BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 ALJABAR BOOLEAN

Himpunan dan proposisi, kedua-duanya mempunyai sifat yang serupa, yaitu memenuhi operasi-operasi yang identik. Operasi ini adalah operasi yang digunakan untuk mendefinisikan suatu struktur matematika abstrak yang dinamakan suatu aljabar boolean.

Definisi 2.1

Aljabar boolean merupakan suatu sistem aljabar $(B_2, \cup, ., -, 0, 1)$, dengan :

B_2 : kisi boolean

$\cup$: operasi union

. : operasi konjungsi

$\overline{x}$: operasi komplemen dari x.

Definisi 2.2

Dua elemen aljabar boolean dinotasikan sebagai himpunan B_2 yang terdiri dari elemen-elemen $\{0,1\}$.

Sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma :

1. Untuk x dan y pada B_2, $x \cup y = y \cup x$
2. Untuk x dan y pada B_2, $x \,.\, y = y \,.\, x$
3. Untuk x ,y dan z pada B_2, $x \,.\, (y \cup z) = x \,.\, y \cup x \,.\, z$

4. Untuk x ,y dan z pada B_2, $x \cup (y . z) = (x \cup y) . (x \cup z)$
5. Untuk x pada B_2, $x \cup 0 = x$
6. Untuk x pada B_2, $x . 0 = 0$
7. Untuk x pada B_2, $x \cup \overline{x} = 1$
8. Untuk x pada B_2, $x . \overline{x} = 0$
9. Untuk x pada B_2, $x . 1 = x$
10. Untuk x pada B_2, $x \cup 1 = 1$
11. $0 \neq 1$

2.1.1 DUAL DARI SEBUAH ALJABAR BOOLEAN

Dual dari sembarang pernyataan dari suatu aljabar boolean $(B_2, \cup, ., -, 0, 1)$ adalah pernyataan yang diturunkan dengan mempertukarkan $\cup$ dengan . , dan elemen-elemen 1 dan 0, atau sebaliknya.

Contoh 2.1

Diberikan pernyataan $(1 \cup x) . (y \cup 0) = y$, maka dual dari pernyataan ini adalah $(0 . x) \cup (y . 1) = y$.

2.1.2 THEOREMA-THEOREMA DASAR

Sifat-sifat suatu aljabar boolean $(B_2, \cup, ., -, 0, 1)$ merupakan konsekwensi langsung dari aksioma-aksioma diatas. Adapun sifat-sifatnya sebagai berikut :

Theorema 2.1

Hukum idempotensi (1) $x \cdot x = x$ (2) $x \cup x = x$

Bukti

(1) $x = x \cdot 1$

$= x \cdot (x \cup \overline{x})$

$= (x \cdot x) \cup (x.\overline{x})$

$= (x \cdot x) \cup 0$

$= x \cdot x$

(2) $x = x \cup 0$

$= x \cup (x.\overline{x})$

$= (x \cup x)\,(x \cup \overline{x})$

$= (x \cup x) \cdot 1$

$= x \cup x$

Theorema 2.2

Keunikan komplemen jika $x \cup y = 1$ dan $x \cdot y = 0$ maka $y = \overline{x}$

Bukti

(1) $y = y \cup 0$

$= y \cup (x.\overline{x})$

$= (y \cup x)\,(y \cup \overline{x})$

$= 1 \cdot (y \cup \overline{x})$

$= (y \cup \overline{x})$

(2) $\overline{x} = \overline{x} \cup 0$

$= \overline{x} \cup (x \cdot y)$

$= (x \cup \overline{x}) \cdot (\overline{x} \cup y)$

$= 1 \cdot (\overline{x} \cup y)$

$= y$

Theorema 2.3

Hukum involusi $(\overline{\overline{x}}) = x$

Bukti

$\overline{x} \cup x = x \cup \overline{x} = 1$, dan $\overline{x} \cdot x = x \cdot \overline{x} = 0$

Dengan menggunakan theorema 2.2 dan menggantikan $x = \overline{x}$, $y = x$

(1) $x = x \cup 0$

$= x \cup \left(\bar{x}.\left(\bar{\bar{x}}\right)\right)$

$= (x \cup \bar{x})\left(\bar{x} \cup \left(\bar{\bar{x}}\right)\right)$

$= 1 . \left(x \cup \left(\bar{\bar{x}}\right)\right)$

$= \left(x \cup \left(\bar{\bar{x}}\right)\right)$

(2) $\left(\bar{\bar{x}}\right) = \left(\bar{\bar{x}}\right) \cup 0$

$= \left(\bar{\bar{x}}\right) \cup ((\bar{x}) . x)$

$= \left(\left(\bar{\bar{x}}\right) \cup \bar{x}\right).\left(\left(\bar{\bar{x}}\right) \cup x\right)$

$= 1 . \left(\left(\bar{\bar{x}}\right) \cup x\right)$

$= x$

Theorema 2.4

Hukum absorsi (1) $x . (x \cup y) = x$ (2) $x \cup (x . y) = x$

Bukti

(1) $x . (x \cup y) = (x \cup 0) . (x \cup y)$

$= x \cup (0 . y)$

$= x \cup 0$

$= x$

(2) $x \cup (x . y) = (x . 1) \cup (x . y)$

$= x . (1 \cup y)$

$= x . 1$

$= x$

Theorema 2.5

Hukum De Morgan (1) $\left(\overline{x \cup y}\right) = \bar{x}.\bar{y}$ (2) $\left(\overline{x.y}\right) = \left(\bar{x} \cup \bar{y}\right)$

Bukti

$(x.y) \cup (\bar{x} \cup \bar{y}) = (\bar{x} \cup \bar{y}) \cup (x.y) = 1$, dan $(x.y).(\bar{x} \cup \bar{y}) = (\bar{x} \cup \bar{y}).(x.y) = 0$

(1) Menggunakan theorema 2.2 dan mengganti $x = (x \cup y)$, dan $y = \bar{x} . \bar{y}$

(i) $\bar{x} . \bar{y} = \bar{x} . \bar{y} \cup 0$ (ii) $\left(\overline{x \cup y}\right) = \left(\overline{x \cup y}\right) \cup 0$

