BAB II
MATERI DASAR

Pada bab kedua ini akan dibahas tentang materi - materi pendukung yang menunjang pembahasan materi inti. Adapun materi - materi penunjang tersebut meliputi aljabar linier, program linier, sistem persamaan linier, program linier multi sasaran, fungsi utilitas, efisiensi, kerucut kriteria, serta dasar - dasar penyelesaian program linier secara grafis.

2.1 MATRIK DAN VEKTOR

Definisi 2.1

Jika $A = (a_{ij})$ berukuran p x q dan $B = (b_{ij})$ berukuran q x r maka A X B adalah suatu matrik $C = (c_{ij})$ berukuran p x r. Perkalian matrik A dan B bisa dilakukan bila banyaknya kolom matrik A sama dengan banyaknya baris matrik B dan elemen c_{ij} sebagai hasil perkalian matrik A dan B,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

Contoh 2.1 :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A \ X \ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -5 \\ 6 & 6 & 15 & -11 \\ 10 & 10 & 23 & -17 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2

Suatu matrik $A = (a_{ij})$ berukuran m x n mempunyai transpose A^T berukuran n x m yang diperoleh dari A dengan menuliskan baris ke - i dari A, i = 1,2, ... ,m sebagai kolom ke - j dari A^T dan sebaliknya kolom ke-j dari A sebagai baris ke - i dari A^T. Dengan kata lain $A^T = (a_{ji})$

Contoh 2.2 :

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ dan } C^T = [\ 3 \ \ 2 \ \ 5\ ]$$

Definisi 2.3

Sebuah matrik yang hanya terdiri dari satu baris atau satu kolom saja disebut vektor (vektor kolom atau vektor baris).

Contoh 2.3 :

$$x = \begin{bmatrix} 22 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(b_{ij}) contoh diatas merupakan vektor kolom dengan panjang vektor = 3 dan $y^T = [-2, \ 1 \ ]$ adalah vektor baris. Tanda dari vektor-vektor ditulis dengan menggunakan huruf kecil : b, $\bar{d}$, x, y,...

Definisi 2.4

Vektor adalah himpunan dari bilangan real yang sejenis. Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ adalah vektor dari n elemen atau komponen.

2.2 Vektor Pada Ruang Dimensi n (R^n)

Definisi 2.5

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan ditentukan oleh arahnya.

Suatu vektor x di dalam ruang dimensi n (R^n) adalah vektor yang berkomponen bilangan real sejumlah n elemen yang ditulis dengan $x = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$

Definisi 2.6

Jika $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ adalah sembarang vektor pada R^n, maka dot product atau hasil kali didefinisikan sebagai:

$$x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

Contoh 2.4 :

$x = (2,3,1,4) \quad y = (1,0,1,3)$

$$x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (2.1 + 3.0 + 1.1 + 4.3) = 15$$

Jika hasil kali dari dua vektor sama dengan nol, maka dua vektor tersebut dikatakan orthogonal.

2.3 KOMBINASI LINIER DARI VEKTOR

Definisi 2.7

Himpunan $S = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ disebut *bebas linier* jika :

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$$

hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$

Sebaliknya himpunan $S = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ disebut *tak bebas linier* jika terdapat skalar - skalar $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ yang tidak semuanya sama dengan 0 sedemikian hingga

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0.$$

Jika n = 1 maka himpunan vektor S hanya mempunyai satu anggota, yaitu vektor v maka $S = \{ v \}$

(*) Jika $v = 0$, maka himpunan vektor S akan tak bebas linier, karena $kv = 0 \longrightarrow kv = 0$ terpenuhi juga untuk $k \neq 0$

(**) Jika $v \neq 0$, maka himpunan vektor S akan bebas linier karena $kv = 0$ hanya dipenuhi untuk $k = 0$

Selanjutnya kita akan menggunakan notasi matrik

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \quad \text{untuk}$$

menyatakan vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pada R^n. Hal ini dibenarkan karena operasi matrik berikut ini

