

HALAMAN PENGESAHAN

LEMBAR 1

Judul Skripsi : FUNGSI HARMONIK, SUBHARMONIK DAN  
SUPERHARMONIK

Nama : W a r t o y o

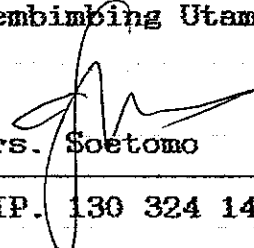
N I M : J 101 90 0392

Jurusan : Matematika

Telah selesai dan layak untuk diujikan pada tanggal  
3 September 1997.

Semarang, September 1997

Pembimbing Utama

  
Drs. Soetomo

NIP. 130 324 143

Pembimbing Anggota

  
Drs. YD Sumanto

NIP. 132 048 856

HALAMAN PENGESAHAN

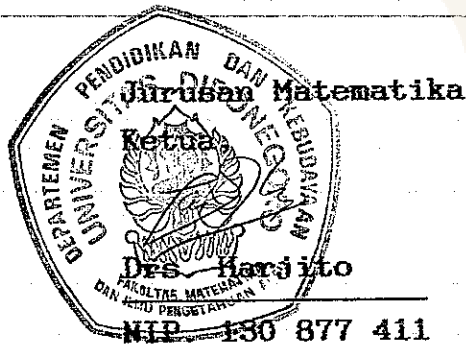
LEMBAR 2

Judul Skripsi : FUNGSI HARMONIK, SUBHARMONIK DAN  
SUPERHARMONIK  
Nama : W a r t o y o  
N I M : J 101 90 0392  
Jurusan : Matematika

Telah lulus ujian sarjana pada tanggal 3 September 1997.

Semarang, September 1997

Panitia Ujian Sarjana  
Jurusan Matematika



Ketua,

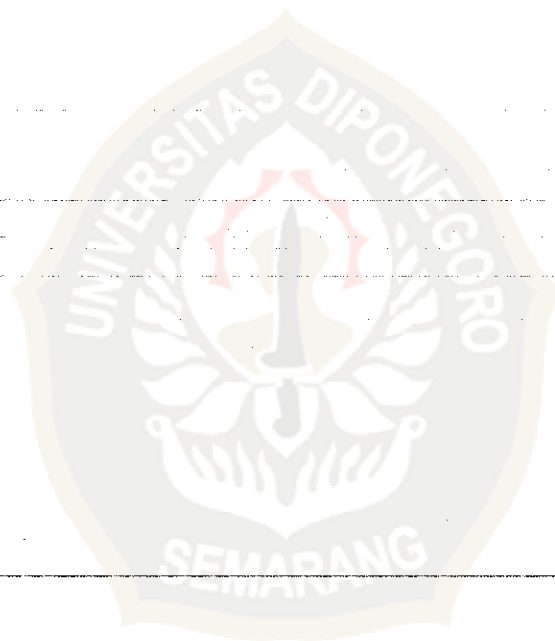
  
Drs. Soetomo

NIP. 130 324 143

## MOTTO

*Katakanlah : "Sekiranya samudera itu tinta untuk (menuliskan) kalimat-kalimat Tuhanku, Pasti ia kering sebelum habis kalimat-kalimat Tuhanku (dituliskan) sekalipun kita bawaan (tinta) sebanyak itu lagi sebagai tambahan".*

*(QS. Al Kahfi 18 : 109)*



*kupersembahkan buat Ayah dan Ibu serta  
adik-adik Danti Asuhan Puteri 'Aisyiyah Semarang*

## KATA PENGANTAR

Dengan mengucap syukur alhamdulillah kehadlirat Allah Yang Maha Pengasih dan Penyayang atas rahmat dan karunia-Nya, sehingga penyusunan skripsi yang berjudul **FUNGSI HARMONIK, SUBHARMONIK DAN SUPERHARMONIK** ini dapat terselesaikan.

Selesainya penyusunan skripsi ini tentu tidak lepas dari bimbingan, bantuan, saran, serta fasilitas dari berbagai pihak. Untuk itu dengan segala kerendahan hati perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Drs. Soetomo, selaku Dosen Pembimbing Pertama yang telah berkenan meluangkan waktu untuk membimbing dengan sabar sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
2. ~~Drs. YD. Sumanto, selaku Dosen Pembimbing Kedua yang telah berkenan memberikan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.~~
3. Drs. Harjito, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, yang secara administratif menunjang pelaksanaan penyelesaian penulisan skripsi.
4. Ayah dan Ibu serta kakak-kakak juga keponakan tercinta yang tiada lelahnya memberikan motivasi dan do'a sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