$= (\bar{x}.\bar{y}) \cup ((x \cup y).(\overline{x \cup y}))$ $\qquad$ $= (\overline{x \cup y}) \cup ((\bar{x}.\bar{y}).(x \cup y))$

$= (\bar{x}.\bar{y}) \cup (\overline{x \cup y})$ $\qquad$ $= (\bar{x}.\bar{y})$

(2) Dengan mengunakan theorema 2.2 dan menganti $x = x.y$ dan $y = \bar{x} \cup \bar{y}$

(i) $\bar{x} \cup \bar{y} = (\bar{x} \cup \bar{y}) \cup 0$ $\qquad$ (ii) $(\overline{x.y}) = (\overline{x.y}) \cup 0$

$= (\bar{x} \cup \bar{y}) \cup ((x.y).(\overline{x.y}))$ $\qquad$ $= (\overline{x.y}) \cup ((\bar{x} \cup \bar{y})(x.y))$

$= (\bar{x} \cup \bar{y}) \cup (\overline{x.y})$ $\qquad$ $= (\overline{x.y}) \cup (\bar{x} \cup \bar{y})$

$(\overline{x.y}) = \bar{x} \cup \bar{y}$

2.2 FUNGSI BOOLEAN

Misalkan $(B_2, \cup, ., -, 0, 1)$ adalah suatu aljabar boolean. Suatu pernyataan boolean di dalam $(B_2, \cup, ., -, 0, 1)$ diberikan dengan definisi-definisi :

Definisi 2.3

1. 0 dan 1 adalah pernyataan boolean.
2. $x_1^1, x_1^0, \ldots, x_n^1, x_n^0$ adalah pernyataan boolean.
3. Jika E_1 dan E_2 adalah pernyataan boolean, maka $E_1 \cup E_2$, $E_1 . E_2$, dan $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ juga pernyataan boolean

Definisi 2.4

Pernyataan boolean yang tidak memuat disjungsinya disebut konjungsi dasar.

Contoh 2.2 : $x^0y^0z^0, x^1, y^0, 0, 1, x_1^1 \ldots . x_n^1$.

Definisi 2.5

Pernyataan boolean yang tidak memuat konjungsinya disebut disjungsi dasar.

Contoh 2.3 : $x^0 \cup y^0 \cup z^0, x^1, y^0, 0, 1, x_1^1 \cup .. \cup x_n^1$.

Definisi 2.6

Sebuah disjungsi dari konjungsi dasar dinyatakan $C_1 \cup C_2 \cup ... C_r$, dengan $C_1 ... C_r$ adalah konjungsi dasar disebut bentuk disjungsi.

Contoh 2.4 : $x^0y^0z^0 \cup x^0y^0z^0 \cup x^0y^0z^0$

Definisi 2.7

Sebuah konjungsi dari disjungsi dasar dinyatakan $C_1C_2...C_r$, dengan $C_1...C_r$ adalah disjungsi dasar disebut bentuk konjungsi.

Contoh 2.5 : $x^0 \cup y^0 \cup z^0 .\ x^0 \cup y^0 \cup z^0 .\ x^0 \cup y^0 \cup z^0$

Untuk dapat menspesifikasikan suatu fungsi melalui suatu pernyataan boolean $f(x_1, ..., x_n)$. Misalkan setiap pemberian nilai-nilai perubah $x_1, ..., x_n$ merupakan suatu pasangan terurut dengan n-tupel di dalam daerah asal, dan nilai pernyataannya adalah bayanganya didalam daerah hasil, maka diberikankan suatu definisi fungsi boolean :

Definisi 2.8

Suatu fungsi boolean f didefinisikan sebagai suatu pemetaan

$$f : B_2^n = B_2 x ... x B_2 \rightarrow B_2,$$

dengan x : perkalian orde parsial

yaitu suatu fungsi yang setiap variabel dan harganya pada B_2.

Contoh 2.6

Fungsi boolean dengan 3-tupel f (x, y, z) dinyatakan dengan tabel 2.1 berikut :

x	y	z	f (x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabel 2.1

Dari tabel 2.1 fungsi booleannya dapat dituliskan sebagai berikut :

$= \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z}$

$= \overline{x}\overline{z}(\overline{y} + y) + x\overline{z}(y + \overline{y}) + x\overline{y}z$

$= \overline{x}\overline{z} + x\overline{z} + x\overline{y}z$

$= \overline{z} + x\overline{y}z$

Theorema 2.6

Setiap fungsi boolean f dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2.1)}$$

dengan $\bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ merupakan disjungsi yang meliputi 2^n nilai vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n$ yang mungkin.

Bukti

Dengan menggunakan rumus $x^0 = \overline{x}$ dan $x^1 = x$, $\overline{0} = 1$ dan $\overline{1} = 0$.

Maka untuk $\alpha, \beta \in B_2^n$ sedemikian hingga berlaku :

$$\alpha^{\beta} = \begin{cases} 1, \text{ jika } \alpha = \beta \\ 0, \text{ jika } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Sehingga untuk $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B_2$, maka didapatkan :

$$x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, \text{ jika } x_1 = \alpha_1,\ldots,x_n = \alpha_n \\ 0, \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

karena $\alpha = \beta$, maka didapatkan $x_1 = \beta_1,\ldots,x_n = \beta_n$ dan jika disubtitusikan pada persamaan (2.1),diperoleh $f(\beta_1,\ldots,\beta_n)\beta_1^{\beta_1} \ldots\ldots \beta_n^{\beta_n} = f(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. (terbukti).

2.3 FUNGSI PSEUDO - BOOLEAN

Pada prinsinya fungsi pseudo boolean adalah identik dengan fungsi boolean, yaitu nilai dari setiap variabelnya berupa boolean, tetapi harga dari fungsinya berupa real. Maka didefinisikan dengan :

Definisi 2.9

Misalnya R adalah himpunan bilangan real, suatu fungsi pseudo-boolean didefinisikan sebagai suatu fungsi :

$$f: B_2^n \to R,$$

adalah suatu fungsi berharga real dengan variabel bivalent.

Theorema 2.8

Setiap fungsi pseudo-boolean dapat dituliskan sebagai polinomial berbentuk linier untuk setiap variabelnya.