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

Satu - satunya perbedaan adalah hasil - hasilnya dinyatakan secara vertikal dalam satu kasus dan secara horisontal untuk kasus yang lain.

ambil $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ sebagai matrik berordo n x 1 untuk vektor, maka

$$x^T y = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [y_1 x_1,\ y_2 x_2,\ \ldots,\ y_n x_n]$$

$$= y \cdot x$$

Jadi, bagi vektor pada notasi vertikal, kita punya rumus $x^T y = y \cdot x$

Sehingga hasil kalinya dapat dinyatakan sebagai

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

<u>Contoh 2.5</u> :

Ambil untuk $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,-1,0)$ dan $x_3 = (0,9,-1)$ merupakan anggota himpunan vektor $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ yang bebas linier sebab dari persamaan :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 = 0 \in R^3$$

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,-1,0)+\alpha_2(0,9,-1) = (0,0,0) \in R^3$$

$$\alpha_1 + 0 + 0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$0 - \alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$0 + 0 - \alpha_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

--- +

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \in R^3$$

mempunyai pemecahan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Sehingga S adalah adalah himpunan vektor yang bebas linier.

Sedangkan untuk $y_1 = (1,2,3)$ dan $y_2 = (0,0,0)$ merupakan himpunan vektor $\{y_1, y_2\}$ yang tak bebas linier (bergantung linier) sebab

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \in R^n$$

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,0,0) = (0,0,0)$$

$$\alpha_1 + 0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2\alpha_1 + 0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$3\alpha_1 + 0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Karena $\alpha_1 = 0$, maka α_2 tidak perlu 0.

<u>Definisi 2.8</u>

Sebuah vektor x dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jika terdapat bilangan real α_i, yang tidak semuanya nol, sedemikian sehingga :

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, dimana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar.

Contoh 2.6 :

a = (2,1,2), b = (1,0,3), c = (3,1,5)

a bisa dikatakan kombinasi linier dari b dan c

terlebih dulu menghitung harga-harga α_1 dan α_2

$$(2,1,2) = \alpha_1\ (1,0,3) + \alpha_2\ (3,1,5)$$

$$a = \alpha_1 b + \alpha_2 c$$

$$2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$1 = 0\ \alpha_1 + \alpha_2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2 = 3\ \alpha_1 + 5\alpha_2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dari Persamaan (2) diperoleh $\alpha_2 = 1$

Dari Persamaan (1) diperoleh $2 = \alpha_1 + 3\alpha_2$

$$2 = \alpha_1 + 3.1$$

$$2 = \alpha_1 + 3$$

$$\alpha_1 = -1$$

harga $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ substitusi ke persamaan

$(2,1,2) = \alpha_1\ (1,0,3) + \alpha_2\ (3,1,5)$ sehingga

$$(2,1,2) = -1\ (1,0,3) + 1\ (3,1,5)$$

maka penulisan persamaan yang diminta

$$a = -b + c$$

Definisi 2.9

Kombinasi linier dari vektor - vektor x_1, x_2, $\dots x_n \in R^n$ dikatakan kombinasi linier konvek jika dan hanya jika $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, dimana $\lambda_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Jika masing - masing dari $\lambda_i > 0$ dimana i = 1,2,..,n maka kombinasi liniernya disebut kombinasi linier konvek strictly positif.

Contoh 2.7 :

Kombinasi konvek dari x_1 dan x_2 berikut ini terletak pada garis hubung antara x_1 dan x_2.

Jika vektor x_1 adalah vektor posisi dengan x_1= (5,3) dan vektor x_2 adalah vektor posisi dengan x_2= (2,7).

Karena kombinasi konvek dari kedua vektor tersebut terletak pada garis yang menghubungkan kedua vektor tersebut, maka harus dicari persamaan garis yang melalui dua titik tersebut.

