BAB II

MATRIKS DAN GRAPH

Dalam bab ini akan dibahas beberapa pengertian tentang matriks dan graph.

II.1. MATRIKS

Definisi 1

Matriks adalah susunan bilangan riil atau kompleks yang diatur dalam baris dan kolom dengan elemen-elemen a_{ij}, dengan $i=1,2,\ldots,m$ dan $j=1,2,\ldots,n$.

Matriks A ditulis sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ukuran atau ordo dari suatu matriks adalah perkalian antara baris dan kolom. Suatu matriks A yang mempunyai m baris dan n kolom ditulis sebagai matriks $A_{m \times n}$.

Contoh 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai 3 baris dan 4 kolom, maka matriks tersebut dikatakan berukuran atau berordo 3x4 atau dapat ditulis A_{3x4}.

Definisi 2

Matriks Bujursangkar adalah bila banyaknya baris dalam suatu matriks sama dengan banyaknya kolom dalam matriks tersebut (m=n).Bila suatu matriks berordo mxn, dan m=n maka matriks tersebut matriks bujursangkar berordo n.

Contoh 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$m = n = 3$

Matriks A dikatakan matriks bujursangkar berorde 3. Dalam suatu matriks bujursangkar, elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ dikatakan elemen diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 3

Transpose dari suatu matriks (A^T) adalah bila baris dari suatu matriks A dirubah menjadi kolom dan sebaliknya kolom dirubah menjadi baris.
Bila ordo dari suatu matriks A adalah mxn, maka transposenya (A^T) mempunyai ordo nxm. Elemen a_{ij} dalam baris ke i dan kolom ke j dari A menjadi elemen a_{ji} dalam baris ke j dan kolom ke i dalam A^T.

Contoh 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} m=2 \\ n=4 \end{matrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} m=4 \\ n=2 \end{matrix}$$

Definisi 4

Matriks Simetri adalah suatu matriks bujursangkar A sedemikian hingga $A^T=A$. Untuk matriks bujursangkar A, matriks A simetri bila $a_{ij}=a_{ji}$.

Contoh 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 5

Barisan bilangan-bilangan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ yang berlaku $j_i \neq j_k$, untuk $i \neq k$ (i dan k = 1, 2, ..., n) serta j_i adalah bilangan asli (1, 2, ..., n) disebut permutasi.
Banyaknya permutasi yang dapat dibentuk untuk n buah bilangan asli adalah n!.

Contoh 5

Diketahui bilangan asli (1,2,3,4)

Ditanya : berapa banyaknya permutasi

Jawab :

n = 4, maka banyaknya permutasi = 4! = 4x3x2x1 = 24 yaitu (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2), (2,1,3,4), (2,1,4,3), (2,3,1,4),

(2,3,4,1), (2,4,1,3), (2,4,3,1), (3,2,1,4) (3,2,4,1)
(3,1,2,4), (3,1,4,2) (3,4,2,1), (3,4,1,2), (4,2,3,1),
(4,2,1,3) (4,3,2,1), (4,3,1,2), (4,1,2,3), (4,1,3,2).

Definisi 6

Inversi pada suatu permutasi $(j_1,j_2,...,j_n)$ yaitu adanya bilangan j_k yang mendahului j_i dengan $j_i < j_k$ untuk i dan k = 1,2,...,n.

Contoh 6

Diketahui : permutasi (2,1,4,3)

Ditanya : berapa banyaknya inversi pada permutasi tersebut ?

Jawab :

(2,1,3,4) maka $j_1 = 2$, $j_2 = 1$, $j_3 = 4$, $j_4 = 3$

1. $j_1 = 2$ mendahului $j_2 = 1$ dengan $1 < 2$
2. $j_3 = 4$ mendahului $j_4 = 3$ dengan $3 < 4$

maka ada dua inversi pada permutasi (2,1,4,3).

Contoh 7

Diketahui : permutasi (4,3,1,2)

Ditanya : berapa banyaknya inversi pada permutasi tersebut ?

Jawab :

(4,3,1,2) maka $j_1 = 4$, $j_2 = 3$, $j_3 = 1$, $j_4 = 2$

1. $j_1 = 4$ mendahului $j_2 = 3$ dengan $3 < 4$
2. $j_1 = 4$ mendahului $j_3 = 1$ dengan $1 < 4$
3. $j_1 = 4$ mendahului $j_4 = 2$ dengan $2 < 4$
4. $j_2 = 3$ mendahului $j_3 = 1$ dengan $1 < 3$
5. $j_2 = 3$ mendahului $j_4 = 2$ dengan $2 < 3$

sehingga terdapat 5 inversi pada permutasi (4,3,1,2)

Definisi 7

Jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil maka permutasinya disebut permutasi ganjil dan jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan genap maka permutasinya disebut permutasi genap.

Contoh 8

Pada contoh 6 karena banyaknya inversi dari permutasi (2,1,4,3) adalah 2 maka permutasinya dikatakan permutasi genap.

Pada contoh 7 karena banyaknya inversi dari permutasi (4,3,1,2) adalah 5, maka permutasinya dikatakan permutasi ganjil.

Definisi 8

Suatu permutasi $(j_1,j_2,...,j_n)$, dan tanda dari permutasi tersebut ditulis sebagai $\sigma(j_1,j_2,...,j_n)$ bila permutasi $(j_1,j_2,...,j_n)$ genap maka $\sigma(j_1,j_2,...,j_n) = +1$

dan bila permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ganjil maka $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n) = -1$.

Definisi 9

Hasil kali bertanda dari suatu matriks dengan elemen-elemen matriks $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ adalah

$\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\ a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$

untuk matriks bujursangkar A berordo n maka terdapat n! hasil kali bertanda.