$f(x_1,\ldots,x_n) = x_i g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) + h(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n).$

Bukti

Diberikan x_i variabel yang bivalen [0 , 1], sehingga setiap x_i berlaku :

$$g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n), \text{ untuk } x_i = 1 \\ \\ -f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n), \text{ untuk } x_i = 0. \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2)$$

Karena fungsi pseudo boolean merupakan variabel bivalen [0,1], maka $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ merupakan fungsi pseudo boolean bivalen, sehingga dari persamaan (2.2) $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ merupakan selisih interval dari variabel bivalen [0,1], sehingga diperoleh :

$g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$= f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n).$

Untuk membedakan variabel bivalen $x_i = 1$ dan $x_i = 0$, misalkan untuk

$f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) = h(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, sehingga diperoleh:

$g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$

$= f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) - h(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n).$

Dengan mengeluarkan variabel x_i dari $g(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$, maka $x_i g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n) - h(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$.

Dengan menambahkan fungsi pseudo boolean $h(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ pada masing-masing ruas maka diperoleh :

$x_i g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)+h(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$. Maka $f(x_1,\dots,x_n) = x_i g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) + h(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$.

Setiap fungsi pseudo boolean dapat dituliskan sebagai polinomial yang linier.

Theorema 2.9

Setiap fungsi boolean f dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.3)$$

dengan $\sum\limits_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ meliputi 2^n nilai vektor $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in B_2^n$, dan koefisien $C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Bukti

Dengan menggunakan rumus $x^0 = \overline{x}$ dan $x^1 = x$, $\overline{0} = 1$ dan $\overline{1} = 0$.

Maka untuk $\alpha, \beta \in B_2^n$ sedemikian hingga berlaku :

$$\alpha^{\beta} = \begin{cases} 1, \text{ jika } \alpha = \beta \\ 0, \text{ jika } \alpha \neq \beta . \end{cases}$$

Sehingga untuk $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in B_2$, maka didapatkan :

$$x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1 \text{, jika } x_1 = \alpha_1,\ldots,x_n = \alpha_n \\ 0 \text{, yang lainnya} \end{cases}$$

karena $\alpha = \beta$, maka didapatkan $x_1 = \beta_1,\ldots,x_n = \beta_n$ dan disubtitusikan pada persamaan (2.3). Sehingga $C_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \beta_1^{\beta_1} \ldots\ldots \beta_n^{\beta_n} = f(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. (terbukti)

Contoh 2.7

Fungsi pseudo-boolean dengan 3-tupel $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1\bar{x}_2 + 6x_1x_3 - 5\bar{x}_2\bar{x}_3$, fungsi diatas dapat juga dituliskan dalam bentuk tabel 2.2 sebagai berikut :

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	-5
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	-3
1	0	1	8
1	1	0	0
1	1	1	6

Tabel 2.2

Dengan mengingat $\bar{x} = 1 - x$, persamaan diatas dapat juga dituliskan :

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1\bar{x}_2 + 6x_1x_3 - 5\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$= 2x_1 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 5(1 - x_3 - x_2 + x_2x_3)$$

$$= -5 + 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 5x_2x_3$$

atau dari tabel dapat juga dituliskan :

$$f(x_1,x_2,x_3) = -5\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 - 3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + 8x_1\bar{x}_2x_3 + 6x_1x_2x_3.$$

2.4 PERSAMAAN LINIER PSEUDO-BOOLEAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang fungsi pseudo-boolean linier, yaitu fungsi pseudo-boolean dengan variabel bivalent (0,1) yang berderajat tunggal. Bentuk umum dari persamaan linier pseudo-boolean adalah :

$$a_1 z_1 + b_1 \bar{z}_1 + \ldots + a_n z_n + b_n \bar{z}_n = k \quad \ldots\ldots \quad (2.4)$$

dengan a_i, b_i, k = konstanta

$i = 1,2,\ldots,m$, untuk $a_i \neq b_i$

Untuk setiap i dimisalkan dengan :

$$x_i = \begin{cases} z_i & \text{, jika } a_i > b_i \\ \bar{z}_i & \text{, jika } a_i < b_i \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (2.5)$$

Maka bentuk $a_i z_i + b_i \bar{z}_i$ dapat ditransformasikan sebagai berikut :

$$a_i z_i + b_i \bar{z}_i = \begin{cases} (a_i - b_i) x_i + b_i & \text{, jika } a_i > b_i \\ (b_i - a_i) x_i + a_i & \text{, jika } a_i < b_i \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh transformasi persamaan (2.4) menjadi

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = d \quad \ldots\ldots \quad (2.7)$$

dengan $c_i = a_i - b_i$, $d = k - \sum_{i=1}^{n} b_i$, untuk $a_i > b_i$

$c_i = b_i - a_i$, $d = k - \sum_{i=1}^{n} a_i$, untuk $a_i < b_i$

dan a_i, b_i, c_i, d, k = konstanta, $c_i > 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$).

Dengan mengurutkan secara menurun diasumsikan bahwa $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n > 0$.

contoh 2.8

Tentukan transformasi persamaan $-3y_1 + 3y_2 - 2y_2 = -3$.

Penyelesaian

Pandang persamaan (2.4), dengan menggantikan variabel z dengan y, maka diperoleh bentuk yang identik, yaitu : $a_1 y_1 + b_1 \bar{y}_1 + ... + a_n y_n + b_n \bar{y}_n = k$.

