BAB II
PROGRAM LINIER

2.1. Pengertian Umum.

Program linier merupakan teknik untuk menentukan suatu keputusan dari suatu perencanaan yang bersifat analitis. Analisa-analisa di dalamnya menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan suatu kombinasi alternatif untuk memecahkan masalah. Dari sekian alternatif pemecahan masalah yang ada, dipilih variasi terbaik yang mampu mendukung penyusunan suatu strategi guna mencapai tujuan yang optimal. Jadi yang terpenting adalah menentukan variasi dari pemecahan yang memenuhi persyaratan-persyaratan yang ada agar tujuan yang optimal dapat dicapai.

Kondisi optimal tersebut terlihat dari fungsi tujuan, sehingga mencakup masalah memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan yang memenuhi persyaratan yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan kendala. Perlu ditekankan bahwa semua fungsi yang digunakan dalam program linier berupa fungsi-fungsi linier.

Contoh dan Model

Sebuah perusahaan Slo Elektronik akan memproduksi dua model pre-amp. Masing-masing model tentu saja memerlukan bermacam-macam komponen, namun yang menjadi masalah karena terbatasnya persediaan transistor, IC dan dioda. Dalam satu unitnya masing-masing model tersebut memerlukan komponen sebagai berikut. Model I memerlukan 2 transistor, sebuah IC dan 1 dioda. Model II memerlukan sebuah transistor, 2 buah IC dan 3 dioda. Untuk masing-masing komponen, persediaan maksimumnya adalah 24 transistor, 18 IC dan 24 dioda. Adapun laba per unit dari model I Rp 3.000,00 dan model II Rp 2.000,00.

Dari data perusahaan di atas dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti di bawah ini

Tabel 2-1 Data Perusahaan Slo Elektronik

Keperluan Komponen	Produk		Persediaan Maksimum
	Model I	Model II	
Transistor	2	1	24
IC	1	2	18
Dioda	1	3	24
Laba per unit	3 (ribuan)	2 (ribuan)	

Dari contoh di atas dapat disusun model matematika sebagai berikut. Permasalahannya menentukan alokasi komponen transistor, IC dan dioda agar jumlah produk yang dihasilkan dari model I dan model II menghasilkan keuntungan semaksimal mungkin. Misalnya produk model I dinyatakan dalam x_1 dan model II dalam x_2 sedangkan fungsi tujuan dinyatakan dalam Z. Karena jumlah produk tidak mungkin negatif, maka dalam program linier masalah di atas dapat dirumuskan sebagai berikut

Memaksimumkan $Z = 3x_1 + 2x_2$

dengan kendala
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Masalah program linier di atas dapat ditulis dalam bentuk umum

Memaksimumkan $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k$

dengan kendala
$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k &\leq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mk} x_k &\leq b_m \end{aligned}$$

dengan $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, k$

Bentuk di atas merupakan bentuk standar program linier. Sedangkan untuk masalah kendala dengan tanda "≥" dan "=" akan dibahas tersendiri.

2.2. Metode Simpleks Primal

Untuk menyelesaikan masalah program linier dengan metode simpleks, kendala-kendala dalam bentuk pertidaksamaan harus diubah ke dalam bentuk persamaan yang ekuivalen. Untuk pertidaksamaan kendala dengan tanda "≤" maka ruas kiri ditambah dengan variabel slack. Penambahan variabel slack ini tidak akan mempengaruhi nilai fungsi tujuan karena dalam fungsi tujuan koefisien variabel slack adalah nol. Dengan adanya penambahan variabel slack pada pertidaksamaan kendala, maka masalah PL di atas dapat dirumuskan dalam bentuk :

Memaksimumkan

$$Z = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} + \dots + c_n x_n$$

dengan kendala

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + \dots + a_{1k} x_k + a_{1(k+1)} x_{k+1} + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2k} x_k + a_{2(k+1)} x_{k+1} + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mk} x_k + a_{m(k+1)} x_{k+1} + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}$$

dengan $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$

$c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n = 0$

Dalam hal ini $n = k + m$.

Model ini memiliki m persamaan dan n variabel sehingga dalam pemecahan awal variabel non basis harus mencakup (n − m) variabel sama dengan nol.

