BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam bab ini akan dibahas mengenai materi-materi yang mendukung materi pokok sehingga akan mempermudah pemahaman tentang materi yang disajikan. Disini disajikan beberapa definisi dan theorema serta hal-hal lain yang akan memperjelas pengertian. Bab ini terdiri dari tiga subbab yaitu pemetaan, operasi biner dan grup.

2.1. Pemetaan

Konsep sebuah fungsi merupakan dasar untuk memahami semua daerah pada matematik. Dalam aljabar sering digunakan istilah pemetaan dan transformasi. Sebagai pengantar, berikut diberikan definisi 2.1.1.

Definisi 2.1.1 :

Dua himpunan tidak kosong A dan B, **product cartesian AXB** adalah himpunan pada semua pasangan berurutan (a,b) pada elemen-elemen $a \in A$ dan $b \in B$, yaitu :

$AXB = \{(a,b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

Contoh 2.1.1 :

Jika $A = \{1,2\}$ dan $B = \{3,4,5\}$, maka :

$AXB = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

dan

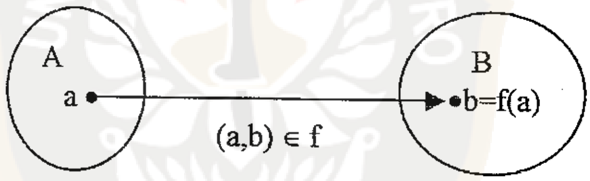
$B \times A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$

Jadi $A \times B \neq B \times A$.

Selanjutnya diberikan definisi pemetaan secara lengkap beserta contohnya.

Definisi 2.1.2 :

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah subset pada AXB sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$, terdapat sebuah elemen unik (tunggal) $b \in B$ sedemikian sehingga $b = f(a)$ dan $(a,b) \in f$.



Gambar 2.1

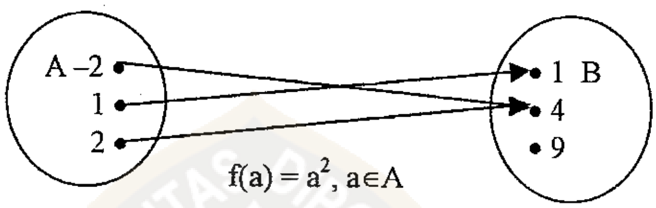
Pemetaan f dari A ke B pada gambar 2.1 merupakan fungsi dari A ke B dan bayangan pada $a \in A$ terhadap f merupakan nilai fungsi f pada a. Dua pemetaan f dari A ke B dan g dari A ke B adalah sama jika :

$f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in A$.

Contoh 2.1.2 :

Misal $A = \{-2,1,2\}$ dan misalkan $B = \{1,4,9\}$. Himpunan f diberikan dengan

$f = \{(-2,4),(1,1),(2,4)\}$ adalah pemetaan dari A ke B untuk $a \in A$, terdapat sebuah elemen tunggal $b \in B$ sedemikian sehingga $(a,b) \in f$. Sering kali dalam suatu kasus, pemetaan dapat lebih mudah digambarkan dengan memberikan aturan untuk bayangan terhadap f. Dalam kasus ini, $f(a) = a^2$, $a \in A$. Pemetaan ditunjukkan dalam gambar 2.1.2 berikut.



$f(a) = a^2$, $a \in A$

Gambar 2.1.2

Definisi 2.1.3 :

Jika f pemetaan dari A ke B, maka dapat dituliskan $f : A \to B$ atau $A \xrightarrow{f} B$. Himpunan A disebut **domain** pada f dan B disebut **kodomain** pada f. **Range** f adalah himpunan

$C = \{y | y \in B \text{ dan } y = f(x), \text{ untuk suatu } x \in A\}$

Range f dinotasikan dengan f(A).

Contoh 2.1.3 :

Misal $A = \{-2,1,2\}$ dan $B = \{1,4,9\}$. Misalkan f adalah pemetaan seperti dalam contoh 2.1.2,

$f = \{(a,b) | f(a) = a^2, a \in A\}$.

Domain pada f adalah A, kodomainnya adalah B dan rangenya adalah $\{1,4\} \subset B$.

Secara lebih umum, jika $f: A \rightarrow B$ dan $S \subseteq A$ maka :

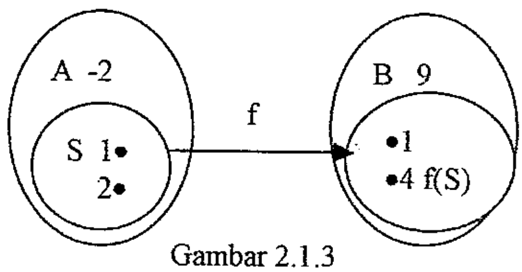
$f(S) = \{y | y \in B \text{ dan } y = f(x), \text{ untuk suatu } x \in S\}$.