Untuk n = 1, yaitu :

$a_1 y_1 + b_1 \bar{y}_1 = -3y_1$, sehingga diperoleh a_1 = -3 dan b_1 = 0, dan dapat disimpulkan $a_1 < b_1$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_1 = \bar{y}_1$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_1 y_1 + b_1 \bar{y}_1$ dapat ditransformasikan menjadi : $(b_1 - a_1)x_1 + a_1 = (0-(-3))\bar{y}_1 + (-3)$

$$= 3\bar{y}_1 - 3.$$

Untuk n = 2, yaitu :

$a_2 y_2 + b_2 \bar{y}_2 = 3y_2$, sehingga diperoleh a_2 = 3 dan b_2 = 0, dan dapat disimpulkan $a_2 > b_2$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_2 = y_2$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_2 y_2 + b_2 \bar{y}_2$ dapat ditransformasikan menjadi : $(a_2 - b_2)x_2 + b_2 = (3-0)y_2 + 0$

$$= 3y_2.$$

Untuk n = 3, yaitu :

$a_3 y_3 + b_3 \bar{y}_3 = -2y_3$, sehingga diperoleh a_3 = -2 dan b_3 = 0, dan dapat disimpulkan $a_3 < b_3$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_3 = \bar{y}_3$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_3 y_3 + b_3 \overline{y}_3$ dapat ditransformasikan menjadi :

$$(b_3 - a_3)x_3 + a_3 = (0-(-2))\overline{y}_3 + (-2)$$

$$= 2\overline{y}_3 - 2.$$

Dari n =1,2,3 dapat disimpulkan bahwa persamaan $-3y_1 + 3y_2 - 2y_2 = -3$ dapat ditransformasikan menjadi :

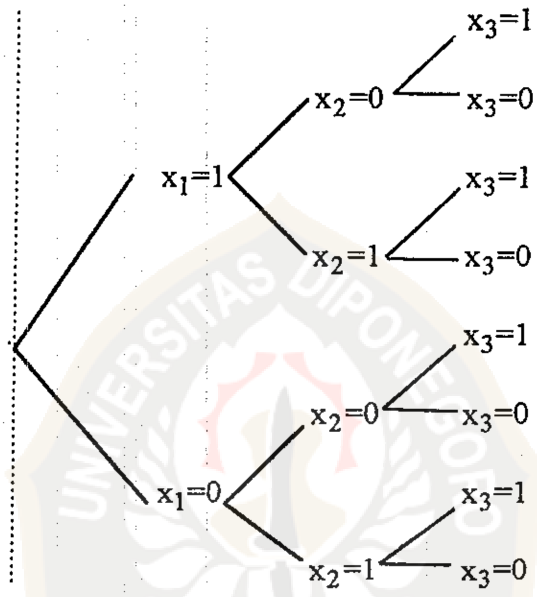
$$3\overline{y}_1 - 3 + 3y_2 + 2\overline{y}_3 - 2 = -3$$

$$3\overline{y}_1 + 3y_2 + 2\overline{y}_3 = -3 + 5$$

$$3\overline{y}_1 + 3y_2 + 2\overline{y}_3 = 2$$

dengan $x_1 = \overline{y}_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = \overline{y}_3$. Sehingga diperoleh bentuk transformasinya sebagai berikut : $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$.

Untuk menyelesaikan bentuk kanonik (2.7), dengan melihat bahwa $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n > 0$, yaitu menelusuri penyelesaian persamaan (2.7) sepanjang cabang dari pohon pada sebagai berikut:



Gambar 1

Pohon dari gambar 1 mempunyai n+1 tingkatan . Masing-masing tingkatan r terdiri dari 2^r titik, yang setiap titik dari tingkatan r dikarakteristikan berdasarkan nilai variabel $x_1,...,x_r$ tertentu (misal $x_1 = \xi_1,...,x_r = \xi_r$). Variabel $x_{r+1},...,x_n$ sebagai variabel yang akan diselesaikan dengan persamaan

$$\sum_{j=r+1}^{n} c_j x_j = d' \quad \text{..} \qquad (2.8)$$

dengan $d' = d - \sum_{k=1}^{r} c_k \xi_k$, yang didapat dari persamaan (2.8).

Untuk menentukan penyelesaiaan persamaan (2.7) tidak mungkin menelusuri semua kemungkinan sebanyak 2^r dari konstruksi pohon bercabang

Gambar 1. Maka untuk menyelesaikan persamaan (2.7) menggunakan sistematika sebagai berikut :

No.	Masalah	Kesimpulan
1	$d < 0$	Tidak mempunyai penyelesaian
2	$d = 0$	Penyelesaian tunggal $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$
3	$d > 0$ dan $c_1 \geq \ldots \geq c_p > d \geq c_{p+1} \geq \ldots \geq c_n$	$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ dan $\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j = d$
4	$d > 0$ dan $c_1 = \ldots = c_p = d > c_{p+1} \geq \ldots \geq c_n$	1. Untuk setiap $k = 1,2,\ldots,p$; $x_k = 1$ $x_1 = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ 2. Penyelesaian lainnya (jika ada) $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ dan $\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j = d$
5	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i < d$	Tidak mempunyai penyelesaian
6	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$	Penyelesaian tunggal $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$
7	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{i=2}^{n} c_i < d$	Penyelesaiannya adalah $x_1 = 1$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j = d - c_i$
8	$d > 0,\ c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{i=2}^{n} c_i \geq d$	Penyelesaiannya $x_1 = 1$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j = d - c_i$ atau $x_1 = 0$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j = d$

Tabel 2.3

(Dikutip dari buku Boolean Methods in Operations Research, Peter L. Hammer, 1968)

Tabel 2.3 digunakan untuk menyelesaiakan persamaan (2.8) dengan 8 kasus yang berbeda dan untuk menghindari semua kemungkinan sebanyak 2^r.

Kecuali persamaan (2.8) yang tidak konsisten (tidak mempunyai penyelesaian) dan mempunyai penyelesaiaan tunggal, harus ditelusuri dengan menggunakan kesimpulan pada tabel 2.3 untuk persamaan-persamaan baru yang dihasilkan pada langkah pertama. Proses ini diulang sampai semua kemungkinan pada tabel 2.3 terpenuhi.

