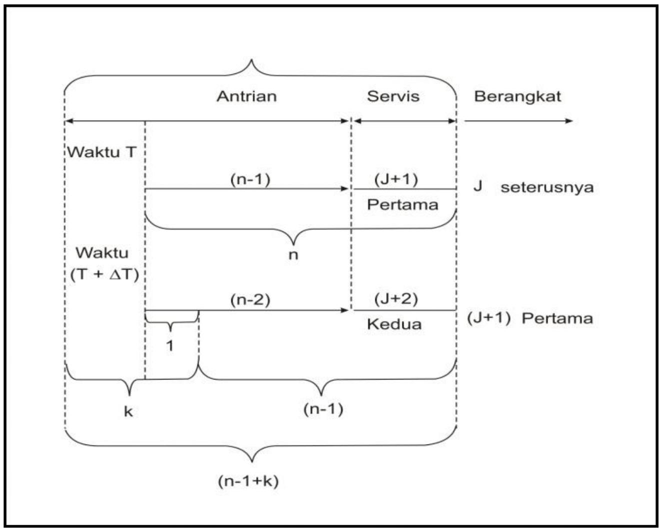
$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

$$= \frac{\left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right] P_c}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$ (*Taha, 1996*).

2.6.2 Model Antrian (M/G/1):(GD/∞/∞)

Suatu sistem dimana pelanggan telah selesai dilayani dan pelayanan itu dimulai lagi untuk pelayanan berikutnya dalam antrian, maka waktu pelayanan tersebut berdistribusi random. Fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari waktu pelayanan tersebut ditunjukkan dengan F(t) dan fungsi densitasnya dengan f(t) jika ada. Proses kedatangan ini dinamakan Poisson, dimana peristiwa dari kedatangan para pelanggan dapat terjadi lebih dari satu kali pada selang waktu atau ruang dengan parameter λ *(Gross and Harris, 1998)*.

Menurut Kakiay (2004), proses antrian saluran tunggal dengan kedatangan Poisson dan pelayanan umum dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.6
Sistem Antrian (P-K)

Dengan :

n = jumlah pelanggan dalam sistem

t = waktu untuk melayani pelanggan

k = jumlah pelanggan yang baru datang

n' = jumlah pelanggan setelah dilayani.

Simbol yang digunakan pada gambar (2.6) menunjukkkan bahwa:

1. Waktu T = Bila pelanggan dengan waktu J meninggalkan fasilitas pelayanan
2. Waktu (T+ ΔT) = Bila pelanggan dengan waktu (J+1) pertama meninggalkan fasilitas pelayanan
2. Notasi J, J + 1, J + 2, ... tidak harus diartikan bahwa pelanggan masuk dengan disiplin antrian pelayanan FCFS. Tetapi, hal itu hanya untuk memperkenalkan

perbedaan keberangkatan pelanggan pada sistem. Hasil dari model ini dapat digunakan untuk beberapa disiplin antrian, yaitu FCFS, LCFS, SIRO.

Dari gambar itu memperlihatkan bahwa:

$$n' = \begin{cases} n - 1 + k, \text{ untuk } n > 0 \\ k \qquad\quad , \text{ untuk } n = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Dari persamaan (2.11), jika dalam sistem n = 0, maka sistem kosong atau tidak ada pelanggan dalam antrian dan tidak ada yang dilayani. Berarti jumlah pelanggan yang akan dilayani hanya akan sama dengan k (jumlah pelanggan yang baru datang).

Berdasarkan pengertian tersebut, untuk mengetahui besar peluang atau probabilitas dari k kedatangan, maka:

$$\Pr\{k\} = \int_0^\infty \Pr\{k \mid t\}\, dF(t) \tag{2.12}$$

Karena kedatangan yang terjadi mengikuti distribusi Poisson dan berdasarkan persamaan $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, maka peluang kedatangan k pada saat t adalah:

$$\Pr\{k \mid t\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \tag{2.13}$$

Misalkan jumlah pelanggan setelah dilayani n\` sama dengan j dan jumlah pelanggan dalam sistem n, yaitu pelanggan yang belum dilayani dan yang sedang dilayani sama dengan i, maka dari persamaan (2.11) menjadi:

$$\Pr\{k = j - i + 1\} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dF(t), \text{untuk } j \geq i-1, i \geq 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , \text{untuk } j < i-1,\ i \geq 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

2.6.2.1 Formula Pollaczek – Khintchine

Model $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$ atau disebut juga dengan (P–K) adalah suatu formula dimana akan diperoleh pada situasi pelayanan tunggal yang memenuhi tiga asumsi berikut: (*Kakiay*, *2004*)