Sebagai catatan bahwa f(S) melambangkan sebuah himpunan (subset pada B) dan bukan menunjukkan sebuah nilai tunggal pada f. Pada himpunan ini f(S) disebut bayangan S untuk f. Untuk suatu subset T pada B, bayangan invers pada T dinotasikan dengan $f^{-1}(T)$ dan didefinisikan dengan :

$f^{-1}(T) = \{x | x \in A \text{ dan } f(x) \in T\}$.

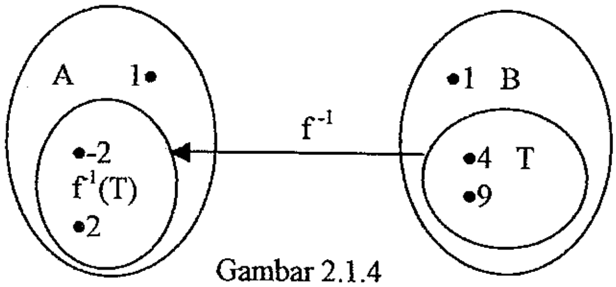
Contoh 2.1.4 :

Misal $f: A \rightarrow B$ seperti dalam contoh 2.1.3 . Jika $S = \{1,2\}$ maka $f(S) = \{1,4\}$ seperti ditunjukkan dalam gambar 2.1.3 berikut.



Gambar 2.1.3

Bila $T = \{4,9\}$ dan diberikan $f^{-1}(T) = \{-2,2\}$, maka dapat ditunjukkan dalam gambar 2.1.4 berikut.



Gambar 2.1.4

Definisi 2.1.4 :

Misal $f : A \to B$. Jika $B = f(A)$ maka f disebut **surjektif** atau **onto**. Jika $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$ maka f disebut disebut **injektif** atau **satu-satu**. Jika f surjektif dan injektif maka disebut **bijektif**. Suatu pemetaan bijektif dari A ke B disebut sebuah **bijeksi** dari A ke B atau **korespondensi satu-satu** dari A ke B.

Contoh 2.1.5 :

Anggap bahwa $f : A \to B$ dimana $A = \{-1,0,1\}$, $B = \{1,-1\}$ dan $f = \{(-1,1),(0,1),(1,1)\}$. Pemetaan f bukan surjektif sebab untuk $a \in A$ tidak ada $f(a) = -1 \in B$. Pemetaan f juga bukan injektif sebab $f(-1) = f(0) = 1$. Karena f bukan injektif (dan juga bukan surjektif) maka f bukan suatu bijektif.

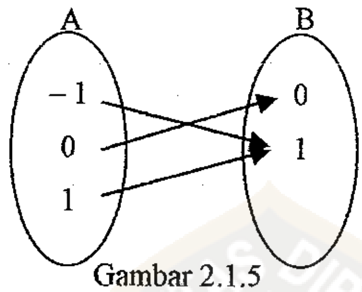
Sesuai dengan definisi, sebuah pemetaan f dari A ke B adalah surjektif jika dan hanya jika setiap elemen B adalah bayangan pada paling sedikit satu elemen dalam A dan injektif jika setiap elemen yang berbeda pada A selalu mempunyai bayangan yang berbeda pada b.

Contoh 2.1.6

Misal f : A→B, dan diberikan rumus $f(a) = a^2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa :

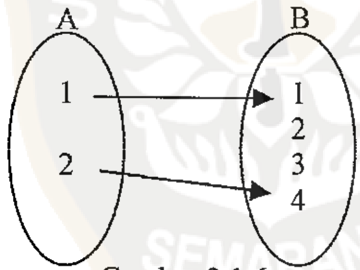
a. Jika A = {–1, 0, 1} dan B = {0, 1} maka f adalah surjektif



Gambar 2.1.5

Berdasarkan Gambar 2.1.5, karena f(A) = B maka f adalah surjektif

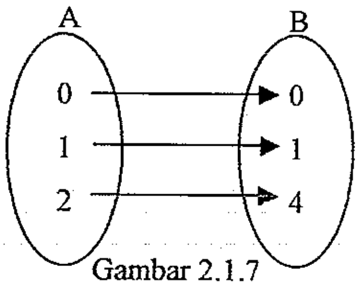
b. Jika A = {1, 2} dan B = {1, 2, 3, 4} maka f adalah injektif



Gambar 2.1.6

Berdasarkan gambar 2.1.6, karena setiap elemen yang berbeda pada A mempunyai pasangan yang berbeda pada P (jika $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) \neq f(a_2)$)

c. Jika A = {0, 1, 2} dan B = {0, 1, 4} maka f bijektif



Gambar 2.1.7

Berdasarkan gambar 2.1.7, karena f(A) = B serta setiap elemen pada A mempunyai pasangan yang berbeda pada B maka f adalah bijektif.