Contoh 2.9

Tentukan penyelesaian persamaan pseudo-boolean linier sebagai berikut

$$4z_1 + \bar{z}_1 - 3z_2 + \bar{z}_2 + 5z_3 - 2z_4 + 5z_5 = 7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.9)$$

Penyelesaian

Pandang persamaan (2.4), kemudian akan diuraikan untuk tiap-tiap n sebagai berikut :

Untuk n = 1, yaitu :

$a_1z_1 + b_1\bar{z}_1 = 4z_1 + \bar{z}_1$, sehingga diperoleh $a_1 = 4$ dan $b_1 = 1$, dan dapat disimpulkan $a_1 > b_1$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_1 = z_1$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_1z_1 + b_1\bar{z}_1$ dapat ditransformasikan menjadi : $(a_1 - b_1)x_1 + b_1 = (4-1)z_1 + 1$

$$= 3z_1 + 1.$$

Untuk n = 2, yaitu :

$a_2z_2 + b_2\bar{z}_2 = -3z_2 + \bar{z}_2$, sehingga diperoleh $a_2 = -3$ dan $b_2 = 1$, dan dapat disimpulkan $a_2 < b_2$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_2 = \bar{z}_2$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_2z_2 + b_2\bar{z}_2$ dapat ditransformasikan menjadi : $(b_2 - a_2)x_2 + a_2 = (1-(-3))\bar{z}_2 + (-3)$

$$= 4\bar{z}_2 - 3.$$

Untuk n = 3, yaitu :

$a_3 z_3 + b_3 \bar{z}_3 = 5z_3$, sehingga diperoleh $a_3 = 5$ dan $b_3 = 0$, dan dapat disimpulkan $a_3 > b_3$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_3 = z_3$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_3 z_3 + b_3 \bar{z}_3$ dapat ditransformasikan menjadi : $(a_3 - b_3)x_3 + b_3 = (5-0)z_3 + 0$

$$= 5z_3.$$

Untuk n = 4, yaitu :

$a_4 z_4 + b_4 \bar{z}_4 = -2z_4$, sehingga diperoleh $a_4 = -2$ dan $b_4 = 0$, dan dapat disimpulkan $a_4 < b_4$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_4 = \bar{z}_4$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_4 z_4 + b_4 \bar{z}_4$ dapat ditransformasikan menjadi : $(b_4 - a_4)x_4 + a_4 = (0-(-2))\bar{z}_4 + (-2)$

$$= 2\bar{z}_4 - 2.$$

Untuk n = 5, yaitu :

$a_5 z_5 + b_5 \bar{z}_5 = 5z_2$, sehingga diperoleh $a_5 = 5$ dan $b_5 = 0$, dan dapat disimpulkan $a_5 > b_5$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_5 = z_5$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_5 z_5 + b_5 \bar{z}_5$ dapat ditransformasikan menjadi : $(a_5 - b_5)x_5 + b_5 = (5-0)z_5 + 0$

$$= 5z_5.$$

Sehingga dari n =1,2,…,5 dapat disimpulkan bahwa persamaan $4z_1 + \bar{z}_1 - 3z_2 + \bar{z}_2 + 5z_3 - 2z_4 + 5z_5 = 7$ dapat ditransformasikan sebagai berikut :

$$(3z_1+1)+(4\bar{z}_2-3)+5z_3+(2\bar{z}_4-2)+5z_5=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.10)$$

$(3z_1)+(4\bar{z}_2)+5z_3+(2\bar{z}_4)+5z_5=11$, dari persamaan (2.10) dilakukan pengurutan secara menurun, sehingga didapatkan :

$$5x_1+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5=11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.11)$$

dengan
$$\begin{aligned} x_1 &= z_3 \\ x_2 &= z_5 \\ x_3 &= \bar{z}_2 \\ x_4 &= z_1 \\ x_5 &= \bar{z}_4. \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.12)$$

Persamaan (2.11) identik dengan persamaan (2.7), sehingga didapatkan $c_1=5, c_2=5, c_3=4, c_4=3, c_5=2, d=11.$ Menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.8, yaitu $d>0, c_i<d, \sum_{i=1}^{5} c_i > d,$ dan $\sum_{i=2}^{5} c_i \geq d,$ sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_1=1$, dan $x_1=0$, maka

$$5x_2+4x_3+3x_4+2x_5=6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.13)$$

$$5x_2+4x_3+3x_4+2x_5=11. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.14)$$

Dari persamaan (2.13) diperoleh $c_2=5, c_3=4, c_4=3, c_5=2, d=6.$ Menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.8, yaitu $d>0, c_i<d, \sum_{i=2}^{5} c_i > d,$ dan $\sum_{i=3}^{5} c_i \geq d,$ sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_2=1$ dan $x_2=0$, maka

$$4x_3+3x_4+2x_5=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.15)$$

$$4x_3+3x_4+2x_5=6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.16)$$

untuk persamaan (2.15) diperoleh $c_3=4, c_4=3, c_5=2, d=1.$ Menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.3, yaitu $d>0, c_3 \geq c_4 \geq c_5 > d$, sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Dari persamaan (2.11), (2.13), (2.15) diperoleh penyelesaiannya :

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0.$ .... (2.17)

Kemudian proses kembali pada persamaan (2.16), sehingga diperoleh $c_3 = 4, c_4 = 3, c_5 = 2, d = 6$. Menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.7, yaitu $d > 0, c_i < d, \sum_{i=3}^{5} c_i > d$, dan $\sum_{i=4}^{5} c_i < d$ sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_3 = 1$, maka

$$3x_4 + 2x_5 = 2 \qquad \text{...} \quad (2.18)$$

untuk persamaan (2.18), menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.3, yaitu $d > 0, c_4 > d \geq c_5$, sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_4 = 0$, maka

$$2x_5 = 2 \qquad \text{......................................} \quad (2.19)$$

untuk persamaan (2.19) menurut tabel 2.3 sesuai kasus no.6, sehingga diperoleh penyelesaiannya penyelesaiaan $x_5 = 1$. Dari persamaan (2.11), (2.16), (2.18), dan (2.19) diperoleh penyelesaianya :

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1.$ .... (2.20)

Kemudian proses kembali pada persamaan (2.14), sehingga diperoleh $c_2 = 5, c_3 = 4, c_4 = 3, c_5 = 2, d = 11$. Menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.7, yaitu $d > 0, c_i < d, \sum_{i=3}^{5} c_i > d$, dan $\sum_{i=4}^{5} c_i < d$ sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_2 = 1$, maka

$$4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6 \qquad \text{..........................} \quad (2.21)$$