Model di atas dapat diekspresikan dalam bentuk

Memaksimumkan $Z = CX$

dengan kendala $AX = b$

di mana $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks yang berkaitan dengan variabel basis awal merupakan matriks identitas berukuran m x m. Pada pemecahan awal, menggunakan tabel simpleks disajikan sebagai berikut

Tabel 2-2

	VB	x_1		x_k	x_{k+1}		x_n	PB
KV	Z	z_1-c_1	...	z_k-c_k	$z_{k+1}-c_{k+1}$	...	z_n-c_n	0
t_i	$(X_B)_i$		A			I		$\hat{b}_i$

Operasi dalam Tabel

1. Menentukan variabel masuk yaitu variabel non basis yang berkaitan dengan $(z_j - c_j)$ negatif dengan nilai absolut terbesar (kasus maksimisasi), $(z_j - c_j)$ positif terbesar (kasus minimisasi). Andaikan variabel non basis yang menjadi variabel masuk tersebut x_k maka α^k yaitu kolom ke-k dari matriks (A,I) disebut kolom pivot.
2. Menentukan variabel keluar

   2.1. Menghitung $\gamma_i = \dfrac{\hat{b}_i}{\alpha_i^k}$; $\alpha_i^k \geq 0$

   $i = 1,2, \ldots ,m$

   2.2. Menentukan $\beta = \min\limits_i \gamma_i$, misalnya $\beta = \gamma_r = \dfrac{\hat{b}_r}{\alpha_r^k}$,

   $i = 1,2,\ldots,m$

   maka baris ke-r disebut baris pivot dan α_r^k , elemen ke-r dari kolom α^k disebut elemen pivot.

2.3. Variabel basis yang berada pada baris ke-r yaitu $(x_B)_r$ dikeluarkan menjadi non basis dan bernilai nol.

3. Menyusun tabel baru sebagai berikut

3.1. $(x_B)_r$ keluar diganti x_k.

3.2. Operasi pada baris pivot

$$\text{baris r baru} = \frac{\text{baris r lama}}{\alpha_r^k}$$

3.3. Untuk $i \neq r$, maka

$$\text{baris i baru} = \text{baris i lama} - \alpha_i^k \times \text{baris r baru}$$

$i = 1,2,\ldots,m$

4. Uji optimalitas

Jika pada baris Z tidak ada $(z_j - c_j)$ yang negatif (kasus maksimisasi), positif (kasus minimisasi) maka pemecahan untuk fungsi tujuan Z telah mencapai optimal

2.3. Pemecahan Awal Buatan Untuk Metode Simpleks Primal

Masalah PL yang telah dibahas dalam 2.2 semua batasan yang digunakan berjenis " ≤ " yang memberikan pemecahan awal yang layak dengan variabel basis terdiri dari variabel slack. Kondisi seperti ini tidak dipenuhi oleh semua model dalam program linier. Hal ini disebabkan adanya model yang harus dirumuskan dengan batasan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan berjenis " ≥ ".

Masalah yang timbul di sini diatasi sebagai berikut

1. Untuk kendala jenis persamaan, maka ruas kiri ditambah variabel buatan R yang akan berperan sebagai variabel slack.

2. Untuk kendala pertidaksamaan berjenis " ≥ " maka ruas kiri dikurangi dengan variabel surplus, kemudian ditambah variabel buatan R.

Dalam kasus maksimisasi dengan memberikan koefisien -M pada R dalam fungsi tujuan maka proses optimisasi yang dijalankan dari iterasi ke iterasi selanjutnya menyebabkan R berharga nol pada pemecahan optimal. Dengan logika yang sama untuk kasus minimisasi diberikan koefisien +M pada R dalam fungsi tujuan.

Contoh berikut mengilustrasikan adanya variabel surplus dan variabel buatan.

Meminimumkan $Z = x_1 + 3x_2$

dengan kendala

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Dikonversikan ke bentuk standar simpleks menjadi

Meminimumkan $Z = x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2$

dengan kendala

$$x_1 + 4x_2 - x_3 + R_1 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + R_2 = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$$
$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ R_1 \geq 0,\ R_2 \geq 0$$

R_1 dan R_2 dalam fungsi tujuan dihilangkan dengan substitusi $R_1 = 4 - x_1 - 4x_2 + x_3$

$R_2 = 6 - 3x_1 - 2x_2$

sehingga persamaan Z menjadi

$$Z = (1 - 4M)x_1 + (3 - 6M)x_2 + Mx_3 .$$

Tabel simpleks untuk penyelesaian ini ditunjukkan dalam tabel 2-7.