Dengan menggunakan persamaan

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{diperoleh}$$

$$\frac{x - 5}{2 - 5} = \frac{y - 3}{7 - 3}$$

$$\frac{x - 5}{-3} = \frac{y - 3}{4}$$

$4x - 20 = -3y + 9$

$3y = -4x + 29$

Selanjutnya diambil salah satu titik yang melalui segmen garis tersebut.

Untuk $x = 3$ maka

$3y = -12 + 29$

$y = \frac{17}{3}$

Kemudian diuji apakah titik $(3, \frac{17}{3})$ merupakan kombinasi konvek dari vektor x_1 dan x_2.

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

Jika $x = (3, \frac{17}{3})$, $x_1 = (5,3)$ dan $x_2 = (2,7)$ maka

Dari absis diperoleh

$3 = 5\lambda_1 + 2\lambda_2$ ....(1)

$\frac{17}{3} = 3\lambda_1 + 7\lambda_2$ ....(2)

Persamaan (2) diubah menjadi $17 = 9\lambda_1 + 21\lambda_2$ maka

$$\begin{array}{ll|l|l} 3 & = 5\lambda_1 + 2\lambda_2 & \times 21 & 63 = 105\lambda_1 + 42\lambda_2 \\ 17 & = 9\lambda_1 + 21\lambda_2 & \times 2 & 34 = 18\lambda_1 + 42\lambda_2 \end{array}$$

$29 = 87\lambda_1$ —

$\lambda_1 = \frac{1}{3}$

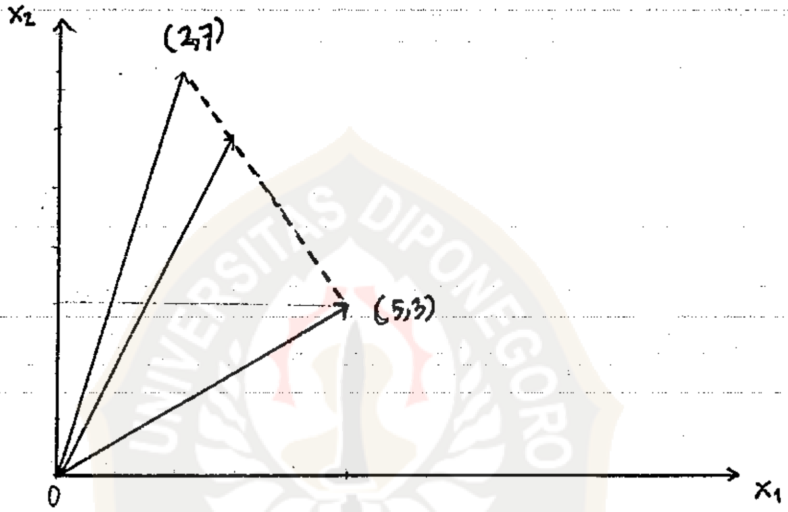
Jika λ_1 dimasukkan ke persamaan (2) maka

$17 = 9\frac{1}{3} + 21\lambda_2$

$$17 = 3 + 21\,\lambda_2$$

$$\lambda_2 = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

Karena $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ jadi vektor posisi $(3, \frac{17}{3})$ adalah kombinasi linier konvek dari vektor x_1 dan x_2 .



Gambar 2.1

<u>Definisi 2.10</u>

Misal himpunan V sedemikian sehingga jika x, y, z $\in V$ dan α, $\beta \in R$, dan memenuhi postulat sebagai berikut:

Penambahan

i. $x + y \in V$

ii. $x + y = y + x$

iii. $(x + y) + z = x + (y + z)$

iv. Terdapat $0 \in V$, $x + 0 = x$

v. Terdapat $-x \in V$, $x + (-x) = 0$

Perkalian

vi. $\alpha x \in V$

vii. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

viii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

ix. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

x. $1x = x$ dimana 1 adalah elemen satuan dari R

Maka V disebut ruang vektor dan elemen-elemennya disebut vektor.