Untuk persamaan (2.21), sehingga diperoleh $c_3 = 4, c_4 = 3, c_5 = 2, d = 6$. Menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.7, yaitu $d > 0, c_i < d, \sum_{i=3}^{5} c_i > d$, dan $\sum_{i=4}^{5} c_i < d$ sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_3 = 1$, maka

$$3x_4 + 2x_5 = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.22)$$

untuk persamaan (2.22), menurut tabel 2.3 sesuai dengan kasus no.3, yaitu $d > 0, c_4 > d \geq c_5$, sehingga diperoleh penyelesaiannya $x_4 = 0$, maka

$$2x_5 = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.23)$$

untuk persamaan (2.23) menurut tabel 2.3 sesuai kasus no.6, sehingga diperoleh penyelesaiannya penyelesaiaan $x_5 = 1$. Dari persamaan (2.14), (2.21), (2.22), dan (2.23) diperoleh penyelesaianya :

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.24)$$

Semua kemungkinan telah ditelusuri dan didapatkan semua penyelesaiaannya. Kemudian penyelesaian yang diperoleh dibawa ke bentuk aslinya, sehingga didapatkan penyelesaian dari persamaan (2.9), dalam bentuk tabel 2.4 sebagai berikut:

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1

Tabel 2.4

2.5 PERTIDAKSAMAAN LINIER PSEUDO-BOOLEAN

Bentuk umum dari pertidaksamaan linier pseudo-boolean adalah :

$a_1z_1 + b_1\bar{z}_1 + \ldots + a_nz_n + b_n\bar{z}_n > h$ .... (2.25)

atau

$a_1z_1 + b_1\bar{z}_1 + \ldots + a_nz_n + b_n\bar{z}_n \geq k$ .... (2.2 6)

dengan a_i, b_i, k, h = konstanta , $i = 1,2,\ldots,m$.

untuk setiap i, diasumsikan bahwa $a_i \neq b_i$. Jika pertidaksamaannya berbentuk $<$ dan $\leq$, maka masing-masing pertidaksamaannya dikalikan dengan (-1). Pada dasarnya penyelesaian pertidaksamaan linier pseudo boolean adalah sama dengan persamaan linier pseudo boolean. Yaitu tidak mengikuti semua kemungkinan 2^r yang ada, tetapi mengikuti sistematika yang akan didefinisikan seperti pada persamaan linier pseudo boolean. Dalam hal ini hanya dibatasi untuk pertidaksamaan (2.26), dan penyelesaian yang dihasilkan akan dikelompokan ke dalam "keluarga penyelesaian".

Definisi 2.10

Misalkan $S = (z_1^*,\ldots,z_n^*)$ sebagai penyelesaian dari (2.26) dan I sebagai kumpulan indek : $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Misalkan juga $\Sigma(S,I)$ sebagai kumpulan semua vektor $(z_1,\ldots,z_n) \in B_2^n$ yang memenuhi $z_i = z_i^*$, untuk semua $i \in I$, variabel lainnya $z_j(j \notin I)$ sebagai variabel sembarang. Jika semua vektor $(z_1,\ldots,z_n) \in \Sigma(S,I)$ memenuhi pertidaksamaan (2.26), maka $\Sigma(S,I)$ dikatakan sebagai keluarga penyelesaian dari pertidaksamaan (2.26). Dapat dikatakan juga, bahwa keluarga ini dibentuk oleh pasangan (S , I), dan variabel z_i untuk $i \in I$ disebut variabel tertentu.

Tidak mudah untuk mendapatkan keluarga penyelesaian langsung dari pertidaksamaan (2.26). Untuk mengurangi kesulitan tersebut langkah pertama dengan memasukan ke dalam bentuk standart, untuk setiap z_i ditranformasikan pada persamaan (2.5) dan (2.6).

Kemudian didapatkan bentuk kanoniknya :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq d \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.27)$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_n, d$ = konstanta, dan $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$.

Contoh 2.10

Tentukan transformasi persamaan $3y_1 - 3y_2 + 2y_2 \geq 3$.

Penyelesaian

Pandang persamaan (2.4), dengan menggantikan variabel z dengan y, maka diperoleh bentuk yang identik, yaitu : $a_1y_1 + b_1\overline{y}_1 + \ldots + a_ny_n + b_n\overline{y}_n = k$.

Untuk n = 1, yaitu :

$a_1y_1 + b_1\overline{y}_1 = 3y_1$, sehingga diperoleh $a_1 = 3$ dan $b_1 = 0$, dan dapat disimpulkan $a_1 > b_1$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_1 = y_1$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_1y_1 + b_1\overline{y}_1$ dapat ditransformasikan menjadi : $(a_1 - b_1)x_1 + b_1 = (3 - 0)y_1 + 0$

$$= 3y_1.$$

Untuk n = 2, yaitu :

$a_2y_2 + b_2\overline{y}_2 = -3y_2$, sehingga diperoleh a_2 = -3 dan b_2 = 0, dan dapat disimpulkan $a_2 < b_2$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_2 = \overline{y}_2$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_2y_2 + b_2\overline{y}_2$ dapat ditransformasikan menjadi : $(b_2 - a_2)x_2 + a_2 = (0-(-3))\overline{y}_2 + (-3)$

$$= 3\overline{y}_2 - 3.$$

Untuk n = 3, yaitu :

$a_3y_3 + b_3\overline{y}_3 = 2y_3$, sehingga diperoleh a_3 = 2 dan b_3 = 0, dan dapat disimpulkan $a_3 > b_3$. Menggunakan persamaan (2.5) didapatkan $x_3 = y_3$, maka dengan menggunakan persamaan (2.6) bentuk $a_3y_3 + b_3\overline{y}_3$ dapat ditransformasikan menjadi :

$$(a_3 - b_3)x_3 + b_3 = (2-0)y_3 + 0$$

$$= 2y_3.$$

Dari n =1,2,3 dapat disimpulkan bahwa pertidaksamaan $3y_1 - 3y_2 + 2y_2 \geq 3$ dapat ditransformasikan menjadi :

$$3y_1 + 3\overline{y}_2 - 3 + 2y_3 \geq 3$$

$$3y_1 + 3\overline{y}_2 + 2y_3 \geq 3 + 3$$

$$3y_1 + 3\overline{y}_2 + 2y_3 \geq 6,$$

dengan $x_1 = y_1, x_2 = \overline{y}_2, x_3 = y_3$. Sehingga diperoleh bentuk transformasi pertidaksamaanya sebagai berikut : $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6$.