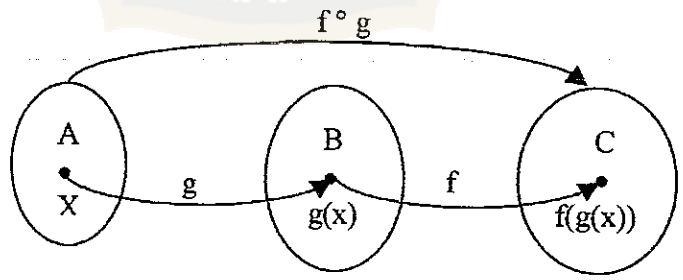
Definisi selanjutnya menunjukkan bagaimana memilih secara tepat dua pemetaan dapat dikombinasikan.

Definisi 2.1.5 :

Misal $g : A \to B$ dan $f : B \to C$. Pemetaan komposit $f \circ g$ adalah pemetaan dari A ke C didefinisikan dengan :

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$, untuk semua $x \in A$.

Pemetaan komposit $f \circ g$ ditunjukkan dalam gambar 2.1.5. Sebagai catatan bahwa domain pada f harus memuat range pada g sebelum komposisi $f \circ g$ terdefinisikan.



Gambar 2.1.8

Contoh 2.1.7 :

Misal Z himpunan pada bilangan bulat, Z_1 himpunan pada bilangan bulat nonnegatif dan Z_2 himpunan bilangan bulat negatif. Anggap pemetaan g dan f didefinisikan sebagai :

$g : Z \rightarrow Z_1,\ g(x) = x^2$

$f : Z_1 \rightarrow Z_2\ ,\ f(x) = -x$

Sehingga komposisi $f \circ g$ adalah sebuah pemetaan dari Z ke Z_2 dengan,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = -x^2$.

Sebagai catatan bahwa $f \circ g$ bukan surjektif untuk $-3 \in Z_2$, karena tidak ada bilangan bulat x sedemikian sehingga,

$(f \circ g)(x) = -x^2 = -3$

dan bahwa $f \circ g$ bukan injektif karena,

$(f \circ g)(-2) = -(-2)^2 = -2^2 = (f \circ g)(2)$ dan $-2 \neq 2$.

Pada komposisi pemetaan , sebuah operasi yang terdefinisi adalah asosiatif. Jika $h : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ dan $f : C \rightarrow D$, maka :

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f((g \circ h)(x)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(x), \text{ untuk semua } x \in A. \end{aligned}$$

Selanjutnya komposisi $(f \circ g) \circ h$ dan $f \circ (g \circ h)$ adalah merupakan pemetaan dari A ke D.

Dalam beberapa kasus, terdapat pemetaan pada suatu himpunan kedalam dirinya sendiri yaitu domain dan kodomain pada pemetaan adalah sama. Kasus ini diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 2.1.8 :

Misal Z himpunan pada semua bilangan bulat dan misalkan pemetaan

$f : Z \to Z$ dan $g : Z \to Z$ terdefinisi untuk setiap $n \in Z$ dengan $f(n) = 2n$.

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{jika n genap} \\ 4 & \text{jika n ganjil} \end{cases}$$

Dalam kasus ini, komposisi pemetaan $f \circ g$ dan $g \circ f$ keduanya terdefinisi.

Disisi lain :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(n) &= g(f(n)) \\ &= g(2n) \\ &= n.\end{aligned}$$

Sehingga $(g \circ f)(n) = n$, untuk semua $n \in Z$ dan ,

$(f \circ g)(n) = f(g(n))$

$$= \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & = n \text{ jika n genap} \\ f(4) & = 8 \text{ jika n ganjil} \end{cases}$$

Sehingga $f \circ g \neq g \circ f$.

Contoh ini menunjukkan bahwa komposisi pemetaan tidak bersifat komutatif.

Dalam beberapa kasus, terdapat pemetaan pada suatu himpunan kedalam dirinya sendiri yaitu domain dan kodomain pada pemetaan adalah sama. Kasus ini diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 2.1.8 :

Misal Z himpunan pada semua bilangan bulat dan misalkan pemetaan

$f : Z \to Z$ dan $g : Z \to Z$ terdefinisi untuk setiap $n \in Z$ dengan $f(n) = 2n$.

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{jika n genap} \\ 4 & \text{jika n ganjil} \end{cases}$$

Dalam kasus ini, komposisi pemetaan $f \circ g$ dan $g \circ f$ keduanya terdefinisi.