Tabel 2-7

	VB	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	PB
KV	Z	4M-1	6M-3	-M	0	0	0	10M
M	R_1	1	4	-1	1	0	0	4
M	R_2	3	2	0	0	1	0	6
0	x_4	2	3	0	0	0	1	6
	Z	$\frac{10M+1}{4}$	0	$\frac{2M-3}{4}$	$\frac{-6M+3}{4}$	0	0	4M+3
3	x_2	1/4	1	-1/4	1/4	0	0	1
M	R_2	5/2	0	1/2	-1/2	1	0	4
0	x_4	5/4	0	3/4	-3/4	0	1	3
	Z	0	0	-7/10	$\frac{-10M+7}{10}$	$\frac{-10M+1}{10}$	0	17/5
3	x_2	0	1	-3/10	3/10	-1/10	0	3/5
1	x_1	1	0	1/5	-1/5	2/5	0	8/5
0	x_4	0	0	1/2	-1/2	-1/2	1	1

2.4. Kejadian Khusus dari Tabel Simpleks

Degenerasi

Kejadian degenerasi dapat terjadi jika penentuan variabel keluar terdapat dua atau lebih rasio minimum yang sama. Secara teori memang dapat dipilih secara sembarang, namun pada iterasi berikutnya satu atau lebih dari variabel basis bernilai nol sehingga mengakibatkan terjadinya loop atau cycling. Hal ini menunjukkan bahwa perumusan model yang digunakan memiliki batasan yang berlebihan. Ini mengisyaratkan terdapat batasan yang tidak perlu digunakan. Untuk mengilustrasikan kejadian ini diberikan contoh berikut.

Memaksimumkan $Z = 4x_1 + 5x_2$

dengan kendala $x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 + 3x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Dalam bentuk standar simpleks perumusan model di atas menjadi

Memaksimumkan $Z = 4x_1 + 5x_2$

dengan kendala $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Tabel simpleks untuk masalah ini ditunjukkan dalam tabel 2-8.

Tabel 2-8 Degenerasi

KV	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	PB
	Z	-4	-5	0	0	0
0	x_3	1	1	1	0	2
0	x_4	2	3	0	1	6
	Z	-2/3	0	0	5/3	10
0	x_3	1/3	0	1	-1/3	0
5	x_2	2/3	1	0	1/3	2
	Z	0	0	2	1	10
4	x_1	1	0	3	-1	0
5	x_2	0	1	-2	1	2

Dari iterasi I dan II terlihat bahwa nilai dari fungsi tujuan tidak membaik, Z = 10. Jadi secara umum prosedur simpleks mengulang urutan iterasi yang sama tanpa pernah memperbaiki nilai fungsi tujuan.

Optimum Alternatif

Optimum Alternatif terjadi jika fungsi tujuan mencapai kondisi optimum dimana variabel basis memberikan pemecahan yang berbeda tetapi nlai optimum tetap sama. Keadaan ini terjadi jika terdapat variabel non basis yang memiliki $z_j - c_j = 0$, yang menunjukkan bahwa variabel tersebut berkesempatan menjadi basis dengan tidak mempengaruhi nilai Z, tetapi nmenyebabkan perubahan dalam nilai variabel basis. Untuk mengilustrasikan kejadian ini diberikan contoh berikut :

Memaksimumkan $Z = 2x_1 + 6x_2$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Dalam bentuk standar simpleks rumusan model di atas menjadi

Memaksimumkan $Z = 2x_1 + 6x_2$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$$

Tabel simpleks untuk kejadian ini ditunjukkan dalam tabel 2-9.

Tabel 2-9 Optimum Alternatif

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	PB
KV	Z	-2	-6	0	0	0
0	x_3	1	1	1	0	4
0	x_4	1	3	0	1	6
	Z	0	0	0	2	12
0	x_3	2/3	0	1	-1/3	2
6	x_2	1/3	1	0	1/3	2
	Z	0	0	0	2	12
2	x_1	1	0	3/2	-1/2	3
6	x_2	0	1	-1/2	1/2	1

Dalam praktek, kejadian optimum alternatif ini justru menguntungkan karena memberikan kesempatan untuk memilih variasi pemecahan yang paling sesuai dengan situasi tanpa mempengaruhi nilai optimum.

Pemecahan Tidak Terbatas

Keadaan ini terjadi jika kolom pivot memiliki elemen negatif dan nol. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh sebagai berikut.