Definisi 2.11

W suatu himpunan bagian dari sebuah ruang vektor V. W dinamakan ruang bagian dari V jika W itu sendiri adalah ruang vektor terhadap operasi penambahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V. Misalkan $W \subseteq R^n$ sedemikian sehingga $W = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, maka W adalah himpunan bagian dari R^n. Jika $x, y \in W$, maka:

(1) $W \neq \emptyset$, untuk itu ditunjukkan bahwa $0 \in W$

(2) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in R^n$

(3) $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in W$, $\alpha \in R$

Teorema 2.1

Jika W adalah himpunan semua kombinasi linier dari vektor x_i, $i = 1,2,\ldots,m$ dalam ruang vektor V maka W adalah subruang dari V.

Bukti :

Mula - mula dibuktikan $W \neq \emptyset$

Karena $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m$ kombinasi linier dari W, berarti $0 \in W$. Jadi terbukti bahwa $W \neq \emptyset$.

Ambil $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i$,

sedemikian hingga $x, y \in W$, maka

$$x + y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i,$$

$$x + y = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) x_i \in W$$

Jika $\alpha_i + \beta_i = \mu_i$ maka

$$x + y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \in W$$

$$\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda\alpha_i) x_i \in W$$

Jika $\lambda\alpha_i = \delta_i$, maka

$$\lambda x = \sum_{i=1}^{m} \delta_i x_i \in W, \lambda \in R$$

Jadi W adalah ruang vektor sehingga merupakan subruang dari V. ■

Teorema 2.2

Jika himpunan bagian dari n vektor tak bebas linier maka himpunan n vektor tersebut tak bebas linier.

Bukti :

Misal p vektor ($p<n$) $\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$ tak bebas linier akan dibuktikan bahwa $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ tak bebas linier.

Karena $\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$ tak bebas linier maka terdapat harga α_1, α_2, $\ldots,\alpha_p$ yang tidak semuanya sama dengan 0 sedemikian hingga

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i = 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

dimana

$$\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \alpha_n = 0$$

Karena diketahui $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ tidak semuanya sama dengan 0 sedemikian hingga

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$$

maka $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ tak bebas linier. ■

Teorema 2.3

Jika himpunan n vektor bebas linier maka himpunan bagiannya juga bebas linier.

Bukti :

Andaikan himpunan bagiannya tak bebas linier. Dari teorema 2, jika himpunan bagiannya tak bebas linier, maka himpunan n vektornya tak bebas linier. Kontradiksi dengan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bebas linier. Pengandaian diingkar. Jadi himpunan n vektor bebas linier, naka himpunan bagiannya bebas linier. Terbukti. ■

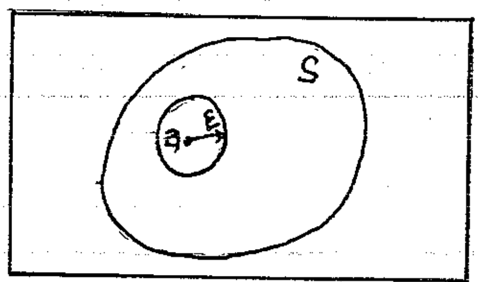
2.4 HIMPUNAN TERBUKA DAN TERTUTUP

Definisi 2.12

Titik a disebut *titik interior* dari $S \in R^n$ jika terdapat sekitar dari a yang memuat titik - titik dari himpunan S saja.