Disisi lain :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(n) &= g(f(n)) \\ &= g(2n) \\ &= n.\end{aligned}$$

Sehingga $(g \circ f)(n) = n$, untuk semua $n \in Z$ dan ,

$(f \circ g)(n) = f(g(n))$

$$= \begin{cases} f(\frac{n}{2}) = n \text{ jika n genap} \\ f(4) = 8 \text{ jika n ganjil} \end{cases}$$

Sehingga $f \circ g \neq g \circ f$.

Contoh ini menunjukkan bahwa komposisi pemetaan tidak bersifat komutatif.

Theorema 2.1.1:

Misal $g : A \to B$ dan $f : B \to C$. Jika f dan g keduanya surjektif, maka $f \circ g$ adalah surjektif.

Bukti :

Komposisi $f \circ g$ memetakan A ke C dan dianggap $c \in C$. Jika f surjektif maka terdapat $b \in B$ sedemikian sehingga

$$f(b) = c$$

dan g surjektif untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga

$$g(a) = b$$

Oleh karena itu untuk $c \in C$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$$

dan $f \circ g$ adalah surjektif. ■

Contoh 2.1.9 :

Misalkan $f : Z \to Z$ dan $g : Z \to Z$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \text{ genap} \\ x - 2 & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{jika } x \text{ genap} \\ x + 1 & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$$

Jika $n \in Z$, maka 2n adalah genap dan 2n+1 adalah ganjil dalam Z sehingga :

$$f(2n) = 2n$$

dan

$$f(2n+1) = 2n+1-2 = 2n-1.$$

Jadi f adalah surjektif.

$$g(2n) = \frac{2n}{2} = n$$

dan

$$g(2n+1) = 2n+1+1 = 2n+2.$$

Jadi g adalah surjektif.

Karena f dan g adalah surjektif, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f \circ g$ adalah surjektif.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right) & \text{jika} \quad x \quad \text{genap} \\ f(x+1) & \text{jika} \quad x \quad \text{ganjil} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{jika} \quad x \quad \text{genap} \\ x+1 & \text{jika} \quad x \quad \text{ganjil} \end{cases}$$

Jika x genap maka $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(2n)) = f(\frac{2n}{2}) = f(n) = n$.

Jika x ganjil maka $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(2n+1)) = f(2n+1+1) = f(2n+2)$

$= 2n-2+2 = 2n$.

Jadi $(f \circ g)(x)$ adalah surjektif.

2.2. Operasi Biner

Operasi–operasi dasar dalam obyek aljabar seperti penjumlahan, pengurangan dan perkalian merupakan contoh dari operasi biner. Sedangkan operasi pembagian bukan merupakan contoh operasi biner karena operasi pembagian dengan bilangan nol tidak didefinisikan. Adapun pengertian mengenai operasi biner akan dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.2.1 :

Jika $S \neq \phi$ maka operasi biner $*$ pada S adalah pemetaan (fungsi) yang mengawankan setiap pasangan berurutan $(a,b) \in S \times S$ menghasilkantepat satu elemen $(a*b) \in S$.

Secara simbolik operasi biner $*$ dapat dituliskan sebagai $*: SXS \to S$.

Contoh berikut akan menyelidiki apakah operasinya merupakan operasi biner atau bukan.

Contoh 2.2.1 :

Misal A himpunan bilangan asli genap dan dipandang operasi penjumlahan.

Akan ditunjukkan bahwa setiap penjumlahan dua bilangan asli genap selalu merupakan bilangan asli genap dalam A.

Misal untuk $2,4,6 \in A$ dan $2 + 4 = 6$.

Jadi operasinya merupakan operasi biner.

Contoh 2.2.2 :

B = {1,3,5,7,... } adalah himpunan bilangan asli ganjil dan dipandang operasi pengurangan.

Perhatikan bahwa 1-5 = -4 dan $-4 \notin B$, begitu juga untuk 3-5 = -2 dan $-2 \notin B$.

Sehingga ada pengurangan dua anggota B yang bukan merupakan anggota B.

Jadi operasinya bukan merupakan operasi biner.

Pada definisi berikut akan membahas mengenai sifat - sifat operasi biner.

Definisi 2.2.2 :

Jika $*$ adalah sebuah operasi biner pada himpunan tidak kosong A, maka $*$ disebut komutatif jika $x * y = y * x$, untuk semua $x,y \in A$.

Jika $x * (y * z) = (x * y) * z$, untuk semua $x,y,z \in A$, maka dikatakan operasi biner tersebut adalah asosiatif.

Operasi biner pada penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat biasanya bersifat komutatif dan asosiatif. Tetapi untuk pengurangan tidak berlaku sifat ini.

Contoh 2.2.3 :

Operasi biner $*$ didefinisikan oleh

$x * y = x + y - 1$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner $*$ bersifat komutatif dan juga asosiatif.

Operasi biner $*$ bersifat komutatif karena :

$x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x$

sehingga $x * y = y * x$.