Memaksimumkan $Z = 3x_1 + 4x_2$

dengan kendala $2x_1 - 3x_2 \leq 12$

$3x_1 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$

Dalam bentuk standar simpleks perumusan model di atas menjadi

Memaksimumkan $Z = 3x_1 + 4x_2$

dengan kendala $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 12$

$3x_1 + x_4 = 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Tabel simpleks untuk masalah ini ditunjukkan dalam tabel 2-10.

Tabel 2-10 Pemecahan Tidak Terbatas

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	PB
KV	Z	-3	-4	0	0	0
0	x_3	2	-3	1	0	12
0	x_4	3	0	0	1	15

Variabel non basis x_2 memiliki $z_2 - c_2 = -4$ sehingga berkesempatan untuk menjadi basis, tetapi kolom $\alpha^2 \leq 0$. Hal ini menyebabkan tak ada rasio minimum yang dibuat. Oleh karena itu kondisi optimum tidak mungkin tercapai.

Pemecahan Tidak Layak

Pemecahan tidak layak terjadi jika terdapat sekurang-kurangnya satu variabel non basis yang memiliki $z_j - c_j$ positif (kasus maksimisasi), negatif (kasus minimisasi) pada iterasi optimal yang mestinya berkesempatan menjadi basis. Untuk mengilustrasikan kejadian ini diberikan contoh berikut.

Memaksimumkan $Z = x_1 + 2x_2$

dengan kendala

$$3x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 - 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Dalam bentuk standar simpleks perumusan model di atas menjadi

Memaksimumkan $Z = x_1 + 2x_2$

dengan kendala

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Tabel simpleks untuk masalah ini ditunjukkan dalam tabel 2-11.

Tabel 2-11 Pemecahan Tidak Layak

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	PB
KV	Z	-1	-2	0	0	0
0	x_3	3	1	1	0	3
0	x_4	2	-2	0	1	4
	Z	5	0	2	0	6
1	x_1	3	1	1	0	3
0	x_4	8	0	0	3	12

2.5. Metode Simpleks Primal yang Direvisi

Gagasan umum dalam metode simpleks adalah memulai perhitungan pada satu titik ekstrim dan melanjutkan ke satu titik ekstrim di sebelahnya dengan memperbaiki kondisi optimal sambil mempertahankan kelayakan. Salah satu cara untuk memilih titik ekstrim awal adalah menggunakan basis B yang berkaitan dengan variabel slack dan / atau variabel buatan. Dengan cara ini maka pada pemecahan awal B merupakan matriks identitas. Titik ekstrim yang bersebelahan ditentukan dengan menukar satu vektor kolom dalam B dengan vektor non basis, yang akan menggerakkan pemecahan ke arah optimal.

Untuk menjelaskan peranan basis B dalam pembahasan ini maka permasalahan PL direpresentasikan dalam bentuk

Mengoptimalkan $Z = CX$

dengan kendala $(A,I)X = b$

$X \geq 0$

Kemudian X dibedakan menjadi variabel basis dengan X_B, variabel non basis dengan X_N. Selanjutnya C dibedakan menjadi C_B dan C_N, dengan C_B : koefisien X_B dan C_N koefisien X_N pada persamaan Z. Jadi masalah PL dalam bentuk standar dapat ditulis menjadi

$$Z = C_N X_N + C_B X_B$$

$$AX_N + BX_B = b$$

Kemudian dalam bentuk matriks dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_N & -C_B \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_N \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Pada setiap iterasi X_B mewakili variabel basis yang berkaitan dengan B sebagai basis. Pada awal iterasi B = I berarti bahwa X_B mewakili m elemen dari X dan B mewakili vektor (A,I) yang berkaitan dengan X_B. Karena semua variabel non basis bernilai nol maka pemecahan optimal ditentukan oleh variabel basis sehingga $Z = C_B X_B$ dan $BX_B = b$. Kemudian dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai pemecahan X_B dan Z dilakukan dengan mengalikan invers dari

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan metode matriks yang dipartisi maka

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} b \\ 0 & B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Tabel simpleks dalam bentuk umum dapat direpresentasikan dengan mempertimbangkan

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -C_N & -C_B \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_N \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} A - C_N & C_B B^{-1} - C_B \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_N \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Jadi dalam bentuk matriks tabel simpleks, ditunjukkan dalam tabel berikut

Tabel 2-12

	VB	X_N	X_B	PB
KV	Z	$C_B B^{-1} A - C_N$	$C_B B^{-1} - C_B$	$C_B B^{-1} b$
t	X_B	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

Dari tabel di atas terlihat bahwa pada setiap iterasi keseluruhan tabel dapat dihitung setelah basis B yang berkaitan dengan X_B diketahui. Dengan diketahuinya basis B maka invers basis B^{-1} dapat ditentukan. Setiap elemen dalam tabel simpleks merupakan fungsi dari B^{-1} (data semula).