Definisi 10

Determinan det(A) = |A| dari suatu matriks bujursangkar A berordo nxn adalah jumlah dari semua n! hasilkali bertanda dari elemen-elemen matriks A tersebut, yaitu :

$$\det(A) = |A| = \sum \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\ a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

Contoh 9

Diketahui matriks A berordo 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ditanyakan : berapa determinan dari A = det(A) = |A|

Jawab :

Matriks bujursangkar A_{2x2} maka terdapat 2! = 2 buah hasilkali bertanda sebagai berikut:

1. $\sigma(1,2)\ a_{11}a_{22}$, permutasi (1,2) ,banyaknya inversi = 0 dan dikatakan permutasi genap, maka $\sigma(1,2) = +1$,sehingga $\sigma(1,2)\ a_{11}a_{22} = +1\ (a_{11}.a_{12}) = a_{11}a_{12}$.
2. $\sigma(2,1)\ a_{12}a_{21}$, permutasi (2,1), banyaknya inversi = 1 dan dikatakan permutasi ganjil, maka $\sigma(2,1) = -1$, sehingga $\sigma(2,1)\ a_{12}a_{21} = -1\ (a_{12}a_{21}) = -a_{12}a_{21}$.

Sehingga $\sum \sigma(j_1,j_2)\ a_{1j_1},a_{2j_2} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$.

Maka $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Contoh 10

Diketahui : matriks A berordo 4x4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Ditanya : berapa determinan A = det(A)

Jawab :

Matriks bujursangkar A_{4x4} maka terdapat 4! = 4x3x2x1 = 24 hasil kali bertanda yaitu

1. $\sigma(1,2,3,4)a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

   Permutasi (1,2,3,4) banyaknya inversi = 0, permutasinya genap sehingga

$\sigma(1,2,3,4)a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = +1(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

2. $\sigma(1,2,4,3)a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

   Permutasi (1,2,4,3) banyaknya inversi = 1, permutasinya ganjil sehingga

   $\sigma(1,2,4,3)a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -1(a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}) = -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

3. $\sigma(1,3,2,4)a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$

   Permutasi (1,3,2,4) banyaknya inversi = 1, permutasinya ganjil sehingga

   $\sigma(1,3,2,4)a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} = -1(a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}) = -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$

4. $\sigma(1,3,4,2)a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

   Permutasi (1,3,4,2) banyaknya inversi = 2, permutasinya genap sehingga

   $\sigma(1,3,4,2)a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} = +1(a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}) = a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

5. $\sigma(1,4,2,3)a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$

   Permutasi (1,4,2,3) banyaknya inversi = 2, permutasinya genap sehingga

   $\sigma(1,4,2,3)a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} = +1(a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}) = a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$

6. $\sigma(1,4,3,2)a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$

   Permutasi (1,4,3,2) banyaknya inversi = 3, permutasinya ganjil sehingga

   $\sigma(1,4,3,2)a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} = -1(a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}) = -a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$

Dan seterusnya sehingga determinan matriks A

$$\det(A) = |A| = \sum \sigma(j_1,j_2,j_3,j_4)\, a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \\
&+ a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\
&- a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&- a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\
&- a_{13}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&- a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\
&- a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}
\end{aligned}$$

Pandang matriks bujur sangkar A berukuran nxn yaitu A_{ij} dan M_{ij} adalah suatu sub matriks dari A_{nxn} dengan ukuran (n-1)x(n-1) dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A.

Contoh 11

Diketahui : matriks A_{3x3}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ditanya : Carilah M_{12}, M_{32}, M_{22}

Jawab :

- M_{12} didapatkan dengan menghilangkan elemen-elemen baris ke-1 dan kolom ke-2 dari matriks A_{3x3} sehingga

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

- M_{32} didapatkan dengan menghilangkan elemen-elemen baris ke-3 dan kolom ke-2 dari matriks A_{3x3} sehingga

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- M_{22} didapatkan dengan menghilangkan elemen-elemen baris ke-2 dan kolom ke-2 dari matriks A_{3x3} sehingga

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 11

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks $A_{nxn} = (a_{ij})$ adalah $\det(M_{ij}) = |M_{ij}|$

Contoh 12

Diketahui matriks A_{3x3} sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Ditanya : minor a_{12}, a_{32}, a_{22}

Jawab :

- minor a_{12} = det(M_{12}) = $|M_{12}|$.

  Menurut definisi 10 maka

  $$\text{minor } a_{12} = |M_{12}| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

  $$= 5.1 - 7.8$$

  $$= 5 - 56$$

  $$= -51$$

- minor a_{32} = det(M_{32}) = $|M_{32}|$.

  Menurut definisi 10 maka

  $$\text{minor } a_{32} = |M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

  $$= 2.7 - 4.5$$

  $$= 14 - 20$$

  $$= -6$$

- minor a_{22} = det(M_{22}) = $|M_{22}|$.

Menurut Definisi 10 maka

$$\text{minor } a_{22} = |M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.1 - 8.4$$

$$= 2 - 32$$

$$= -30$$

Definisi 12

Suatu matriks tidak nol A dikatakan mempunyai rank r jika paling tidak terdapat satu dari minor bujursangkarnya tidak sama dengan nol, sedangkan untuk setiap r+1 minor bujursangkarnya adalah nol.

Contoh 13

Diketahui matriks A berordo 3x3 sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Ditanya : berapa rank dari matriks A tersebut ?