Dan bersifat asosiatif karena :

$$
\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * (y + z - 1) \\
&= x + (y + z - 1) - 1 \\
&= (x + y - 1) + z - 1 \\
&= (x + y - 1) * z \\
&= (x * y) * z.
\end{aligned}
$$

Sehingga $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Contoh 2.2.4 :

Operasi biner $*$ didefinisikan dengan :

$x * y = 1 + xy$.

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner $*$ bersifat komutataif , tetapi tidak asosiatif.

Operasi biner $*$ bersifat komutatif karena :

$x * y = 1 + xy = 1 + yx = y * x$

sehingga $x * y = y * x$.

Tetapi operasi biner $*$ tidak bersifat asosiatif karena :

$x * (y * z) = x * (1 + yz) = 1 + x (1 + yz) = 1 + x + xyz$.

Ini tidak sama dengan :

$(x * y) * z = (1 + xy) * z = 1 + (1 + xy) z = 1 + z + xyz$.

Definisi 2.2.3 :

Misalkan $*$ operasi biner pada himpunan tidak kosong A. Elemen e disebut **elemen identitas** terhadap operasi biner $*$ jika e mempunyai sifat

$e * x = x * e = x$, untuk semua $x \in A$.

1 adalah elemenidentitas terhadap operasi perkalian ($1.x = x.1 = x$), tetapi tidak terhadap operasi penjumlahan ($1 + x \neq x$)

Contoh 2.2.5 :

Akan ditunjukkan bahwa 1 adalah elemen identitas terhadap operasi $*$ yang diberikan dengan :

$x * y = x + y - 1$, $x, y \in ZXZ$

Jika $y = 1$ maka :

$x * 1 = x + 1 - 1 = x$ dan $1 * x = 1 + x - 1 = x$

Begitu juga jika $x = 1$ maka :

$1 * y = 1 + y - 1 = y$ dan $y * 1 = y + 1 - 1 = y$

Jadi 1 adalah elemen identitas terhadap operasi biner $*$.

Theorema 2.2.1 :

Jika himpunan S terhadap operasi biner $*$ mempunyai elemen identitas, maka elemen identitas itu tunggal.

Bukti :

Misalkan himpunan S terhadap operasi $*$ mempunyai elemen identitas e_1 dan e_2 dengan $e_1, e_2 \in S$. Karena e_1 elemen identitas dari S dan $e_2 \in S$ maka

$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_2$.

Demikian juga karena e_2 elemen identitas dari S dan $e_1 \in S$ maka

$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_1$.

Jadi $e_1 = e_2$.

Ini berarti bahwa elemen identitas dari S terhadap operasi biner $*$ adalah tunggal. ■

Seperti yang telah kita ketahui bahwa nol adalah elemen identitas dari Z terhadap penjumlahan. Jika diambil sembarang elemen $a, b \in Z$ sedemikian sehingga $a + b = b + a = 0$ maka $b = -a$. Dikatakan bahwa b adalah **invers** penjumlahan dari a pada b.

Definisi 2.2.4 :

Misal e elemen identitas untuk operasi biner $*$ pada himpunan A dan $a \in A$. Jika ada $b \in A$ sehingga $a * b = e$, maka b disebut **invers kanan** pada a terhadap operasi $*$.

Dengan cara yang sama, jika $b * a = e$, maka b disebut **invers kiri** pada a. Jika dihasilkan keduanya $a * b = e$ dan $b * a = e$ maka b disebut **invers** pada a.

Contoh 2.2.6 :

Misal operasi biner $*$ didefinisikan dengan :

$x * y = x + y - 1$, $x, y \in ZXZ$

Akan ditunjukkan bahwa elemen $x \in Z$ mempunyai invers dua sisi $(-x + 2)$ terhadap operasi biner $*$.

$(-x + 2)$ adalah invers kanan dari x , karena :

$x * (-x + 2) = x + (-x + 2 - 1) = x - x + 2 - 1 = 1 = e$

dan $(-x + 2)$ adalah invers kiri dari x , karena :

$(-x + 2) * x = -x + 2 + x - 1 = 1 = e.$

Jadi $(-x + 2)$ merupakan invers dua sisi pada $x \in Z$ terhadap operasi biner $*$.

Theorema 2.2.2 :

Misalkan $*$ adalah operasi biner pada himpunan S. Jika $x \in S$ mempunyai invers terhadap operasi $*$ maka invers dari x tersebut tunggal.

Bukti :

Misal invers dari $x \in S$ terhadap operasi biner $*$ adalah x_1 dan x_2 dengan $x_1, x_2 \in S$ dan misalkan elemen identitas terhadap operasi biner $*$ adalah e. Karena x_1 adalah invers dari x maka

$x * x_1 = x_1 * x = e.$

Demikian pula karena x_2 adalah invers dari x maka

$x * x_2 = x_2 * x = e$. Maka $x_1 = x_2$.