Selanjutnya akan diberikan prosedur untuk mendapatkan kelompok penyelesaian dari (2.27) kedalam beberapa penyelesaian dan pasangan keluarga penyelesaian yang terpisah. Kemudian dengan mentranformasikan ke bentuk semula akan didapatkan keluarga penyelesaian dari (2.26).

Definisi 2.11

Suatu $\left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)$ yang memenuhi pertidaksamaan (2.27) disebut penyelesaian dasar (2.27), jika untuk setiap indek i berlaku $x_i^* = 1$, maka $\left(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*,0,x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*\right)$ bukan penyelesaian dari (2.27).

Untuk mendapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan (2.27) terdapat dua tahapan yang harus dilakukan, yaitu :

1. **Menentukan penyelesaian dasar**

Untuk menentukan penyelesaiaan pertidaksamaan (2.27) tidak mungkin menelusuri semua kemungkinan sebanyak 2^r dari konstruksi pohon bercabang gambar 1. Maka untuk menentukan penyelesaian pertidaksamaan (2.27) menggunakan sistematika seperti pada persamaan. Tetapi sebelumnya akan diberikan lemma-lemma sebagai berikut :

Lemma 2.1

Jika $\left(x_1^*,\dots,x_p^*,x_{p+1}^*,\dots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari (2.27), maka $\left(x_{p+1}^*,\dots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari pertidaksamaan $\sum\limits_{j=p+1}^{n} c_j x_j \geq d - \sum\limits_{k=1}^{p} c_k x_k^*$.

Bukti

Misalkan $\left(x_1^*,\dots,x_p^*,x_{p+1}^*,\dots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar (2.27) , dan pertidaksamaannya berbentuk

$$c_1x_1+\dots+c_{p-1}x_{p-1}+c_px_p+c_{p+1}x_{p+1}+\dots+c_nx_n \geq d.$$

Maka $$\sum_{k=1}^{p} c_k x_k^* + c_{p+1}x_{p+1}+\dots+c_nx_n \geq d$$

$$c_{p+1}x_{p+1}+\dots+c_nx_n \geq d - \sum_{k=1}^{p} c_k x_k^*$$

$$\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j \geq d - \sum_{k=1}^{p} c_k x_k^*$$

Sehingga terbukti bahwa $\left(x_{p+1}^*,\dots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari pertidaksamaan $\sum\limits_{j=p+1}^{n} c_j x_j \geq d - \sum\limits_{k=1}^{p} c_k x_k^*$.

Lemma 2.2

Jika $\left(x_{p+1}^*,\dots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari pertidaksamaan $\sum\limits_{j=p+1}^{n} c_j x_j \geq d$, maka $\left(0,\dots,0,x_{p+1}^*,\dots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari (2.27)

Bukti

Misalkan $\left(x_1^*,\ldots,x_p^*,x_{p+1}^*,\ldots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar (2.27) , dan pertidaksamaannya berbentuk :

$$c_1x_1+\ldots+c_{p-1}x_{p-1}+c_px_p+c_{p+1}x_{p+1}+\ldots+c_nx_n \geq d.$$

Menurut lemma 2.1 $\left(x_{p+1}^*,\ldots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari pertidaksamaan $\sum\limits_{j=p+1}^{n} c_jx_j \geq d - \sum\limits_{k=1}^{p} c_kx_k^*$.

Diambil untuk setiap k berlaku $x_k^* = 0$, maka

$$\sum_{j=p+1}^{n} c_jx_j \geq d - \sum_{k=1}^{p} c_kx_k^*$$

$$\sum_{j=p+1}^{n} c_jx_j \geq d - 0$$

dapat disimpulkan $\sum\limits_{k=1}^{p} c_kx_k^* = 0$. Terbukti bahwa $\left(0,\ldots,0,x_{p+1}^*,\ldots,x_n^*\right)$ adalah penyelesaian dasar dari (2.27)

Kemudian diberikan suatu sistematika yang akan digunakan untuk menyelesaiakan pertidaksamaan (2.27).

No	Masalah	Kesimpulan
1	$d \le 0$	Penyelesaian tunggal $x_1 = \ldots = x_n = 0$
2	$d > 0$ $c_1 \ge \ldots \ge c_p > d \ge c_{p+1} \ge \ldots \ge c_n$	1. Untuk setiap $k = 1,2,\ldots,p$; $x_k = 1$, $x_1 = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ 2. Penyelesaian lainnya (jika ada), yaitu $x_1 = \ldots = x_p = 0$ dan $x_{p+1},\ldots,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=p+1}^{n} c_j x_j \ge d$
3	$d > 0$, $c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i < d$	Tidak mempunyai penyelesaian
4	$d > 0$, $c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$	Penyelesaian tunggal $x_1 = \ldots = x_n = 1$
5	$d > 0$, $c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j < d$	Penyelesaian dasar (jika ada) dikarakteristikan dengan sifat $x_1 = 1$ dan $x_2,\ldots,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j \ge d - c_1$
6	$d > 0$, $c_i < d(i = 1,2,\ldots,n)$ dan $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ dan $\sum_{j=2}^{n} c_j \ge d$	Penyelesaian dasar (jika ada) dikarakteristikan dengan sifat $x_1 = 1$ dan $x_2,\ldots,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j \ge d - c_1$, atau $x_1 = 0$ dan $x_2,\ldots,x_n$ adalah solusi dasar dari $\sum_{j=2}^{n} c_j x_j \ge d$

Tabel 2.5

(Dikutip dari buku Boolean Methods in Operations Research, Peter L. Hammer, 1968)

2. Menentukan keluarga penyelesaian yang lengkap dari pertidaksamaan

Untuk setiap pennyelesaian dasar $S = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ dikelompokan ke dalam keluarga penyelesaian $\Sigma\left(S, J_s\right)$ yang didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan i_0 merupakan indek terakhir, dengan $x_i^* = 1$ (yaitu $x_{i_0}^* = 1$ dan $x_i^* = 0$ untuk setiap $i > i_0$) dan J_s merupakan himpunan dari setiap indek $i \leq i_0$. Maka menurut definisi 2.10 $\Sigma\left(S, J_s\right)$ merupakan himpunan semua vektor $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ yang memenuhi

$$x_i = \begin{cases} x_i^* \text{ , untuk } i \leq i_0 \\ \\ \text{sembarang , untuk } i > i_0 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.28)$$

Theorema 2.10

Jika $S_1, \ldots, S_m$ adalah semua penyelesaian dasar dari (2.27) dan $\Sigma_k = \Sigma\left(S_k, J_k\right)$, ($k = 1,2,\ldots,m$) maka setiap penyelesaian $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ dari (2.27) termasuk salah satu keluarga penyelesaian.