Jawab :

Dicari minor-minor 2x2 yang tidak sama dengan 0. Misal minor a_{33}, a_{22}, a_{31} sehingga menurut definisi 11 maka

$$\text{minor}(a_{33}) = |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.2 = -1 \neq 0$$

$$\text{minor}\ (a_{22}) = |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1.7 - 3.3 = -2 \neq 0$$

$$\text{minor}\ (a_{31}) = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.3 - 3.3 = -3 \neq 0$$

Kemudian dihitung det(A) = |A| sehingga menurut definisi 10 maka

$$\det(A)=|A|= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= 1.3.7 - 1.4.5 - 2.2.7 + 2.4.3 + 3.2.5 - 3.3.3$$

$$= 21 - 20 - 28 + 24 + 30 - 27$$

$$= 21 + 24 + 30 - 20 - 28 - 27$$

$$= 75 - 75$$

$$= 0$$

Karena det(A) = 0 sedangkan terdapat minor M berordo 2x2 yang tidak sama dengan nol maka matriks A_{3x3} tersebut mempunyai rank = 2.

Definisi 13

Matriks Nonsingular adalah matriks bujursangkar A_{nxn} yang mempunyai rank r=n, yaitu jika harga determinan $|A|\neq 0$.

Definisi 14

Suatu Matriks Simetri A dikatakan Definit Positif, bila

$$y^T Ay > 0$$

dengan y adalah vektor sembarang , dan y^T adalah transpose dari y.

Sifat kesimetrian kedefinit positifan mempunyai peranan penting dalam perhitungan terutama dalam Sparse Matriks Simetri, karena mempunyai sifat penting antara lain :

1. Jika matriks A dan B definit positif simetri, maka A + B juga definit positif simetri.

   Sifat ini sangat berguna sebab biasanya suatu matrks dengan n besar didapatkan dari jumlahan matriks yang lebih kecil, yang telah diketahui definit positif.

   Di samping itu sulit untuk mengecek sifat definit positif untuk matrik dengan n besar.
2. Matriks definit positif simetri mempunyai n harga eigen yang semuanya bilangan riil positif.

3. Determinan matriks definit positif adalah positif.
4. Minor dari matriks A adalah submatriks yang didapatkan dengan menghilangkan beberapa baris dan kolom.

   Minor utama didapatkan bila himpunan baris dan kolom yang sama dihilangkan.

   Jika matriks A definit positif simetri, sembarang minor utamanya juga definit positif simetri, dan oleh karena itu harga determinannya positif,dan elemen-elemen diagonal utamanya semua positif.

$$a_{ii} > 0 \text{ untuk semua } i$$

5. Ambil A sebagai matriks definit positif simetri, dan angggap determinan dari sembarang minor utama 2x2, yang dengan sifat 4 harus positif maka:

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij} > 0$$

$$= a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$$

$$|a_{ij}| < (a_{ii}a_{jj})^{1/2} \le \max(a_{ii}, a_{jj})$$

   Pada dasarnya jika x adalah harga elemen terbesar pada diagonal utama matriks A, maka tidak ada harga elemen dari A yang melampaui harga x dalam harga mutlak.

$$|a_{ij}| \le x \quad \text{untuk semua } i,j$$

6. Syarat perlu dan cukup untuk matriks simetri A definit positif adalah bahwa determinan dari n memimpin minor utama dari matriks A adalah positif.

Definisi 15

Sparse Matriks Simetri (Matriks Simetri Jarang) adalah bila elemen-elemen dari suatu matriks simetri A mengandung banyak nol .

Contoh 14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

II.2. TEORI GRAPH

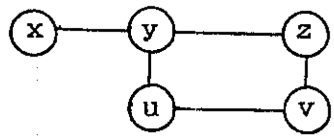
Definisi 16

Graph G=(V,E) adalah suatu pasangan berurutan (V,E) dengan himpunan vertek-vertek V={x,y,z,...} bersama-sama himpunan rusuk E yang merupakan pasangan (x,y) dari vertek x ke vertek y.

Definisi 17

Graph Tak Berarah dalah bila dalam graph G=(V,E) tidak ada perbedaan antara rusuk (x,y) dan rusuk (y,x) maka dikatakan rusuk-rusuk dipersembahkan tanpa pasangan berurut.

Contoh 15



G=(V,E)

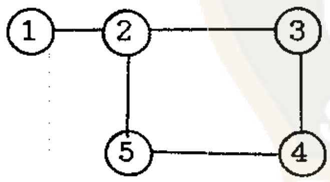
V={x,y,z,v,u)

E={(x,y),(y,z),(z,u),(u,v),(v,y)}

Definisi 18

Graph Berlabel adalah bila Graph G=(V,E) mempunyai n vertek, maka vertek-vertek tersebut berkorespondensi satu-satu dengan integer 1,2,...,n.

Contoh 16



G=(V,E)

V={1,2,3,4,5}

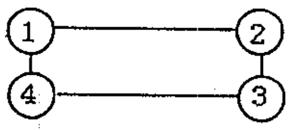
n=5

Definisi 19

Subgraph G′=(V′,E′) adalah Graph yang terdiri dari beberapa atau semua vertek G=(V,E) dan beberapa rusuk dari G=(V,E).