2.6. Bentuk Hasil Perkalian dari Inversi

Dengan adanya penukaran variabel masuk dan variabel keluar menyebabkan perubahan basis pada setiap iterasi. Dari tabel simpleks dalam bentuk matriks semua perhitungan melibatkan invers dari basis. Oleh karena itu diperlukan suatu metode untuk menentukan invers basis pada suatu iterasi yang dibentuk dari invers basis pada iterasi sebelumnya. Mengingat bahwa pertukaran variabel keluar dan variabel masuk menyebabkan perubahan dalam invers basis pada setiap iterasi berbeda hanya dalam satu kolom.

Dalam metode simpleks primal yang direvisi metode yang digunakan adalah metode bentuk hasil perkalian dari inversi. Metode ini merupakan prosedur aljabar matriks yang menghitung invers sebuah basis baru dari basis yang lain, dengan ketentuan bahwa kedua basis tersebut berbeda tepat pada satu kolom. Untuk menentukan invers basis berikutnya B_b^{-1} dilakukan dengan mengalikan invers basis yang ada dengan matriks E, yang dibentuk secara khusus. Didefinisikan matriks I_m sebagai matriks identitas dengan ukuran m x m.

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ m baris}$$

m kolom

Ambil e_i adalah vektor kolom yang terdiri dari m elemen dengan elemen satu pada tempat ke-i dan nol di tempat yang lain.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I_m = (e_1 , e_2 , \ldots , e_m)$$

Diasumsikan bahwa B dan B^{-1} sudah diketahui dan vektor P_r dalam B digantikan oleh P_k . Didefinisikan $\alpha^k = B^{-1}P_k$, di mana α_i^k adalah elemen ke-i dari kolom α^k . Invers basis baru B_b^{-1} dapat dihitung sebagai berikut. Ambil T yang merupakan matriks identitas ukuran m x m, di mana kolom ke-r diganti dengan α^k .

$$T = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_r^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_m^k & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-r} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\hookrightarrow \text{kolom ke-r}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1^k/\alpha_r^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2^k/\alpha_r^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & +1/\alpha_r^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_m^k/\alpha_r^k & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Ambil $E = T^{-1}$, maka $E = (e_1 , e_2 , \ldots , e_{r-1} , \xi , e_{r+1} , \ldots , e_m)$

di mana

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^k/\alpha_r^k \\ -\alpha_2^k/\alpha_r^k \\ \vdots \\ +1/\alpha_r^k \\ \vdots \\ -\alpha_m^k/\alpha_r^k \end{bmatrix}$$

Invers basis berikutnya adalah $B_b^{-1} = EB^{-1}$.

Langkah-langkah dalam Metode Simpleks Primal yang Direvisi

Gagasan utama dari metode simpleks primal yang direvisi adalah menggunakan invers basis saat ini B^{-1} dan data awal masalah, untuk melakukan perhitungan guna menentukan variabel masuk dan variabel keluar. Penggunaan prosedur bentuk hasil perkalian dari inversi memudahkan perhitungan invers yang berturut-turut tanpa mengiversi basis secara langsung dari data awal. Seperti halnya dalam metode simpleks primal (biasa) basis awal merupakan matriks identitas I sehingga inversnya adalah dirinya sendiri. Jika B_i^{-1} mewakili invers basis yang berturut-turut dari iterasi ke-i dan E_i adalah matriks yang berkaitan sebagaimana didefinisikan sebelumnya, maka

$$B_1^{-1} = E_1 I,\ B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1},\ \ldots,\ B_i^{-1} = E_i B_{i-1}^{-1}$$

Dengan melakukan substitusi E secara berturut-turut akan menghasilkan

$$B_i^{-1} = E_i E_{i-1} \ldots E_2 E_1$$

Untuk menyelesaikan masalah PL menggunakan metode simpleks primal yang direvisi, mengikuti langkah-langkah berikut:

Langkah 1 : Menentukan vektor masuk P_k

Hitung $Y = C_B B^{-1}$, untuk semua vektor non basis P_j hitung $z_j - c_j = YP_j - c_j$

Langkah 2 : Penentuan vektor ke luar P_r

Dengan diketahuinya P_k menjadi vektor masuk, tentukan

1. Nilai variabel basis, $X_B = B^{-1}b$.
2. Koefisien variabel dari persamaan kendala untuk vektor masuk $\alpha^j = B^{-1}P_j$

Vektor ke luar P_r harus berkaitan dengan

$$\beta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\alpha_i^k} \; ; \alpha_i^k > 0 \right\}$$

Jika $\alpha_i^j \leq 0$ menunjukkan bahwa variabel tersebut tidak memiliki pemecahan yang layak.