Contoh 2.8 :

$$| a + \varepsilon | = a', \varepsilon > 0, a, a' \in S$$



Gambar 2.2

Definisi 2.13

$S \in R^n$ dikatakan *himpunan terbuka* jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan S

Contoh 2.9 :

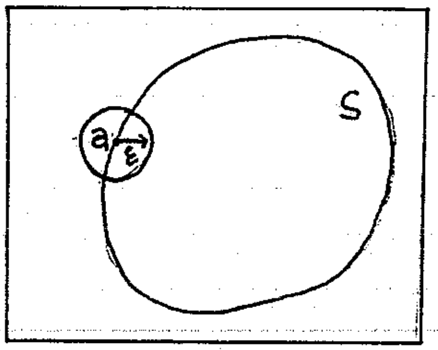
Himpunan $X = \{ [x_1, x_2] \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \}$

Definisi 2.14

Titik a disebut *titik limit* dari himpunan S, jika setiap sekitar dari a memuat titik - titik yang berada dalam himpunan S dan titik - titik yang tidak berada dalam himpunan S.

Contoh 2.10

$| a + \varepsilon | = a'$, $\varepsilon > 0$, a, $a' \in S$ atau $a' \notin S$



Gambar 2.3

Definisi 2.15

$S \in R^n$ dikatakan himpunan tertutup jika semua titik limitnya termuat dalam S.

Contoh 2.11 :

Himpunan $X = \{ [x_1, x_2] \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 \le 1 \}$

2.5 HYPERPLANE

Definisi 2.16

Suatu hyperplane H dalam R^n didefinisikan sebagai himpunan titik

$$X = \{ x \mid cx = z \}$$

dengan $c \neq 0$ adalah suatu vektor baris berkomponen n yang diberikan dan z adalah suatu skalar yang diketahui.

Suatu hyperplane dituliskan dengan persamaan berikut :

$$cx = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

dan setiap x yang memenuhi terletak pada hyperplane tersebut.

Disini c biasa disebut sebagai *normal* atau *gradien* dari hyperplane.

Jadi suatu hyperplane dalam R^n sama dengan suatu garis pada R^2 ataupun suatu bidang pada R^3.

2.6 PROGRAM LINIER SASARAN GANDA

Permasalahan optimasi dengan fungsi sasaran ganda merupakan permasalahan lebih dari satu tujuan/sasaran, dimana dibutuhkan tentang konsep-konsep fungsi Utilitas, Vektor kriteria Non dominasi, Vektor kriteria Dominasi, dan keefisienan.
Program Linier Sasaran Ganda ditulis dengan susunan sebagai berikut :
Terdiri dari fungsi sasaran, fungsi kendala dan syarat non negatif.
Dengan fungsi sasarannya adalah :

$$\text{Maks } \{c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = z_1\}$$
$$\text{Maks } \{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = z_2\}$$
$$\vdots$$
$$\text{Maks } \{c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n = z_1\}$$

yang memenuhi $x \in S$

dan memenuhi fungsi kendala sebagai berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.
.
.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

dengan syarat non negatifnya adalah

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$$

dimana

k adalah banyaknya sasaran

c_i adalah koefisien - koefisien fungsi sasaran ke - i

z_i adalah nilai sasaran dari sasaran ke - i

S adalah daerah fisibel

C adalah matrik kriteria berukuran k X n dengan elemen - elemenya adalah c_i , yaitu :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & & & & \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \ldots & c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{serta } z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_k \end{bmatrix}$$

maka fungsi sasaran dari Program Linier Sasaran Ganda dapat ditulis dengan

$$\text{Maks } \{ \lambda^T Cx \mid x \in S \}$$

dimana

C adalah matrik kriteria berukuran k X n

Z adalah vektor kriteria.

Catatan:

- R^n merupakan ruang keputusan yang menggambarkan daerah fisibel S yang dibatasi oleh orthan non negatif untuk menentukan titik optimal dari R^n.
- Untuk menggambarkan daerah fisibel Z diperlukan ruang kriteria (R^k) dalam menentukan vektor kriteria optimal. Z tidak perlu dibatasi oleh orthan negatif R^k.
- Daerah fisibel hanya bisa digambarkan pada ruang dimensi lebih kecil sama dengan 3.

