BAB II

MATERI PENUNJANG

Pada bab ini dijelaskan beberapa materi yang dapat menunjang materi pembahasan pada Bab III antara lain ring, homomorfisma ring, ring polinomial dan faktorisasi dalam ring polinomial

.

2.1 Ring

Definisi 2.1.1

Ring $<R,+,.>$ adalah himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan (+) dan penggandaan (.) yang didefinisikan pada R sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

R.1.$<R,+>$ merupakan Grup komutatif yang memenuhi sifat-sifat:

(i) Tertutup: $a + b = c,\ \forall a, b, c \in R$

(ii) Assosiatif : $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in R$

(iii)Ada elemen netral $0 \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$

(iv)($\forall a \in R$) terdapatlah $-a \in R$ sedemikian sehingga $-a + a = a + (-a) = 0$. Elemen $(-a)$ disebut invers penjumlahan dari a.

(v) Komutatif : $a + b = b + a,\ \forall a,b \in R$

R.2. $< R,.>$ merupakan grup komutatif yang memenuhi sifat-sifat

(i). Tertutup: $ab = c$, $\forall\ a, b,c \in R$

(ii). Assosiatif : $ab.c = a.bc$, $\forall\ a, b, c \in R$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

R.3.$<R,+,.>$ distributifitas

(i). $a(b + c) = ab + ac$, $\forall\ a,b,c \in R$ disebut distribusi kanan

(ii). $(b + c)a = ba + ca$, $\forall\ a,b,c \in R$ disebut distribusi kiri

Definisi 2.1.2

Suatu elemen $a \in R$ disebut pembagi nol kiri (left divisor of zero), jika dan hanya jika dapat ditemukan elemen $b \in R$ dimana $b \neq 0$ di R sedemikian sehingga $ab = 0$.

Pengertian pembagi nol kanan (right divisor of zero) didefinisikan analog.

Jika ada $a = 0$ dan $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = ba = 0$ maka a disebut sebagai pembagi nol (divisor of zero).

Dalam setiap ring, elemen netral terhadap penjumlahan yaitu 0 merupakan pembagi nol, sebab $a0 = 0a = 0$ dengan $a \neq 0$. Apabila R mempunyai elemen satuan e, maka e pasti bukan pembagi nol sebab untuk setiap b, berlakulah $eb = be = b$.

Definisi 2.1.3

Suatu pembagi nol a disebut pembagi nol sejati (proper divisor of zero) jika dan hanya jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$.

Selanjutnya pembagi nol sejati disingkat dengan p.n.s.

Definisi 2.1.4

Ring R disebut lapangan jika R adalah ring komutatif, memiliki elemen satuan, dan setiap elemen yang tidak samadengan 0 dalam R mempunyai invers penggandaan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.1.5

Jika R dan R^1 adalah ring, maka ring homomorfisma dari R ke R^1 adalah pemetaan $\theta : R \rightarrow R^1$ sedemikian sehingga

(i) $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$

(ii) $\theta(x.y) = \theta(x).\theta(y)$

untuk semua x,y dalam R.

Misalnya θ homomorfisma dari ring R ke R^1 , jika θ injektif maka θ disebut monomorfisma, jika θ surjektif maka θ disebut epimorfisma dan jika θ bijektif (injektif dan surjektif) maka θ disebut isomorfisma.

Definisi 2.1.6

Dalam ring R, jika terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $n.a=0$, $\forall\ a \in R$ maka R dikatakan memiliki karakteristik n, jika tidak demikian maka R dikatakan memiliki karakteristik nol.

Teorema 2.1.7

Jika R merupakan ring komutatif yang memuat elemen satuan, maka R memiliki karakteristik $n > 0$ jika dan hanya jika n bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $n.1 = 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.2 Ring Polinomial

Definisi 2.2.1

Barisan tak berhingga $f(x) = \left(\sum_{i=o}^{\sim} a_i x^i\right)$ dengan $a_i \in R$ dan indeterminate x dikatakan polinomial atas R jika ada bilangan bulat non negatif n sedemikian sehingga $a_i = 0$, $\forall i > n$, selanjutnya a_i disebut sebagai koefisien dari polinomial $f(x)$.

Untuk penulisan selanjutnya $R[x]$ adalah menunjukkan himpunana semua polinomial atas R dalam indeterminate x.

$0(x)$ adalah menunjukkan polinomial dengan seluruh koefisiennya adalah nol dan disebut sebagai polinomial nol (zero polinomial). Koefisien dari kuasa tertinggi dari x dalam $f(x)$ yang tidak sama dengan 0 disebut koefisien pemimpin (leading coefficient).

Jika R mempunyai elemen satuan e dan koefisien pemimpin dari $f(x)$ adalah e ,maka $f(x)$ disebut polinomial monic.

Definisi 2.2.2

Dua polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ dikatakan sama dan ditulis $f(x) = g(x)$ jika untuk setiap bilangan bulat non negatif i, $a_i = b_i$

Definisi 2.2.3

Jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, keduanya dalam R maka didefinisikan penjumlahan dua polinomial sebagai

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_tx^t$

Dimana untuk setiap i, $c_i = a_i + b_i$.