Ini berarti bahwa invers dari x terhadap operasi biner $*$ adalah tunggal. ∎

Definisi 2.2.5 :

Misalkan operasi – operasi biner $*$ dan $\bullet$ terdefinisikan pada suatu himpunan S ,

(i) Jika untuk setiap $x,y,z \in S$ berlaku $x * (y \bullet z) = (x * y) \bullet (x * z)$, maka pada S berlaku sifat **distributif kiri** $*$ terhadap $\bullet$.

(ii) Jika untuk setiap $x,y,z \in S$ berlaku $(y \bullet z) * x = (y * x) \bullet (z * x)$ maka pada S belaku sifat **distributif kanan** $*$ terhadap $\bullet$.

Contoh 2.2.7 :

Misal Z himpunan bilangan bulat dan dipandang operasi pejumlahan, dengan $*$ pada Z didefinisikan sebagai :

$a * b = a^2b$, untuk setiap $a,b \in Z$

Jika diambil sembarang elemen $a,b,c \in Z$ maka :

$a * (b + c) = a^2(b + c) = a^2b + a^2c$ dan $(a * b) + (a * c) = a^2b + a^2c$.

Jadi $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.

Maka pada Z berlaku sifat distributif kiri $*$ terhadap penjumlahan.

Sedangkan,

$$(a + b) * c = (a + b)^2c = a^2c + 2abc + b^2c$$

dan

$$(a * c) + (b * c) = a^2c + b^2c.$$

Sehingga $(a + b) * c \neq (a * c) + (b * c)$.

Hal ini berarti bahwa pada Z tidak berlaku sifat distributif kanan operasi $*$ terhadap penjumlahan.

2.3. Grup

Sistem aljabar merupakan himpunan tidak kosong yang paling sedikit mempunyai satu relasi (persamaan ekuivalensi) dan satu atau lebih operasi biner yang terdefinisi. Kasus paling sederhana terjadi ketika hanya ada satu operasi biner seperti kasus dengan sistem aljabar yang terkenal dengan sebutan grup. Dalam subbab ini diberikan definisi serta sifat-sifat dari grup.

Definisi 2.3.1 :

Misal $G \neq \phi$ dan operasi biner $*$ didefinisikan pada G membentuk suatu grup bila dan hanya bila memenuhi sifat-sifat berikut :

a. Operasi $*$ pada G bersifat **asosiatif**, yaitu untuk setiap $a,b,c \in G$ maka $(a*b)*c = a*(b*c)$.
b. G terhadap operasi biner $*$ mempunyai **elemen identitas**, yaitu ada e elemen G sedemikian sehingga $a*e = e*a = a$ untuk setiap $a \in G$.
c. Setiap elemen G mempunyai **invers** terhadap operasi biner $*$ dalam G, yaitu untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$. e adalah elemen identitas dari G.

Jika himpunan G terhadap operasi biner $*$ membentuk grup maka grup G ini dinyatakan dengan $(G,*)$. Tidak setiap grup memiliki sifat komutatif terhadap operasi binernya. Jika grup G memenuhi sifat bahwa :

d. Operasi biner $*$ pada G bersifat komutatif yaitu untuk setiap $a,b \in G$ maka $a*b = b*a$. Maka grup $(G, *)$ disebut **grup abelian (grup komutatif).**

Contoh 2.3.1 :

Akan ditunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat Z terhadap operasi biner penjumlahan merupakan grup abelian.

a. Sifat asosiatif dipenuhi yaitu penjumlahan bilangan-bilangan bulat bersifat asosiatif.

b. Z terhadap operasi + mempunyai elemen identitas yaitu 0, sebab untuk setiap $a \in Z$ maka $a + 0 = 0 + a = a$.

c. Setiap elemen Z mempunyai invers terhadap operasi +, yaitu setiap $a \in Z$ ada $a^{-1} = -a \in Z$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi Z dengan operasi + merupakan suatu grup dan ditulis (Z,+) suatu grup.

d. Sifat komutatif juga dipenuhi, yaitu untuk setiap $a,b \in Z$ maka $a + b = b + a$. Jadi (Z,+) suatu grup abelian.

Selanjutnya akan diberikan contoh grup yang bukan grup abelian.

Contoh 2.3.2 :

Misal diberikan suatu fungsi :

$h : A \rightarrow B,\ h(x) = -x$

$g : A \rightarrow B,\ g(x) = x^2$

$f : A \rightarrow B,\ f(x) = 2x$

Fungsi komposisi merupakan grup tetapi bukan grup abelian karena suatu fungsi bersifat asosiatif dan tidak bersifat komutatif.

Karena fungsi komposisi bersifat asosiatif, terdapat elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers maka fungsi komposisi merupakan grup.