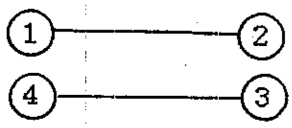
$G' : V' \subseteq V,\ E' \subset E$

Contoh 17



(a)

(b)



(c)

G=(V,E)	G´=(V´,E´)	G´=(V´,E´)
V={1,2,3,4}	V´={1,2,3,4}	V´={1,2,3,4}
E={(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)}	E´={(1,2),(2,3),(3,4)}	E´={(1,2),(3,4)}

(b) dan (c) adalah subgraph dari (a)

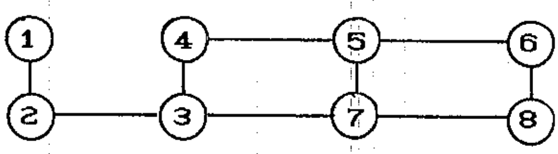
Definisi 20

Graph Bagian adalah suatu Subgraph dengan V´ hanya terdiri dari beberapa vertek G, dan E´ terdiri dari semua rusuk (x,y) dari G=(V,E), sehingga x dan y keduanya dalam V´.

$$V' \subset V$$

$$E' = \{(x,y) \in E \mid x \in V' \text{ dan } y \in V'\}$$

Contoh 18



Subgraph G´=(V´,E´) adalah Graph Bagian, bila diambil

V´={5,6,7,8}

maka rusuknya

E´={(5,6),(6,8),(8,7),(7,5)}

Definisi 21

Dua vertek dikatakan Berdekatan bila kedua vertek dihubungkan oleh suatu rusuk (x,y).

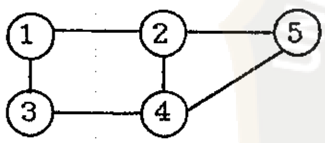
Himpunan Berdekatan dari Y=Adj(Y) adalah himpunan semua vertek yang tidak berada dalam Y yang berdekatan ke vertek Y, dengan Y adalah subset dari vertek G=(V,E).

$G=(V,E), Y \subseteq V$

$Adj(Y)=\{x \in V-Y \mid \exists\ y \in Y \ni (x,y) \in E\}$

V-Y adalah himpunan semua vertek V yang tidak ada dalam Y.

Contoh 19



Vertek 1 dan 3 berdekatan karena (1,3) merupakan rusuk, demikian pula untuk vertek-vertek 1 dan 2, 3 dan 4, 2 dan 4 dan seterusnya, dengan rusuk berturut-turut (1,2),(3,4),(2,4).

Untuk Y={3} maka Adj(3)={1,4}

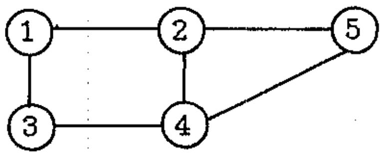
Y={3,4} maka Adj(3,4)={1,2,5}

Definisi 22

Lintasan adalah barisan himpunan vertek yang berbeda $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m+1})$ sedemikian sehingga x_i dan x_{i+1} berdekatan untuk i=1,2,3, ... ,m, m=panjang lintasan.

Lintasan dengan panjang m juga bisa dipandang sebagai himpunan berurutan dari m rusuk (x_1,x_2) , (x_2,x_3), (x_3,x_4), . . . , (x_m,x_{m+1}).

Contoh 20

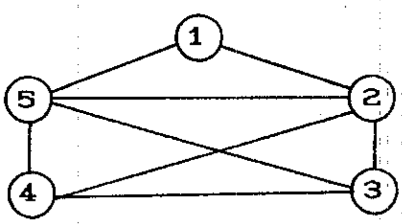


Barisan vertek (1,2,4,5) mempunyai panjang lintasan m = 3, barisan vertek (1,3,4) mempunyai panjang lintasan m = 2.

Definisi 23

Sikel adalah suatu lintasan yang mempunyai barisan vertek $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ dengan $n>3$, $x_0=x_n$ dan vertek-vertek $x_1,x_2,\ldots,x_n$ berbeda.

Contoh 21

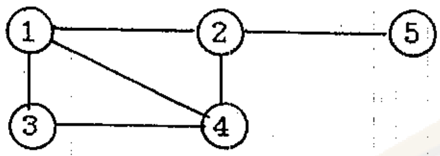


barisan vertek (1,2,5,1),(1,2,3,5,1), dan (1,2,3,4,5,1) adalah suatu sikel.

Definisi 24

Derajat = deg(x)
adalah banyaknya kejadian rusuk ke suatu vertek.

Contoh 22



deg(1) = 3

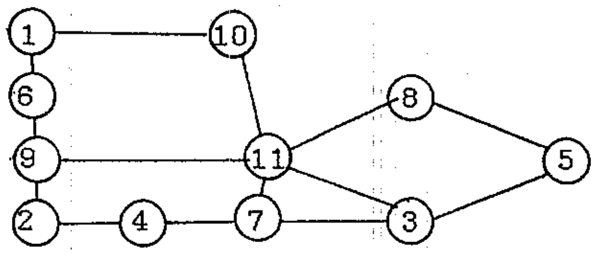
deg(2) = 3

deg(5) = 1

Definisi 25

Jarak = d(x,y) diantara dua vertek x dan y adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan vertek x dan y.

Contoh 23



d(1,3) = 3

d(9,3) = 2

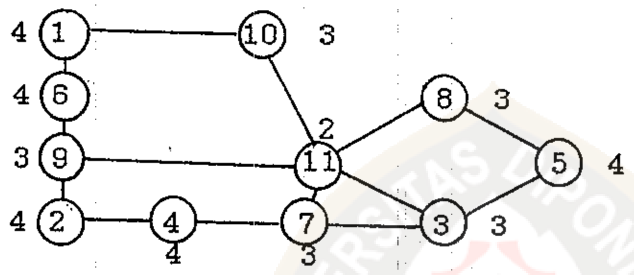
d(2,8) = 3

Definisi 26

Eksentrisitas = e(y) dari suatu vertek y adalah jarak terbesar antara vertek y dengan sembarang vertek lain pada Graph G=(V,E) tersebut.

$$e(y) = \max \{d(y,x) \mid x \in V\}$$

Contoh 24



d(1,4) = e(1) = e(4) = 4

d(2,5) = e(2) = e(5) = 4

d(5,6) = e(5) = e(6) = 4

Bilangan-bilangan diluar lingkaran vertek menyatakan besarnya eksentrisitas dari masing-masing vertek.