1. Kedatangan Poisson dengan rata-rata kedatangan λ
2. Distribusi waktu pelayanan umum atau general dengan ekspektasi rata-rata pelayanan $E[t] = \frac{1}{\mu}$ dan varian $\text{var}[t]$
3. Keadaan *steady-state* dimana $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Selanjutnya, persamaan (2.1) akan dibawa ke bentuk formula P-K, yaitu;

$$n` = n - \delta + k \tag{2.15}$$

dengan δ didefinisikan sebagai:

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ , untuk } n > 0 \\ 0 \text{ , untuk } n = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

dengan n adalah jumlah pelanggan dalam sistem dan δ adalah fungsi yang memetakan setiap n ke bilangan riil, yaitu jika n = 0 (dalam sistem tidak ada pelanggan), maka tidak ada yang dilayani dan apabila dalam sistem ada n > 0 pelanggan, maka ada pelanggan yang ditunjukkan dengan nilai 1.

Dengan mengasumsikan bahwa solusi *steady-state*, yaitu bahwa rata-rata waktu pelayanan lebih tinggi daripada rata-rata laju kedatangan dan menganggap bahwa nilai dari jumlah pelanggan dalam sistem n, serta jumlah pelanggan sesudah dilayani n` dinotasikan sama sebagai $L_s$ yang mewakili jumlah pelanggan, maka dapat diambil nilai ekspektasi dari variabel random, yaitu E[n] = E[n`] = L_s dan $E[n^2] = E[(n`)^2]$.

Dengan mengambil nilai ekpektasi dari kedua sisi dari persamaan (2.15), diperoleh:

$$E[n`] = E[n] - E[\delta] + E[k] \tag{2.17}$$

Sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$L_s = L_s - E[\delta] + E[k]$$

$$E[\delta] = E[k] \tag{2.18}$$

dengan mengkuadratkan persamaan (2.15), diperoleh:

$$(n`)^2 = (n - \delta + k)^2$$

$$= n^2 + k^2 + 2nk + \delta^2 - 2n\delta - 2k\delta \tag{2.19}$$

Karena $\delta^2 = \delta$ dan $n\delta = n$, maka persamaan (2.19) menjadi:

$$(n`)^2 = n^2 + k^2 + 2nk + \delta^2 - 2n\delta - 2k\delta = n^2 + k^2 + 2nk + \delta - 2n - 2k\delta$$

$$= n^2 + k^2 + 2n(k-1) - \delta(2k-1)$$

$$-2n(k-1) = n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{-2(k-1)}$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{-2k+k}$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{2(1-k)}$$

Dengan mengambil ekspektasi dari kedua sisi, maka:

$$E[n] = \frac{E[n^2] - E[(n`)^2] + E[k^2] - E[\delta(2k-1)]}{2(1-E[k])}$$

$$E[n] = \frac{0 + E[k^2] - 2E[\delta k] + E[\delta]}{2(1-E[k])}$$

Dengan mensubsitusikan $E[\delta] = E[k]$ dari persamaan (2.18), maka:

$$E[n] = \frac{E[k^2] + E[k] - 2(E[k])^2}{2(1-E[k])} \qquad (2.20)$$

Sekarang, E[k] dan E[k^2] diperlukan untuk menentukan E[n]. Karena kedatangan yang terjadi menurut distribusi Poisson, maka

Dari bentuk:

$$E[k \mid t] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$$

Dimana P_k adalah probabilitas kedatangan dari k pelanggan.

Maka, $E[k \mid t] = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k(k-1)!} k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t$$

dan,

$$E[k^2 \mid t] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \frac{k^2}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \frac{k}{(k-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \left\{1 + \frac{1}{k-1}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)(k-2)!}$$

$$= (\lambda t)^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Sehingga diperoleh:

$$E[k \mid t] = \lambda t \text{ dan } E[k^2 \mid t] = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Dari harga harapan suatu mean $E[t] = \int_0^{\infty} t\, f(t)\, dt$ dan $\mathrm{var}(t) = E[t^2] - (E[t])^2$, maka;

$$E[k] = \int_0^{\infty} E[k \mid t] f(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda\, t\, f(t)\, dt$$

$$E[k] = \lambda E[t] \tag{2.21}$$

dan

$$E[k^2] = \int_0^{\infty} E[k^2 \mid t] f(t) dt = \int_0^{\infty} \left\{(\lambda t)^2 + \lambda t\right\} f(t) dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt + \lambda \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda^2 \,\mathrm{var}[t] + \lambda^2 (E[t])^2 + \lambda E[t]$$

$$E[k^2] = \lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t] + \lambda E[t] \tag{2.22}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.21) dan (2.22) ke persamaan (2.20), maka :

$$E[n] = \frac{E[k^2] + E[k] - 2E^2[k]}{2(1 - E[k])}$$

$$= \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t] + \lambda E[t] + \lambda E[t] - 2\lambda^2 (E[t])^2}{2(1 - \lambda E[t])}$$

$$= \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t]}{2(1 - \lambda E[t])} + \frac{2\lambda E[t](1 - \lambda E[t])}{2(1 - \lambda E[t])}$$

$$= \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t]}{2(1 - \lambda E[t])} + \lambda E[t]$$

$$L_s = \lambda E[t] + \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t]}{2(1 - \lambda E[t])}$$

Dengan $E[t] = \dfrac{1}{\mu}$ dan $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, maka

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \operatorname{var}(t)}{2(1 - \rho)} \tag{2.23}$$

Persamaan (2.23) dikenal sebagai formula P-K, dimana:

L_s = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

λ = Rata-rata jumlah pelanggan yang datang

E[t] = ekspektasi waktu pelayanan.