Bukti

Misalkan $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ merupakan suatu vektor pada Σ_k , maka $x_i^* = 0$ untuk semua $i > i_0$. Hubungan (2.28) menunjukan bahwa untuk setiap i berlaku $x_i^* \leq x_i$, maka $d \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, yaitu setiap Σ_k adalah keluarga penyelesaian. Jika $S' = \left(x_1', \ldots, x_n'\right)$ dan $S'' = \left(x_1'', \ldots, x_n''\right)$ merupakan penyelesaian dasar, maka terdapat $i \in J_{S'} \cup J_{S''}$ sedemikian hingga $x_i' \neq x_i''$, sehingga

Σ_k merupakan pasangan yang terpisah. Hal ini membuktikan bahwa setiap penyelesaian merupakan salah satu Σ_k .

2.6 FUNGSI KARAKTERISTIK

2.6.1 FUNGSI KARAKTERISTIK PADA KASUS LINIER

Definisi 2.12

Persamaan karakteristik dari $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ adalah persamaan boolean :

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = 1$$

dimana mempuyai solusi yang sama dengan $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$, fungsi boolean $\phi(x_1,\ldots,x_n) = 1$ disebut sebagai fungsi karakteristik dari $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$.

Rumus interpolasi dari fungsi boolean diberikan dalam suatu bentuk :

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n) = \bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \Psi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.29)$$

dengan $\bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ adalah merupakan disjungsi yang meliputi 2^n nilai 0,1 yang mungkin dari $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ dan notasi x^α berarti :

$$x^\alpha = \begin{cases} x\text{ , jika } \alpha = 1 \\ \overline{x}\text{ , jika } \alpha = 0 \end{cases}$$

Dalam lain hal $\Psi\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{1} x_1^{\alpha_1}\ldots\ldots x_n^{\alpha_n}$ .... (2.30)

dengan $\bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{1}$ adalah merupakan disjungsi yang hanya meliputi nilai-nilai $\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$ dengan $\Psi\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 1$.

Karena itu fungsi karakteristik ϕ untuk $\Sigma\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ diberikan dengan formula :

$$\phi\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{\Sigma} x_1^{\alpha_1}\ldots\ldots x_n^{\alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.31)$$

dengan $\bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{\Sigma}$ merupakan disjungsi yang meliputi semua solusi $\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$ dari persamaan $\Sigma\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

2.6.1.1 PERSAMAAN LINIER

Pada kasus persamaan linier dalam penentuan fungsi karakteristiknya langsung dari semua solusinya dengan menggunakan formula

$$\phi\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{\Sigma} x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n}$$

dengan $\bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{\Sigma}$ merupakan disjungsi yang meliputi semua solusi $\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$ dari persamaan $\Sigma\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

2.6.1.2 PERTIDAKSAMAAN LINIER

Penyelesaian pertidaksamaan linier solusinya dikelompokan ke dalam keluarga penyelesaian. $\Im$ adalah keluarga penyelesaian yang didefinisikan sebagai penyelesaian karakteristik dengan variabel yang berharga tertentu, kemudian yang lainya sembarang :

$\Im : x_{h_i} = \xi_{h_i}, \ldots, x_{h_m} = \xi_{h_{m(k)}}$; $x_{h_{m(k)}+k}$ sembarang untuk $k = 1,2,\ldots,m(h)$.

Untuk mendapatkan $\Im_1, \ldots, \Im_n$ sebagai keluarga penyelesaian dengan sifat bahwa himpunan δ dari semua penyelesaian dinyatakan sebagai teori himpunan:

$$\delta = \Im_1 \cup \ldots \cup \Im_p .$$

Jika relasi $\delta = \Im_1 \cup \ldots \cup \Im_p$ dimasukan dan dengan hukum idempotensi rumus (2.31) menjadi

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \bigcup_{h=1}^{p} \; \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Im_h} x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n}$$

Dengan catatan bahwa untuk keluarga $\Im$, rumusnya

$\Im : x_{h_i} = \xi_{h_i}, \ldots, x_{h_m} = \xi_{h_{m(k)}}$; $x_{h_{m(k)}+k}$ sembarang untuk $k = 1,2,\ldots,m(h)$, dinyatakan menjadi :

$$\bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Im_h} x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n} = x_{h_1}^{\xi_{h_1}} \ldots\ldots x_{h_{m(h)}}^{\xi_{h_{m(h)}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.32)$$

Ruas kirinya sama dengan

$$x_{h_1}^{\xi_{h_1}} \ldots\ldots x_{h_m}^{\xi_{h_m}} \bigcup_{(\alpha_{h_{m+1}},\ldots,\alpha_{h_n})} x_{h_{m+1}}^{\xi_{h_{m+1}}} \ldots\ldots x_{h_n}^{\xi_{h_n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.33)$$

dengan $\alpha_{h_{m+1}}, \ldots, \alpha_{h_n}$ diambil untuk semua nilai-nilai 0 dan 1 yang mungkin dan membuat disjungsinya = 1(dimana h_m berlaku juga untuk $h_{m(h)}$). Dengan menggunakan rumus (2.33) bahwa setiap keluarga $\Im_h$ ($h = 1,2,\ldots,p$) adalah karakteristik sebagai konjungsi :

$$x_{h_1}^{\xi_{h_1}} \ldots\ldots x_{h_{m(h)}}^{\xi_{h_{m(h)}}} = C_h . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.34)$$