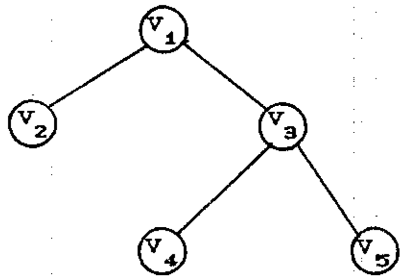
Definisi 27

Diameter adalah Eksentrisitas yang terbesar dari sembarang vertek suatu Graph G = (V,E).

Definisi 28

Pohon adalah Graph terhubung yang tidak mempunyai sikel. Pohon dikatakan berakar bila suatu vertek r ditunjuk sebagai akar.

Contoh 25



II.3. STRUKTUR TINGKATAN

Suatu Graph G=(V,E) dapat dibagi dengan beberapa cara. Bila vertek-vertek dibagi ke dalam tingkatan-tingkatan, maka akan didapatkan suatu Struktur Tingkatan.

Definisi 29

Suatu Struktur Tingkatan $L_o, L_1, \ldots, L_m$ dengan m+1 tingkat adalah bila subset didefinisikan sedemikian hingga

$$Adj(L_i) \subseteq L_{i-1} \cup L_{i+1} \qquad 0<i<m$$

$$Adj(L_o) \subseteq L_1$$

$$Adj(L_m) \subseteq L_{m-1}$$

dengan $Adj(L_i)$ adalah himpunan vertek yang berdekatan ke vertek-vertek di L_i, maka m adalah panjang struktur

tingkatan, dan lebarnya didefinisikan sebagi jumlah maksimum vertek pada sembarang tingkat.
Struktur Tingkatan mempunyai sifat yang sangat penting dalam pembagian kelas-kelas. Dalam suatu Struktur Tingkatan masing-masing L_i, $0<i<m$ adalah pemisah dari suatu graph $G=(V,E)$.

Definisi 30

Suatu Struktur Tingkatan dikatakan berakar pada L_o jika diberikan $L_o \subset V$ dan masing-masing himpunan sisanya berdekatan union dari himpunan sebelumnya.

$$L_i = \mathrm{Adj}\left(\bigcup_{j=o}^{i-1} L_j \right) \qquad i > 0$$

Definisi 31

Jika L_o adalah vertek tunggal x, yaitu $L_o = \{x\}$ maka dikatakan Struktur Tingkatan berakar pada x.

Penyelidikan adalah suatu prosedur yang memeriksa vertek dan rusuk suatu Graph $G=(V,E)$ dalam barisan.
Barisan dengan vertek-vertek yang diperiksa dapat digunakan untuk mengurutkan graph, dan sifat rusuk yang didapatkan selama penyelidikan digunakan untuk memilih rusuk ke dalam kelas-kelas.

Penyelidikan dimulai dengan memilih sembarang vertek S. Vertek-vertek lain kemudian diperiksa dalam barisan yang ditentukan dengan beberapa aturan.

Penyelidikan adalah Lebar Pertama bila kita menyelidiki semua rusuk yang terjadi ke arah vertek sebelum bergerak ke vertek baru.

Penyelidikan Lebar Pertama digunakan untuk menghasilkan Stuktur Tingkatan Berakar. Penyelidikan Lebar Pertama memilih vertek-vertek ke dalam tingkatan-tingkatan dan menandai rusuknya sebagai busur pohon atau hubungan yang menyeberang.

Tingkat L_o adalah vertek awal itu sendiri. Pada tahap tertentu selama penyelidikan , telah teridentifikasi semua vertek dalam tingkat tertentu L_i.Semua vertek dalam tingkat sebelumnya telah diperiksa terlebih dahulu, dan juga menandai vertek-vertek dalam L_i segera setelah diperiksa.

Kemudian untuk sembarang $y \in L_i$, menyelidiki rusuk yang mendahului dari y ke vertek yang lain.

Definisi 32

Rusuk dinamakan busur pohon adalah jika rusuk menjangkau suatu vertek belum diperiksa z yang berada dalam tingkat L_{i+1}.

Busur pohon hanya menghubungkan vertek-vertek dalam tingkatyang berdekatan dan tidak menghubungkan antar vertek-vertek dalam tingkat L_j dan vertek lain di tingkat L_k jika $|j-k| > 1$. Karena itu masing-masing tingkat L_i, untuk $1<i<m$ adalah suatu pemisah dalam graph G=(V,E).
Hubungan yang menyeberang adalah jika rusukmenjangkau suatu vertek yang telah diperiksa x, maka rusuk (y,x) adalah hubungan yang menyeberang. Vertek yang diperiksa ini terletak hanya dalam tingkat L_i atau L_{i+1}, oleh karena itu hubungan yang menyeberanghanya menghubungkan vertek pada tingkat yang sama atau tingkat yang berdekatan.
Algoritma merujuk pada Rose, dengan menggunakan antrian untuk menyimpan vertek dalam barisan yang ditemukan.
Misal graph G=(V,E) dan ambil V_v sebagai himpunan vertek yang diperiksa, dan E_t himpunan rusuk yang merupakan busur pohon.

Algoritma 1 (Algoritma Rose)

1.Inisialisasi:

Antrian awal untuk mengisi vertek awal s.