Sedangkan untuk penggandaan dari $f(x)$ dan $g(x)$ didefinisikan

$f(x).g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_kx^k$

Dimana $c_i = \sum_{j+k-i} a_j b_k$,untuk $j = 1,2,3,\ldots\ldots$

Definisi 2.2.4

Jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0x^{n+1} + \ldots$ polinomial atas ring R sedemikian sehingga $a_n \neq 0$ dengan $a_i = 0$, $\forall\ i > n$, maka polinomial tersebut dikatakan polinomial berderajad n, ditulis deg $(f(x)) = n$.

Theorema 2.2.5

Ditentukan ring R dan $f, g \in R[x_1, x_2, \ldots x_n]$, maka berlaku

(i) deg $(f + g) \leq$ max (deg f, deg g)

(ii) deg $(f.g) \leq$ deg f + deg g

(iii)Jika R tidak mempunyai pembagi nol sejati , maka deg $(f.g)$ = deg f + deg g

(iv)Jika $n = 1$ dengan koefisien tertinggi dari f atau g dan R tidak mempunyai p.n.s maka deg $(f.g)$ = deg f + deg g.

Theorema 2.2.6

Jika R daerah integral, maka

(i) $R[x]$ juga merupakan daerah integral

(ii) $R[x]$ bukan lapangan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti

(i) Misalnya R daerah integral dan $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ dimana $f(x)$,$g(x)$ didalam R. Karena R daerah integral maka $\deg(f(x).g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$. Sehingga tidak mungkin jika $f(x).g(x) = 0$, karena $R[x]$ merupakan daerah integral.

(ii) Misalnya $f(x) \in R[x]$ dan deg f(x) > 0. Karena derajat dari polinomial identitas 1 adalah 0, maka tidak terdapat $g(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $\deg f(x) + \deg g(x) = \deg 1 = 0$. ehingga tidak ada polinomial berderajat tidak nol yang mempunyai pergandaan dengan inversnya dan $R[x]$ bukan merupakan lapangan.

Theorema 2.2.7(Division Algorithm)

Misalnya R ring dengan elemen satuan dan $f(x)$, $g(x) \in R[x]$ polinom – polinom yang tidak nol sedemikian sehingga koefisien pangkat x tertinggi dari $g(x)$ adalah unit didalam R, maka terdapatlah dengan tunggal polinom-polinom $q(x)$,$r(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = q(x).g(x) + r(x)$ dimana $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Akibat 2.2.8

Misalnya R ring dengan elemen satuan e dan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \in R[x]$, untuk $c \in R$, maka terdapatlah dengan tunggal $q(x) \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = q(x)\,(x-c) + f(c)$.

Akibat 2.2.9

Jika F lapangan , maka ring polinomial $F[x]$ adalah daerah Euclid , dengan $F[x]$ daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal dengan unit-unit di dalam $F[x]$ merupakan polinomial konstan yang tidak nol.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3 Faktorisasi Dalam Ring Polinomial

Definisi 2.3.1

$f(x) \in F[x]$ disebut polinomial tak tereduksi (irreducible polynomial) atau prime dalam F jika $f(x)$ mempunyai derajat positif dan $f(x)$ tidak dapat difaktorkan sebagai hasil kali dua polinomial-polinomial $g(x)h(x)$ dengan $g(x),h(x) \in F[x]$ berderajat positif.

Jika $f(x)$ bukan polinomial tak tereduksi maka $f(x)$ disebut polinomial tereduksi.

Contoh 2.3.2

$f(x) = x^2 + 1 \in R[x]$ tak tereduksi di $R[x]$, karena $f(x)= (x-i)\ (x+i) = 0$ dimana $x = \pm i \notin R$

Contoh 2.3.3

$f(x) = x^2 + 1 \in C[x]$, tereduksi di $C[x]$, dengan faktorisasi $f(x) = (x-i)\ (x+i) = 0$ dimana $x = \pm i \in C$

Definisi 2.3.4

Misalnya $f(x)$ merupakan polinomial dalam lapangan F. Jika $c \in F$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$, maka c disebut akar dari $f(x)$ dalam F.

Contoh 2.3.5

Polinomial $f(x) = x^2+1 \in C[x]$.

Dari definisi diketahui $f(x)$ merupakan polinomial nol jika $f(x) = (x-i)(x+i) = 0$, sehingga $x = \pm i$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jadi titik yang menyebabkan $f(x)$ merupakan polinomial nol adalah $\pm i$, dimana $\pm i \in C$.

Theorema 2.3.6

Misalnya F lapangan dan $f(x) \in F[x]$, maka $c \in F$ adalah akar dari $f(x)$ jika dan hanya jika $(x-c)$ membagi $f(x)$.

Theorema 2.3.7 (Theorema Faktor)

Polinomial $f(x)$ atas lapangan F mempunyai faktor $(x-c)$ dalam $F[x]$ jika dan hanya jika $c \in F$ adalah akar dari $f(x)$.

Theorema 2.3.8

Misalnya $f(x)$ polinomial atas lapangan F yang mempunyai derajat positif n dan koefisien pemimpin c. Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah akar-akar yang berbeda dari $f(x)$ dalam F, maka $f(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

Definisi 2.3.9

Misalnya $f(x)$ polinomial dalam lapangan F. Sebuah elemen $\alpha \in F$ merupakan simple zero dari f(x)jika $(x-\alpha) \mid f(x)$ tapi $(x-\alpha)^2 \perp f(x)$. Akar kelipatan lebih besar dari 1 disebut akar ganda atau akar berlipat.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)