2.6.2.2 Waktu Tunggu

Rata-rata sistem untuk menunggu dilayani berhubungan dengan rata-rata jumlah atau ukuran satuan, yaitu dengan menggunakan rumus *Little* :

Rumus *Little* diperoleh dari :

Misal P_n adalah probabilitas dari n kedatangan selama waktu tunggu T.

$$P_n = \int_0^\infty P_r \text{ \{n kedatangan selama waktu tunggu T} \mid \text{ T = t \} } dW_s(t)$$

Dimana W(t) adalah fungsi distribusi kumulatif dari waktu tunggu.

T_q adalah waktu pelanggan menunggu dalam antrian dan T adalah waktu total pelanggan menunggu dalam sistem (T = T_q + t, dimana t adalah waktu pelayanan, dengan T, T_q, dan t adalah variabel random) dan $W_q = E[T_q]$ serta $W_s = E[T]$.

Maka,

$$P_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_s(t), n \geq 0 \quad \text{dan} \quad L_s = E[n] = \sum_{n=0}^\infty nP_n$$

Dimana n adalah variabel random dari jumlah pelanggan dalam sistem pada saat keadaan *steady state* dan L_s adalah nilai ekspektasinya.

Sehingga :

$$L_s = \sum_{n=0}^\infty \frac{n}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n(n-1)!} (\lambda t)^n dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dW_s(t)$$

$$= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dW_s(t) = \lambda \int_0^\infty t dW_s(t) = \lambda E[T]$$

$$L_s = \lambda W_s$$

Rumus *Little* :

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

(Gross and Harris, 1998)

2.6.2 (M/G/c) : (GD/∞/∞)

Menurut Gross and Haris (1998), untuk model (M/G/c) : (GD/∞/∞), hasil utama yang bisa diperoleh adalah probabilitas dari waktu tunggu dalam sistem yang diberikan pada persamaan :

$L_s = \lambda W_s$ atau $L_s = L_q + c$

dan untuk waktu tunggu dalam antrian model (M/G/c) didapat dari persamaan :

π_n^q = Pr{n dalam antrian setelah keberangkatan}

$$= \frac{1}{n! \int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_q(t)}$$

Dengan panjang antrian rata-rata pada titik waktu kedatangan, yaitu L_q adalah :

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n^q = \int_0^{\infty} \lambda t dW_q(t) = \lambda W_q$$

Dari Ross, (1997), W_q dapat dicari dengan :

$$W_q = \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda(E[t]^2))\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda E[t]^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!\,(\lambda E[t])}\right]}$$

dengan :

W_q = ekspektasi waktu tunggu dalam antrian.

2.6.3 (G/G/c) : (GD/∞/∞)

Model antrian (G/G/c):(GD/∞/∞) adalah model antrian dengan pola kedatangan berdistribusi umum (*General*), pola pelayanan berdistribusi umum (*General*), dengan jumlah fasilitas pelayanan sebanyak c pelayanan. Disiplin antrian yang digunakan pada model ini adalah umum yaitu FCFS (*First Come First Served*), kapasitas maksimum yang diperolehkan dalam sistem adalah tak terbatas dan memiliki sumber pemanggilan juga tak terbatas.

Ukuran-ukuran kinerja sistem pada model *General* ini mengikuti ukuran kinerja pada model M/M/c, terkecuali untuk perhitungan jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian (L_q) adalah sebagai berikut :

$$L_q = L_{q_{M/M/c}} \frac{\mu^2 v(t) + v(t')\lambda^2}{2}$$

dengan :

$v(t) = (1/\mu^2)^2$

$v(t') = (1/\lambda^2)^2$

Untuk ukuran kinerja sistem yang lain yaitu :

Jumlah rata-rata kedatangan yang diperkirakan dalam sistem (L_s)

$$L_s = L_q + \rho$$

Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem (W_s)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

2.7 UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI

Uji kecocokan distribusi digunakan untuk mencocokkan atau menguji apakah sekumpulan data hasil pengamatan mengikuti distribusi tertentu, dengan membandingkan frekuensi pengamatan dengan frekuensi yang diharapkan dari suatu hipotesa. Ada dua model yang dapat digunakan yaitu dengan menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov* dan uji *Chi* Kuadrat.