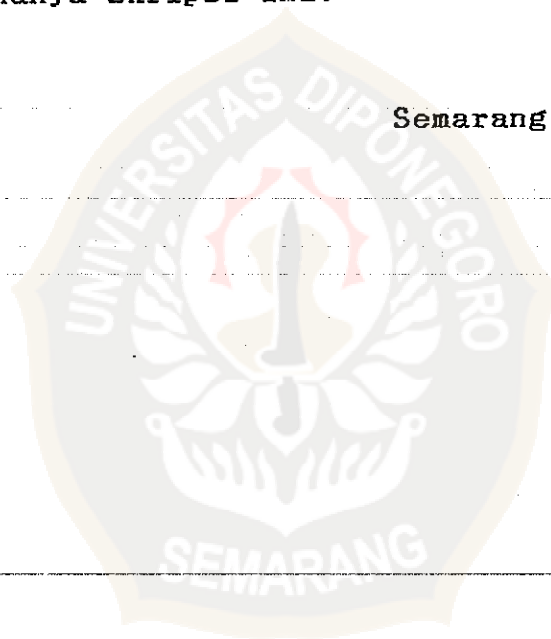
5. Laboratorium Komputer Universitas Diponegoro yang telah memeberikan fasilitas yang cukup memadai, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

6. Semua pihak yang tak dapat disebutkan satu-persatu yang telah banyak membantu penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya tiada gading yang tak retak, saran dan kritik yang bersifat membangun selalu penulis harapkan demi sempurnanya skripsi ini.

Semarang, September 1997

Penulis



## DAFTAR ISI

	halaman
Halaman Judul .....	i
Halaman Pengesahan .....	ii
Motto .....	iv
Halaman Persembahan .....	v
Kata Pengantar .....	vi
Abstraks .....	viii
Daftar Isi .....	ix
Daftar Simbol .....	xi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Permasalahan .....	1
1.3 Metode Pembahasan .....	2
1.4 Sistematika Penulisan .....	2
<b>BAB II MATERI PENUNJANG</b>	
2.1 Sistem bilangan kompleks .....	4
2.2 Bentuk kutub bilangan kompleks .....	5
2.3 Himpunan titik .....	5
2.4 Turunan Parsial .....	7
2.5 Limit dan kekontinuan .....	8
2.6 Syarat-syarat Cauchy-Riemann .....	10
2.7 Transformasi .....	16
2.8 Integral Kompleks .....	20
2.8.1 Kontur .....	20
2.8.2 Integral garis .....	21

2.8.3 Integral kontur .....	22
2.8.4 Daerah terhubung sederhana dan berganda .....	24
2.8.5 Teorema Cauchy-Goursat .....	25
2.8.6 Rumus Integral Cauchy .....	35
2.9 Prinsip Maksimum .....	38
<hr/>	
<b>BAB III FUNGSI HARMONIK, SUBHARMONIK DAN SUPERHARMONIK</b>	
3.1 Sifat-sifat fungsi harmonik .....	44
3.1.1 Sifat Nilai Rata-rata (Mean Value Property) untuk fungsi harmonik ....	45
3.1.2 Prinsip maksimum untuk fungsi harmonik .....	46
3.2 Fungsi harmonik pada cakram .....	47
3.2.1 Fungsi harmonik pada cakram satuan .	47
3.2.2 Fungsi harmonik pada sembarang cakram	54
3.3 Transformasi pada fungsi harmonik .....	59
3.4 Fungsi subharmonik dan superharmonik .....	62
<hr/>	
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	<b>72</b>
<b>Daftar Pustaka</b> .....	



## DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
$\mathbb{C}$	: himpunan bilangan kompleks
$ z $	: modulus dari bilangan kompleks $z$
$\operatorname{Re} f$	: bagian real dari bilangan kompleks $f$
$\operatorname{Im} f$	: bagian imajiner dari bilangan kompleks $f$
$\nabla^2$	: persamaan differensial Laplace
$c$	: himpunan bagian
$\varepsilon$	: bilangan positif kecil sembarang
$\delta$	: bilangan positif kecil sembarang
$\partial$	: diferensial parsial
$d$	: diferensial biasa
$M$	: harga maksimum suatu fungsi
$N_r(z_0)$	: persekitaran dari $z_0$
$\Sigma$	: jumlahan
$[a, b]$	: interval tertutup dari $a$ ke $b$
$P_r(\theta)$	: Poisson Kernell cakram satuan
$P_r(\phi - \theta)$	: Poisson Kernell cakram sembarang
$D$	: daerah
$C$	: kontur
$\bar{D}$	: penutup (closure) dari $D$

$\int_c$	: integral kontur
$D_z$	: daerah kompleks $z$
$L$	: panjang busur
$\Gamma$	: kurva tertutup sederhana
$\pi$	: phi
$\gamma$	: lingkaran
$\bar{z}$	: konjugat dari bilangan kompleks $z$
$P'$	: bayangan (image) dari titik $P$