Menempatkan level(s)=0, $V_v \longleftarrow \{s\}$ dan

$E_t \longleftarrow \varnothing$

2.Membentuk anggota pemisah

- Bila antrian kosong { $\varnothing$ } $\longrightarrow$ Stop
- Memindahkan vertek y ke belakang antrian dan temukan himpunan S dari vertek belum diperiksa

yang berdekatan ke y

$$S \longleftarrow Adj(y) \cap \{(V-V_v)\}$$

3 Memilih vertek dan rusuk

- jika $S = \emptyset$ ke langkah 2
- untuk masing-masing $z \in S$,kerjakan sebagai berikut:

3a. tambahkan z ke depan antrian

3b. tempatkan level(z)=level(y)+1

3c. menandai (y,z) sebagai busur pohon :

$$E_t \longleftarrow E_t \cup (y,z)$$

3d. menandai z telah diperiksa

$$V_v \longleftarrow V_v \cup \{z\}$$

4.Loop ke langkah 2

Pada akhir algoritma semua vertek yang level(y)=i berada pada tingkat L_i dan semua rusuk di $E-E_t$ adalah hubungan yang menyeberang.

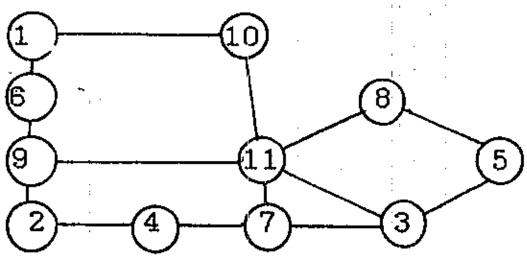
Pohon Perentang yang dihasilkan adalah himpunan vertek V dari graph asal dan rusuknya adalah suatu busur pohon.

Contoh 26

Diketahui suatu graph G=(V,E) dengan :

V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

E={(1,10),(10,11),(11,8),(8,5),(5,3),(3,11),
(3,7),(11,7),(11,9),(7,4),(4,2),(2,9),(9,6)}



Ditanya : Buatlah struktur tingkatannya

Jawab :

Vertek-vertek {10,1,6,2,4,5,8} mempunyai derajat minimum = 2. Ambil sembarang vertek yang mempunyai derajat minimum tersebut misal vertek 10.

Langkah 1 Vertek 10 sebagai vertek awal s, sehingga

level(10) = 0 dan {10} $\longrightarrow V_v$

---

10 L_o

Langkah 2 Antrian = 1,11,6,9,7,3,8,2,4,5

$S \longleftarrow Adj(y) \cap \{(V - V_v)\}$

$S \longleftarrow Adj(10) \cap \{(V - V_v)\}$

$S \longleftarrow \{1,11\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11\}$

$S \longleftarrow \{1,11\}$

Langkah 3 $z \in \{1,11\}$

level(1) = level(10) + 1

= 0 + 1 = 1

level(11) = level(10) + 1

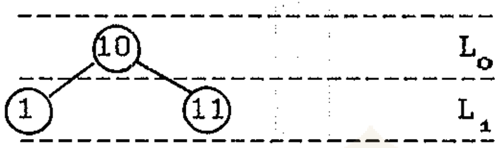
= 0 + 1 = 1

Jadi (10,1) dan (10,11) adalah busur pohon E_t

$V_v \longleftarrow V_v \cup \{z\}$

$V_v \longleftarrow \{10\} \cup \{1,11\}$

$V_v \longleftarrow \{10,1,11\}$



Langkah 4 Loop ke langkah 2

Langkah 2 Antrian = 6,9,7,3,8,2,4,5

$S \longleftarrow Adj(y) \cap \{(V - V_v)\}$

$S \longleftarrow Adj(1,11) \cap \{(V - V_v)\}$

$S \longleftarrow \{6,9,7,3,8,10\} \cap \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$S \longleftarrow \{6,9,7,3,8\}$

Langkah 3 $z \in \{6,9,7,3,8\}$

z = 6 maka level(6) = level(1) + 1
= 1 + 1 = 2

z = 9 maka level(9) = level(11) + 1
= 1 + 1 = 2

z = 7 maka level(7) = level(11) + 1
= 1 + 1 = 2

z = 3 maka level(3) = level(11) + 1
= 1 + 1 = 2

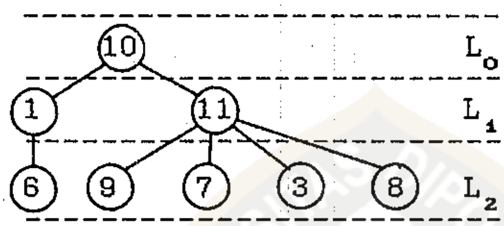
z = 8 maka level(8) = level(11) + 1
= 1 + 1 = 2