Perbedaan antara uji *Kolmogorov-Smirnov* dan *Chi* Kuadrat adalah jika uji *Kolmogorov-Smirnov* dirancang secara khusus untuk distribusi kontinu dan dapat digunakan untuk distribusi diskrit bila ukuran sampel kurang dari 30. Sedangkan uji *Chi* Kuadrat dapat digunakan untuk distribusi kontinu jika distribusi populasi yang kontinu itu merupakan distribusi yang terkelompok-kelompok atas sejumlah interval klasifikasi yang tidak tumpang tindih dan banyaknya terbatas dan dapat digunakan untuk distribusi diskrit, terutama dengan ukuran sampel lebih besar dari 50 uji *Chi* Kuadrat sangat valid digunakan.

2.7.1 Pengujian *Kolmogorov-Smirnov*

Pengujian *Kolmogorov-Smirnov* dinyatakan suatu cara untuk menguji apakah terdapat perbedaan yang signifikan antara observasi distribusi frekuensi dengan teoritis distribusi frekuensi juga merupakan perhitungan "*Goodness of fit test*" untuk teori distribusi frekuensi. Uji ini dapat digunakan untuk menentukan seberapa baik sebuah sampel random data mempunyai distribusi teoritis tertentu, yang dimaksud disini adalah distribusi Poisson *(Daniel, 1989)*.

Adapun prosedur pengujiannya adalah sebagai berikut :

A. Uji Distribusi jumlah kedatangan kasus tilang

1. Menentukan Hipotesa

   H_0 : Distribusi jumlah kedatangan kasus tilang adalah berdistribusi Poisson

   H_1 : Distribusi jumlah kedatangan kasus tilang tidak berdistribusi Poisson

2. Menentukan taraf signifikansi

   Dalam hal ini taraf signifikansi α yang dipakai adalah 5%

3. Statistik Uji

   DN = max$\{|F_0(x) - S(x-1)|\};\{|S(x) - F_0(x)|\}$

   dengan

$F_0(x) - S(x-1)$ untuk $F_0(x) \geq S(x)$ dan

$S(x) - F_0(x)$ untuk $F_0(x) < S(x)$

$S(x)$: distribusi frekuensi kumulatif kedatangan kasus tilang.

$F_0(x)$: distribusi kumulatif kedatangan kasus tilang Poisson.

Membandingkan nilai DN dengan nilai kritis DN*(α) dari Tabel *Kolmogorov-Smirnov*.

4. Kriteria Uji

   Tolak H_0 jika nilai DN > nilai DN*(α), atau

   Tolak H_0 jika P (d > DN) < α

B. Uji Distribusi waktu pelayanan

1. Menentukan Hipotesa

   H_0 : Distribusi waktu pelayanan kasus tilang adalah eksponensial

   H_1 : Distribusi waktu pelayanan kasus tilang tidak berdistribusi eksponensial

2. Menentukan taraf signifikansi

   Dalam hal ini taraf signifikansi α yang dipakai adalah 5%

3. Statistik Uji

   DN = max{$|F_0(x) - S(x-1)|$};{$|S(x) - F_0(x)|$}

   dengan

   $F_0(x) - S(x-1)$ untuk $F_0(x) \geq S(x)$ dan

   $S(x) - F_0(x)$ untuk $F_0(x) < S(x)$

$S(x)$: distribusi frekuensi kumulatif waktu pelayanan kasus tilang.

$F_0(x)$: distribusi kumulatif waktu pelayanan kasus tilang eksponensial.

Membandingkan nilai DN dengan nilai kritis DN*(α) dari Tabel *Kolmogorov-Smirnov*.

4. Kriteria Uji

   Tolak H_0 jika nilai DN > nilai DN*(α), atau

   Tolak H_0 jika P (d > DN) < α

2.7.2 Uji Chi Kuadrat

Uji chi kuadrat dapat digunakan untuk variabel acak diskrit maupun kontinu, uji ini didasarkan atas perbandingan fungsi kepadatan probabilitas dari fungsi kepadatan kumulatif.

Uji hipotesis :

H_0 : Distribusi yang diamati sama dengan distribusi yang diduga

H_1 : Distribusi yang diamati tidak sama dengan distribusi yang diduga

Taraf signifikansi :

$\alpha = 0.05$

Statistik uji :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

df = k-1-c

f_0 = frekuensi hasil pengamatan

f_e = frekuensi yang diduga

k = banyaknya kategori

c = banyaknya parameter yang diestimasi dari data sampel

Kriteria uji :

Tolak H_0 jka $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,df}$ atau

Tolak H_0 jika nilai P $(X > \chi^2) < \alpha = 0.05$ *(Daniel, 1999)*.