Suatu grup dengan operasi biner perkalian disebut **grup multiplikatif** dan jika operasinya penjumlahan disebut **grup aditif**.

Banyaknya elemen suatu grup G ditulis dengan notasi n(G) dan disebut **order** dari grup G. Suatu grup yang banyaknya elemen tak berhingga (infinite) disebut **grup tak berhingga (grup infinite)**, sedang suatu grup yang banyaknya elemen berhingga disebut **grup berhingga (grup finite)**.

Selanjutnya akan dibahas sifat-sifat sederhana dari grup yang diberikan dalam beberapa theorema berikut.

Theorema 2.3.1 : (sifat kanselasi atau penghapusan)

(G,*) suatu grup, maka untuk setiap $a,b,c \in G$, berlaku :

i. Jika $a*b = a*c$ maka $b = c$.

ii. Jika $b*a = c*a$ maka $b = c$.

Bukti :

i. $a \in G$ dan G suatu grup maka ada $a^{-1} \in G$, sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ dengan e adalah elemen identitas dari (G,*).

Menurut ketentuan $a*b = a*c$ jika kedua ruas dioperasikan a^{-1} dari kiri,

$a^{-1}*(a*b) = a^{-1}*(a*c)$.

Dengan sifat asosiatif,

$(a^{-1}*a)*b = (a^{-1}*a)*c$

dan untuk e adalah elemen identitas,

$e*b = e*c$.

Sehingga $b = c$.

ii. Untuk ketentuan $b*a = c*a$, jika kedua ruas dioperasikan a^{-1} dari kanan maka

$(b*a)*a^{-1} = (c*a)*a^{-1}$

$b*(a*a^{-1}) = c*(a*a^{-1})$

$b*e = c*e$

Sehingga $b = c$ ■

Theorema 2.3.2 :

Jika $(G,*)$ grup dan $a,b \in G$, maka persamaan-persamaan $a*x = b$ dan $y*a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Bukti :

Pertama akan dibuktikan bahwa persamaan $a*x = b$ mempunyai penyelesaian.

$a \in G$ dan G suatu grup maka $a^{-1} \in G$.

Dari ketentuan $a*x = b$

$a^{-1}*(a*x) = a^{-1}*b$

$(a^{-1}*a)*x = a^{-1}*b$

$e*x = a^{-1}*b$

$x = a^{-1}*b$

$a^{-1}*b$ adalah penyelesaian dari persamaan $a*x = b$. Selanjutnya akan dibuktikan tunggalnya penyelesaian $a*x = b$.

Misalkan persamaan $a*x = b$ mempunyai penyelesaian x_1 dan x_2 berarti

$a*x_1 = b$ dan $a*x_2 = b$.

Sehingga $a*x_1 = a*x_2$ dan dengan sifat kanselasi diperoleh $x_1 = x_2$.

Jadi persamaan $a*x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Dengan cara yang serupa dapat dibuktikan untuk $y*a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Dari ketentuan $y*a = b$

$$(y*a)*a^{-1} = b*a^{-1}$$

$$y*(a*a^{-1}) = b*a^{-1}$$

$$y*e = b*a^{-1}$$

$$y = b*a^{-1}$$

Sehingga $b*a^{-1}$ adalah penyelesaian dari persamaan $y*a = b$.

Selanjutnya akan dibuktikan tunggalnya penyelesaian $y*a = b$. Misalkan persamaan $y*a = b$ mempunyai penyelesaian y_1 dan y_2, berarti $y_1*a = b$ dan $y_2*a = b$ dan dengan sifat kanselasi maka $y_1 = y_2$.

Jadi persamaan $y*a = b$ juga mempunyai penyelesaian tunggal. ■

Theorema 2.3.3 :

Jika (G, *) suatu grup, maka untuk setiap $a \in G$, invers dari invers a adalah a atau dituliskan untuk setiap $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Bukti :

Jika $a \in G$ dan G suatu grup maka ada dengan tunggal $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga,

$a*a^{-1} = e$ ....(i).

Jika $a \in G$ dan G suatu grup maka ada dengan tunggal $(a^{-1})^{-1} \in G$.

Sehingga,

$(a^{-1})^{-1}*a^{-1} = e$ ....(ii).

Dari (i) dan (ii) disimpulkan $(a^{-1})^{-1}*a^{-1} = a*a^{-1}$, dengan sifat kanselasi a^{-1} diperoleh $(a^{-1})^{-1} = a$ ■

Theorema 2.3.4 :

Jika $(G,*)$ suatu grup maka untuk setiap $a,b \in G$ berlaku $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$.