Langkah 3 : Menentukan invers basis berikutnya

Dengan diketahuinya invers basis B_i^{-1} maka invers basis berikutnya B_{i+1}^{-1} ditentukan dengan $B_{i+1}^{-1} = E_{i+1}B_i^{-1}$.

Contoh

Memaksimumkan $Z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$

dengan kendala

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2$$
$$x_1 + 4x_3 \le 4$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

Penyelesaian

Dalam bentuk standar simpleks masalah PL di atas menjadi

Memaksimumkan $Z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$

dengan kendala

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 4x_3 + x_5 = 4$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$$

Iterasi I

$$X_B = (x_4,\ x_5)^T$$
$$C_B = (0,\ 0)$$
$$B = (P_4,\ P_5) = I$$
$$B_1^{-1} = I$$

Langkah 1 : Penghitungan $z_j - c_j$ untuk vektor non basis P_1, P_2 dan P_3

$$Y = C_B B_1^{-1} = (0,\ 0)I = (0,\ 0)$$

$$z_j - c_j = YP_j - c_j$$

$$(z_1-c_1, z_2-c_2, z_3-c_3) = Y(P_1, P_2, P_3) - (c_1, c_2, c_3)$$

$$(z_j - c_j) = (0,\ 0)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - (6,\ -2,\ 3)$$

$$= (-6,\ 2,\ -3)$$

$$\text{Min } z_j - c_j = z_1 - c_1 = -6,$$

P_1 menjadi vektor masuk

Langkah 2 : Menentukan vektor ke luar

Dengan diketahui P_1 menjadi basis

$$X_B = B_1^{-1} b = Ib = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^1 = B_1^{-1} P_1 = IP_1 = P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = 2/2 = 1,\ \gamma_2 = 4/1 = 4$$

$$\beta = \min(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 = 1$$

P_4 menjadi vektor ke luar

Langkah 3 : Menentukan invers basis berikutnya

Karena P_1 menggantikan P_4 dan $\alpha^1 = (2,\ 1)^T$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = EB_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Iterasi II

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = (x_1,\ x_5),$$

$$C_B = (6,\ 0)$$

Langkah 1 : Penghitungan $z_j - c_j$ untuk vektor non basis P_2, P_3 dan P_4

$$Y = C_B B_2^{-1} = (6,\ 0) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = (3,\ 0)$$

$$(z_2 - c_2, z_3 - c_3, z_4 - c_4) = Y(P_2, P_3, P_4) - (c_2, c_3, c_4)$$

$$(z_j - c_j) = (3,\ 0) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} - (-2,\ 3,\ 0)$$

$$= (-1,\ 3,\ 3)$$

$$\text{Min } z_j - c_j = z_2 - c_2 = -1,$$

P_2 menjadi vektor masuk

Langkah 2 : Menentukan vektor ke luar

Dengan diketahui P_2 menjadi basis

$$X_B = B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^2 = B_2^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = -, \gamma_2 = 3/(1/2) = 6$$

$$\beta = \min(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2 = 6$$

P_5 menjadi vektor ke luar

Langkah 3 : Menentukan invers basis berikutnya

Karena P_2 menggantikan P_5 dan $\alpha^2 = (-1/2, 1/2)^T$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1} = EB_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Iterasi III

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X_B = (x_1, x_2),$$

$$C_B = (6, -2)$$

Langkah 1 : Penghitungan $z_j - c_j$ untuk vektor non basis P_3, P_4 dan P_5

$$Y = C_B B_3^{-1} = (6, -2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (2, 2)$$

$$(z_3-c_3, z_4-c_4, z_5-c_5) = Y(P_3, P_4, P_5)-(c_3, c_4, c_5)$$

$$(z_j-c_j) = (2,\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (3,\ 0,\ 0)$$

$$= (9,\ 2,\ 2)$$

Semua $z_j - c_j \geq 0$, basis terakhir telah optimal.

Pemecahan optimal

$$X_B = B_3^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Z = C_B X_B = (6,\ -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 12$$