2.7 FUNGSI UTILITAS

Definisi 2.17

Jika R^k adalah ruang kriteria berdimensi k dan $\bar{z} \in R^k$ adalah vektor kriteria dengan,

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}$$

maka :

fungsi Utilitas U adalah suatu fungsi yang memetakan $\bar{z}$ dari R^k ke R, atau $U : R^k \longrightarrow R$

Contoh 2.12 :

Pandang suatu Program Linier Sasaran Ganda

$$\text{Max } \{x_1 + x_2 = z_1\} \text{ ....1)}$$

$$\text{Max } \{x_1 \qquad = z_2\} \text{ ....2)}$$

dengan fungsi kendala

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \text{ ....3)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ....4)}$$

dimana $U = 2z_1 z_2$ ....5)

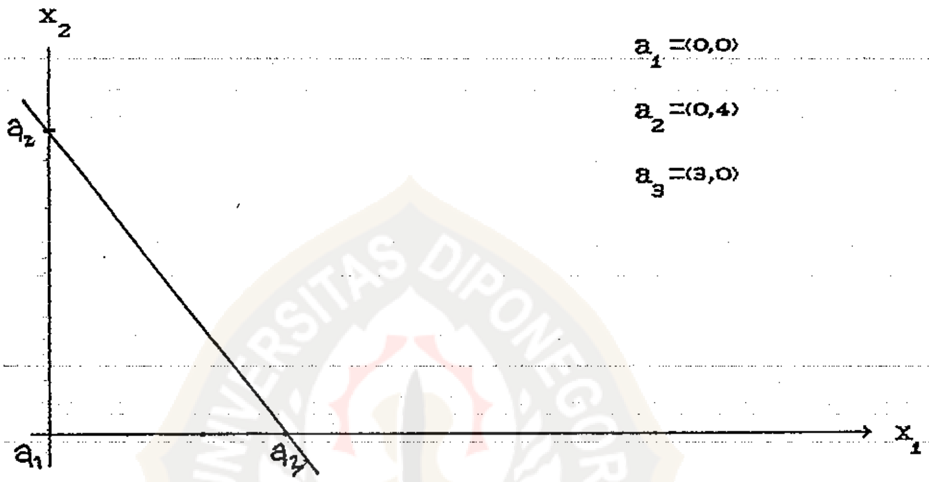
Penyelesaian ruang keputusan dari fungsi utilitas U dam variabel x adalah,

substitusi persamaan 1) ke persamaan 5)

$U = 2\ (x_1+x_2)x_1$

$= 2\ (x_1)^2 + 2x_1x_2$

Secara grafis



Gambar 2.4

Untuk a_1 = (0,0) maka fungsi utilitasnya adalah

$U = 2.\ 0.0 + 2.0.0\ = 0$

Untuk a_2 = (0,4) maka fungsi utilitasnya adalah

$U = 2.\ 0.0 + 2.0.4\ = 0$

Untuk a_3 = (3,0) maka fungsi utilitasnya adalah

$U = 2.\ 3.\ 3 + 2.3.0\ = 18$

Untuk a_1 = (0,0) maka z_1 = (0,0)

Untuk a_2 = (0,4) maka z_2 = (4,0)

Untuk a_3 = (3,0) maka z_3 = (3,3)