Jadi (1,6), (11,9), (11,7), (11,3), (11,8) adalah busur pohon E_t

$V_v \longleftarrow V_v \cup \{z\}$

$V_v \longleftarrow \{10,1,11\} \cup \{6,9,7,3,8\}$

$V_v \longleftarrow \{10,1,11,6,9,7,3,8\}$



Langkah 4 Loop ke langkah 2

Langkah 2 Antrian = 2,4,5

$S \longleftarrow Adj(y) \cap \{(V - V_v)\}$

$S \longleftarrow Adj(6,9,7,3,8) \cap \{2,4,5\}$

$S \longleftarrow \{1,2,4,11,5\} \cap \{2,4,5\}$

$S \longleftarrow \{2,4,5\}$

Langkah 3 $z \in \{2,4,5\}$

z = 2 maka level(2) = level(9) + 1

= 2 + 1 = 3

z = 4 maka level(4) = level(7) + 1

= 2 + 1 = 3

z = 5 maka level(5) = level(3) + 1

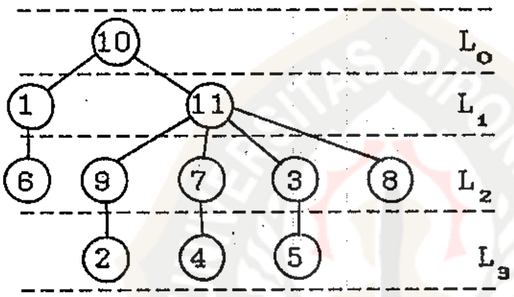
= 2 + 1 = 3

Jadi (9,2), (7,4), (3,5), adalah busur pohon E_t

$V_v \longleftarrow V_v \cup \{z\}$

$V_v \longleftarrow \{10,1,11,6,9,7,3,8\} \cup \{2,4,5\}$

$V_v \longleftarrow \{10,1,11,6,9,7,3,8,2,4,5\}$



Langkah 4 Loop ke langkah 2

Antrian kosong sehingga algoritma berhenti

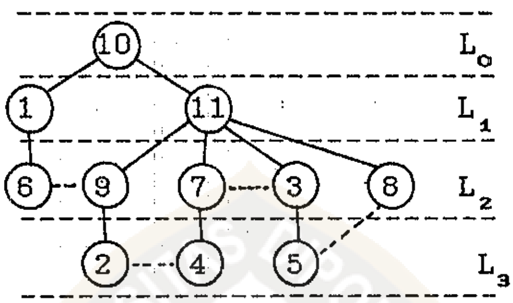
Busur pohon E_t = {(10,1), (10,11), (1,6), (11,9), (11,7), (11,3), (11,8), (9,2), (7,4), (3,5)}

Hubungan yang menyeberang = E - E_t

= {(10,1), (10,11), (1,6), (11,9), (11,7), (11,3), (11,8), (6,9), (7,3), (8,5), (3,5), (7,4), (2,4), (9,2)} - {(10,1), (10,11), (1,6), (11,9), (11,7), (11,3), (11,8), (9,2), (7,4), (3,5)}

= {(6,9), (7,3), (8,5), (2,4)}

sehingga hubungan yang menyeberang yang dihasilkan adalah (6,9),(7,3),(8,5), (2,4) yang ditandai dengan garis putus-putus sehingga didapatkan suatu struktur tingkatan sebagai berikut



Menurut definisi 32 maka panjang struktur tingkatan L_3 = 3.

II.4. VERTEK PSEUDOPERIPHERAL

Banyak algoritma sparse matriks yang dikerjakan pada graph yang berkaitan dengan matriks, memerlukan suatu vertek awal yang mempunyai eksentrisitas yang besar.

Definisi 33

Vertek Pseudoperipheral x adalah suatu kondisi jika y adalah sembarang vertek dengan d(x,y)=e(x), maka e(x)=e(y).

Algoritma dari Gibbs berawal pada vertek r yang mempunyai derajat minimum, dan dibentuk suatu struktur tingkatan yang berakar pada r. Bila y adalah vertek pada tingkat terbesar, panjang struktur tingkatan adalah jarak antara r dan y, yang sama dengan eksentrisitas r. Eksentrisitas y sama dengan atau lebih besar dari panjang struktur tingkatannya, dengan demikian eksentrisitas y lebih besar dari eksentrisitas r. Oleh karena itu algoritma disusun dengan struktur tingkatan yang berakar pada vertek-vertek tingkat terbesar yang dipilih sesuai dengan kenaikan derajatnya sampai didapatkan struktur yang lebih panjang. Prosedur diulangi sampai semua kemungkinan struktur tingkatan telah mempunyai panjang yang sama, dalam hal ini maka r adalah vertek pseudoperipheral. Dalam struktur tingkatan yang berakar pada r, kadang-kadang terdapat banyak vertek pada tingkat terbesar, bila demikian maka memilih vertek sebagai wakil adalah vertek dengan derajat terendah dari masing-masing komponen terhubung yang tingkat terbesarnya mungkin terbagi.

Algoritma 2

Algoritma mencari vertek pseudoperipheral adalah sebagai berikut:

1. Menentukan suatu vertek r yang berderajat minimum.
2. Menyusun struktur tingkatan yang berakar pada r.
3. Temukan semua komponen terhubung dalam graph bagianyang

berkorespondensi ke tingkat terbesar dari struktur tingkatannya

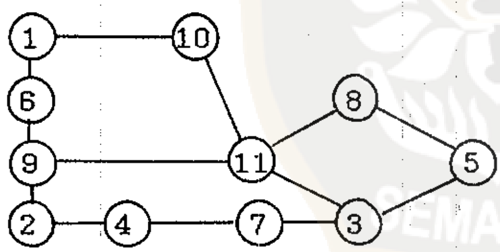
4. Untuk masing-masing komponen, temukan suatu vertek yang berderajat minimum dan membuat struktur tingkatan berakarnya.

   Jika untuk sembarang y, struktur tingkatan lebih panjang daripada yang berakar pada r, ambil r ⟵ y lalu ke langkah 3.

