BAB II

TEORI PENUNJANG

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema-teorema yang menunjang pembahasan mengenai distribusi sebagai berikut.

2.1 KEKONTINUAN

Diberikan f : (a,b) $\rightarrow$ R dan c $\in$ (a,b). Fungsi f dikatakan kontinu di titik c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in$ (a,b) dan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definisi 2.1.1 (Bartle,1982). *Diberikan f : (a,b) $\rightarrow$ R. Jika (c,d) $\subset$ (a,b), fungsi f dikatakan kontinu pada (c,d) jika f kontinu di setiap titik pada (c,d).*

2.2 DERIVATIF FUNGSI

Misalkan (a,b) $\subset$ R, f : (a,b) $\rightarrow$ R dan c $\in$ (a,b). Bilangan f'(c) disebut harga derivatif dari f di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in$ (a,b) dan $|x - c| < \delta$ berlaku $\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)\right| < \varepsilon$. Fungsi f dikatakan terdifferensial di c ke f'(c), ditulis $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 2.2.1 (Bartle,1982). *Jika $f : (a,b) \to R$ mempunyai derivatif di $c \in (a,b)$ maka f kontinu di c.*

Teorema 2.2.2 (Bartle,1982). *Diberikan $f,g: (a,b) \to R$ fungsi-fungsi yang terdifferensial di $c \in (a,b)$, maka:*

1. *Fungsi $f + g$ terdifferensial di c, dan $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$*
2. *Fungsi fg terdifferensial di c, dan $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$*

2.3 KEKONVERGENAN BARISAN FUNGSI

Diberikan barisan fungsi $\{f_n , n \in N\}$yang didefinisikan pada (a,b), $f_n : (a,b) \to R$ untuk setiap n. Barisan fungsi $\{f_n , n \in N\}$dikatakan konvergen ke fungsi $f : (a,b) \to R$ pada (a,b) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in (a,b)$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon,x)$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N(\varepsilon,x)$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dan dinyatakan dengan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Jenis kekonvergenan semacam ini dinamakan **konvergensi titik demi titik**.

Barisan fungsi $\{f_n , n \in N\}$dikatakan **konvergen seragam** pada (a,b) ke fungsi $f : (a,b) \to R$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N(\varepsilon)$ dan $x \in (a,b)$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ditulis $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ seragam pada (a,b).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4 RUANG VEKTOR RIIL

Definisi 2.4.1 (Anton,Howard,1983). *Himpunan tak kosong V dinamakan ruang vektor riil atas lapangan skalar riil K jika untuk setiap* $u,v,w \in V$ *dan skalar riil* α, $\beta \in K$, *penjumlahan* $u+v \in V$ *dan perkalian dengan skalar* $\alpha u \in V$ *terdefinisi, dan aksioma berikut dipenuhi:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v+w) = (u+v) + w$
3. *Terdapat vektor* $\theta \in V$ *sehingga* $\theta + u = u + \theta = u$
4. *Untuk setiap vektor* $u \in V$ *terdapat* $-u \in V$ *sehingga* $u + (-u) = (-u) + u = \theta$
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1.\ u = u$

Teorema 2.4.2 (Anton,Howard,1983). *Jika V ruang vektor maka norma* $\|u\|$ *memenuhi sifat-sifat:*

1. $\|u\| > 0$
2. $\|u\| = 0$ *jhj* $u = \theta$
3. $\|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Ruang vektor yang didalamnya dapat didefinisikan suatu norma dinamakan ruang bernorma. Fungsional f adalah fungsi dari ruang bernorma V ke lapangan skalar K.

Definisi 2.4.3 (Kreyszig,1978). *Fungsional f dikatakan linear jika berlaku $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ dan $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ untuk setiap $u,v \in V$ dan sebarang skalar α, β.*

Definisi 2.4.4 (Kreyszig,1978). *Fungsional f terbatas jika terdapat M sedemikian hingga $|f(u)| \leq M \|u\|$ untuk setiap $u \in V$.*

Teorema 2.4.5 (Griffel,DH,1981).*Fungsional linear adalah kontinu jika hanya jika terbatas.*

Ruang metrik adalah himpunan tak kosong yang didalamnya dapat didefinisikan jarak/metrik d(u,v) yang memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $d(u,v) > 0$
2. $d(u,v) = 0$ jika hanya jika $u = v$
3. $d(u,v) = d(v,u)$
4. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Definisi 2.4.6 (Kreyszig,1978). *Barisan titik (x_n) dalam ruang metrik X dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $m,n > N$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.4.7 (Berberian,1961). *Barisan titik (x_n) dalam ruang metrik X dikatakan konvergen ke titik $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk $n > N$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$. Titik x disebut limit dari barisan x_n, ditulis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$.*

Contoh 2.4.8

Diberikan suatu barisan bilangan / titik $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ dalam ruang metrik R.

Akan ditunjukkan bahwa $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ adalah barisan Cauchy yang konvergen.

Penyelesaian :

- Untuk membuktikan bahwa $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ Cauchy, ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli $N > \frac{2}{\varepsilon}$ sedemikian hingga untuk setiap $m,n \geq N$ berlaku

  $$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Akan dibuktikan bahwa $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ konvergen ke 0.

  Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli $N > \frac{1}{\varepsilon}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Dari uraian di atas, terbukti bahwa $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ adalah barisan Cauchy dan konvergen.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)