Bukti :

Jika $a,b \in G$ maka $(a*b) \in G$ sehingga,

$(a*b)^{-1} \in G$ dan $(a*b)*(a*b)^{-1} = e$ ....(i)

Dengan sifat asosiatif,

$$\begin{aligned}(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) &= (a*(b*b^{-1}))*a^{-1} \\ &= (a*e)*a^{-1} \\ &= a*a^{-1} \\ &= e.\end{aligned}$$

Jadi $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = e$ .....(ii).

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa :

$(a*b)*(a*b)^{-1} = (a*b)*(b^{-1}*a^{-1})$

Dengan sifat kanselasi, $(a*b)^{-1} = (b^{-1}*a^{-1})$. ■

Definisi 2.3.2 :

Jika (G,*) suatu grup, $a \in G$ dan m bilangan bulat positif maka :

$a^m = a*a*a*\ldots*a$ sebanyak m faktor.

$a^0 = e$ yaitu elemen identitas.

$a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1}*a^{-1}*a^{-1}*\ldots*a^{-1}$ sebanyak m faktor.

Theorema 2.3.5 :

Apabila (G,*) suatu grup dan $a \in G$ serta m,n bilangan-bilangan bulat positif, maka $a^m*a^n = a^{m+n}$.

Bukti :

$$a^m*a^n = \underbrace{(a*a*\ldots*a)}_{\text{mfaktor}}*\underbrace{(a*a*\ldots*a)}_{\text{nfaktor}}$$

$$= \underbrace{(a*a*a*\ldots*a)}_{\text{m+nfaktor}}$$

$$= a^{m+n}$$ ■

Theorema 2.3.6 :

Jika (G,*) suatu grup, $a \in G$ dan m,n bilangan-bilangan bulat positif, maka $(a^m)^n = a^{mn}$.

Bukti :

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m*a^m*a^m*\ldots*a^m}_{\text{nfaktor}}$$

$$= a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\,\text{suku}}}$$

$$= a^{nm}$$

$$= a^{mn}. \qquad \blacksquare$$

Didalam subbab ini akan ditambahkan juga sedikit tentang subgrup dan grup siklik.

Definisi 2.3.3 :

(G,*) suatu grup. H disebut **subgrup** dari G jika dan hanya jika $H \subset G$ dan (H,*) merupakan suatu grup.

Contoh 2.3.3 :

G ={1,-1,i,-i} dengan $i = \sqrt{-1}$ terhadap operasi perkalian merupakan suatu grup. H = {-1,1} adalah himpunan bagian dari G. Himpunan H terhadap operasi perkalian juga merupakan suatu grup. Hasil kali 1 dan –1 yaitu –1 berada dalam H, sifat asosiatif jelas berlaku. Elemen identitasnya adalah 1 dan setiap elemen H mempunyai invers, yaitu $(-1)^{-1} = 1$. $H \subset G$, (G,x) suatu grup dan (H,x) juga merupakan suatu grup. Maka dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G.

Definisi 2.3.4 :

Grup G disebut **grup siklik** bila dan hanya bila terdapat $a \in G$ sedemikian sehingga setiap $y \in G$, $y = a^m$ dengan m bilangan bulat, $a \in G$ disebut penghasil (generator) dari G.

Contoh 2.3.4: (Gilbert,1995)

$Z_n = \{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$ adalah grup siklik dengan generator [1], untuk setiap $[k] \in Z_n$ dan dapat dituliskan sebagai

$1^k = k[1] = [k]$,

Misal $Z_6 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$.

Elemen [5] merupakan generator pada Z_6 terhadap penjumlahan karena

$5^1 = 1[5] = [5]$

$5^2 = 2[5] = [5] + [5] = [10] = [4]$

$5^3 = 3[5] = [5] + [5] + [5] = [15] = [3]$

$5^4 = 4\,[5] = [5] + [5] + [5] + [5] = [20] = [2]$

$5^5 = 5[5] = [5] + [5] + [5] + [5] + [5] = [25] = [1]$

$5^6 = 6[5] = [5] + [5] + [5] + [5] + [5] + [5] = [30] = [0]$

Sehingga $(Z_6,+)$ merupakan grup siklik dengan generator [5].

Definisi 2.3.5 :

Suatu elemen x dalam sebuah grup perkalian G disebut **idempoten** jika $x^2 = x$.

Contoh 2.3.5 :

Misal G himpunan bilangan komplek dengan G = {1,-1,i,-i}, dimana $i = \sqrt{-1}$ dan operasi perkalian yang ditunjukkan dalam tabel 2.3.1 berikut.

Tabel 2.3.1

×	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Dari tabel 2.3.1 diatas dapat diketahui bahwa G bersifat tertutup, asosiatif, terdapat elemen identitas dan semua elemennya mempunyai invers, sehingga G adalah grup terhadap operasi perkalian. Dapat diketahui pula bahwa 1 adalah elemen idempoten pada (G,×), karena $1^2 = 1$.