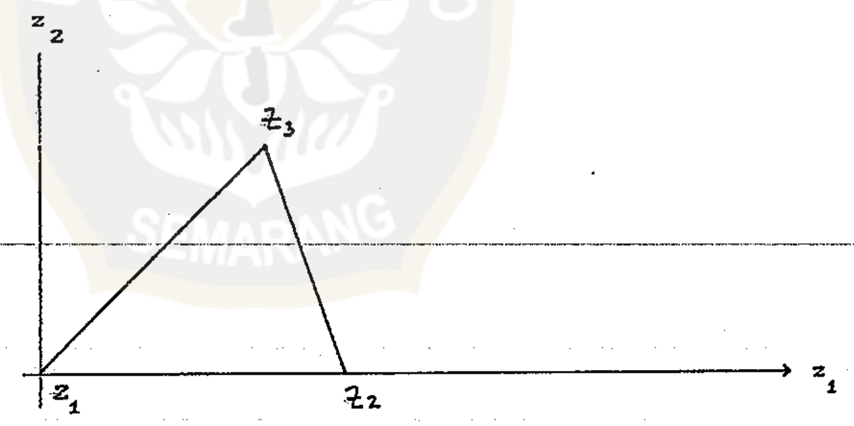
Maka

Untuk z_1 = (0,0) maka fungsi $U = 2.0 + 2.0 = 0$

Untuk z_2 = (4,0) maka fungsi $U = 2.16 + 2.0 = 32$

Untuk z_3 = (3,3) maka fungsi $U = 2.9 + 2.3.3 = 36$

Pada Gambar 2.4 dapat disimpulkan bahwa titik optimumnya adalah $a_3=(3,0)$,
Sedangkan penyelesaian dalam ruang kriteria adalah : $z_1=(0,0)$, $z_2=(4,0)$, $z_3=(3,3)$
dimana z_1, z_2, z_3 merupakan bayangan (image) dari a_1, a_2, a_3 .



Gambar 2.5

Pada gambar 2.5 bahwa z_3= (3,3) merupakan vektor kriteria yang optimal dan 36 adalah titik optimal dari fungsi U. Dan Karena a_3 = (3,0) adalah bayangan dari z_3, maka a_3 adalah titik optimal.

2.8 DOMINASI

Dengan adanya vektor-vektor kriteria diperoleh dua bentuk tentang dominasi berikut ini.

Definisi 2.18

Jika z_1, $z_2 \in R^k$ adalah dua vektor kriteria, maka z_1 mendominasi z_2 jika hanya jika $z_1 \geq z_2$ yaitu $z_{1i} \geq z_{2i}$ untuk semua i dan $z_{1i} > z_{2i}$ untuksekurang kurangnya satu i.

Jika z_1 mendominasi z_2 maka tidak ada komponen dari z_1 yang kurang dari komponen z_2 yang sesuai, dan paling sedikit satu komponen z_1 lebih besar dari komponen z_2 yang bersesuaian.

Definisi 2.19

Jika z_1, $z_2 \in R^k$ adalah dua vektor kriteria, maka z_1 dikatakan mendominasi dengan kuat z_2 jika dan hanya jika $z_1 \geq z_2$ untuk semua i.

Jika z_1 mendominasi dengan kuat z_2, maka masing-masing komponen z_1 lebih besar dari komponen z_2 yang sesuai.

Contoh 2.13 :

Vektor Kriteria	Harga Vektor			didominasi oleh
	z_1	z_2	z_3	
z_1	-1	3	4	z_2 (dengan kuat)
z_2	2	4	6	
z_3	2	2	5	z_2, z_4
z_4	3	2	5	
z_5	8	3	-1	z_6
z_6	8	3	0	

Dari tabel tersebut terdapat 6 vektor kriteria. z_1, z_3, z_5 didominasi oleh oleh vektor-vektor yang lain, seperti ditunjukkan dalam tabel tidak ada dominasi antara z_2, z_4, z_6.

2.9 EFISIENSI

Dengan mengingat bahwa vektor - vektor kriteria z dalam program linier multi sasaran diberikan oleh Cx, maka didapat definisi sebagai berikut :

Definisi 2.20

Suatu titik $x \in S$ disebut efisien jika hanya jika tidak terdapat $y \in S \mid Cy \geq Cx$ yaitu

$(\exists\, y_{ij} \in Cy > x_{ij} \in Cx)$

Kebalikan dari definissi di atas yaitu jika terdapat $y \in S \mid Cy \geq Cx$ disebut inefisien. Dengan kata lain, suatu titik $x \in S$ adalah efisien jika vektor kriterianya tidak didominasi vektor kriteria dari beberapa titik lain dalam S.