5. Vertek awal r adalah vertek dengan eksentrisitas tinggi.

Contoh 27

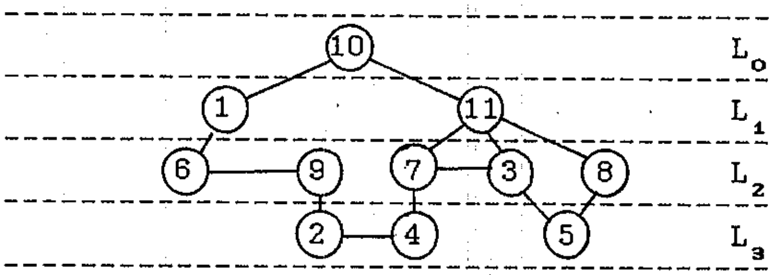
Diketahui : graph G=(V,E) sebagai berikut



Ditanya : Carilah vertek pseudoperipheralnya

Jawab :

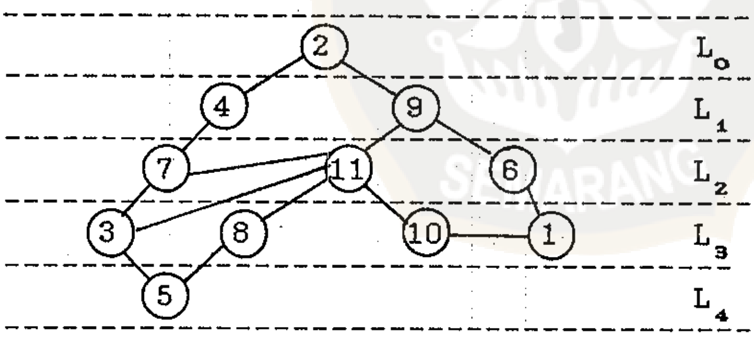
Vertek-vertek 1,10,6,2,4,5,8 mempunyai derajat sama dengan 2 dan ambil sembarang vertek yang mempunyai derajat minimum tersebut misalkan vertek 10 maka dengan menggunakan algoritma 1 didapatkan struktur tingkatan sebagai berikut :



Menurut definisi 32 maka panjang struktur tingkatan adalah $L_3 = 3$.

Vertek-vertek 2,4 dan 5 terletak pada tingkat terbesar.

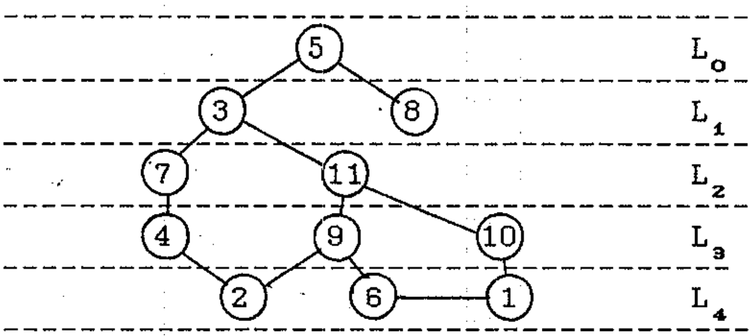
Ambil vertek 2 dari komponen terhubung pertama (2,4) dan menemukan bahwa struktur tingkatan yangberakar pada vertek 2 menurut algoritma 1 adalah sebagai berikut:



Maka menurut definisi 32 panjang struktur tingkatannya adalah $L_4 = 4$.

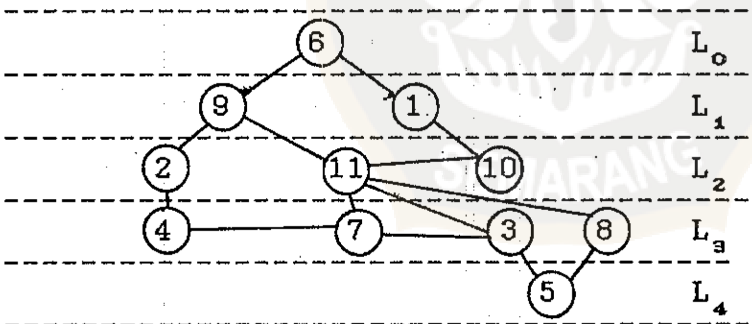
Vertek 5 terletak pada tingkat terbesar.

Ambil vertek 5 dan menemukan bahwa struktur tingkatan yang berakar pada vertek 5 dengan menggunakan algoritma 1 adalah sebagai berikut:

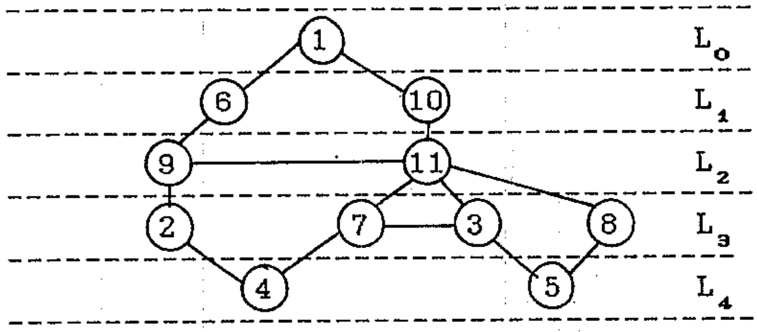


Menurut definisi 32 maka panjang struktur tingkatannya adalah L_4 = 4.

Sekarang ambil vertek 6 sebagai akar dari struktur tingkatan sehingga menurut algoritma 1 dapat dibuat suatu struktur tingkatan sebagai berikut :



Menurut definisi 32 maka panjang stuktur tingkatannya adalah L_4 = 4. Demikian juga untuk vertek 1 sebagai akar dari struktur tingkatan dan menurut algoritma 1 dapat dibuat suatu struktur tingkatan sebagai berikut :



Dari definisi 25 maka

d(2,5) = e(2) = e(5) = 4.

d(5,1) = e(1) = e(5) = 4.

d(4,1) = e(1) = e(4) = 4.

Dari hasil di atas maka didapatkan vertek-vertek {2,5,6,4,1} adalah vertek pseudoperipheral.