Contoh 2.13 :

Jika diketahui matrik kriteria C dan titik - titik a_1, a_2, a_3, a_4

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_1 = (3,5)$, $a_2 = (6,4)$

$a_3 = (6,8)$, $a_4 = (9,3)$

$$Ca_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$Ca_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$Ca_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$Ca_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Pada gambar diatas titik a_1 inefisien karena $Ca_1 \leq Ca_2$ menurut definisi 2.24 yaitu vektor kriteria a_1 didominasi a_2 tetapi a_2 yang inefisien, karena vektor kriterianya didominasi a_3 yaitu $Ca_2 \leq Ca_3$ sehingga pada contoh ini himpunan efisiennya adalah $\gamma(a_3, a_4)$

2.10 TITIK EFISIENSI FUNGSI TUJUAN KOMPOSIT

Fungsi tujuan komposit adalah masing - masng fungsi tujuan dengan skalar strictly positif k X n yang elemen barisnya adalah c_i, maka bentuk dari fungsi obyektif komposit ditulis dengan $\lambda^T Cx$ & $\lambda \in \Lambda$

dimana $\Lambda = \{ \lambda \in R^k | \lambda_i > 0 , \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \}$

Teorema 2.4

Jika $x \in S$ adalah nilai maksimal dari program linier fungsi komposit memaksimalkan $\{\lambda^T Cx \mid x \in S\}$ dimana $\lambda \in \Lambda$. Maka x adalah efisien.

Bukti :

Andaikan x inefisien. Maka menurut kebalikan dari definisi 2.20 terdapat $y \in S$ sedemikan hingga $Cy \geq Cx$

Karena $\lambda \in \Lambda$, dan $\Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$ adalah positif, maka $\lambda^T Cy > \lambda^T Cx$.

Kontradiksi dengan kenyataan bahwa x adalah nilai maksimal dari program linier komposit , maka pengandaian harus diingkar. Jadi x adalah inefisien. ■

2.11 NORM

Suatu norm pada R^n adalah suatu fungsi yang menugaskan tiap - tiap vektor $\bar{v} \in R^n$ menjadi suatu skalar $\| \bar{v} \| \in R$ jika hanya jika fungsi tersebut memenuhi aksioma berikut (untuk semua $\bar{w} \in R^n$ dan $k \in R$)

1. $\| \bar{v} \| \geq 0$
2. $\| \bar{v} \| = 0$ jika hanya jika $\bar{v} = 0 \in R^n$
3. $\| \bar{v} + \bar{w} \| \leq \| \bar{v} \| + \| \bar{w} \|$
4. $\| k\bar{v} \| = k \| \bar{v} \|$

Pembagian tiap - tiap komponen dari suatu vektor dengan normalnya akan menormalkan suatu vektor.

Jika L_1*-norm* adalah panjang resultan suatu vektor normal , maka

L_1 *dari* $\bar{v} \in R^n$ diberikan dengan

$$\| \bar{v} \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | \bar{v}_i |$$

Sedangkan L_1*-norm* dari $\bar{v} \in R^n$ diberikan dengan

$$L_1\text{-}norm = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\bar{v}}{\| \bar{v}_i \|} \right|$$

Contoh 2.14

Jika diketahui vektor $\bar{v} = (4, -5, 1)$

Maka L_1*-norm* dari vektor $\bar{v}$ adalah

$\| \bar{v} \| = |4| + |-5| + |1| = 10$

$$\frac{\bar{v}}{\| \bar{v} \|} = \frac{(4, -5, 1)}{10} = \left(\frac{4}{10}, \frac{-5}{10}, \frac{1}{10} \right)$$

$$L_1\text{-}norm = \left| \frac{4}{10} \right| + \left| \frac{-5}{10} \right| + \left| \frac{1}{10} \right| = \frac{10}{10} = 1$$