BAB II

PENAKSIRAN PARAMETER DAN REDUKSI BIAS DENGAN METODE GENERALIZED JACKKNIFE

2.1. Penaksir

Statistik adalah kumpulan dari cara-cara dan aturan-aturan mengenai pengumpulan, analisa, dan penarikan kesimpulan dari data. Untuk itu informasi mengenai populasi dapat dipelajari berdasarkan data yang diambil baik secara sampling ataupun sensus.

Dalam kenyataannya mengingat ketidakmungkinan untuk mengamati seluruh anggota populasi yang besar dan ketidakpraktisan pengamatan maka diambil sebuah sampel yang representatif lalu berdasarkan pada hasil analisis terhadap data sampel. Informasi mengenai populasi bisa ditinjau dari parameter populasi dengan cara menghitung dan menganalisa data sampel yang merupakan sampel acak. Cara pengambilan kesimpulan tentang parameter yang akan dibahas adalah sehubungan dengan cara-cara menaksir harga parameter. Jadi harga parameter yang sebenarnya, tetapi tidak diketahui akan ditaksir berdasarkan statistik sampel yang diambil dari populasi yang bersangkutan.

Taksiran ini dapat berupa taksiran titik atau berupa taksiran selang.

Yang akan dibahas disini adalah taksiran titik, dan statistik yang digunakan untuk memperoleh taksiran titik ini disebut penaksir.

Suatu penaksir pada sebuah parameter populasi adalah nilai tunggal pada sebuah statistik yang berhubungan dengan parameter tersebut. Lebih jelasnya, jika X sebuah variabel random dengan distribusi probabilita f(x), mempuyai parameter θ yang tidak diketahui, dan jika X_1, X_2, X_3, ..., X_n sebuah sampel random yang besarnya n dari X, maka statistik $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ yang berhubungan dengan θ disebut penaksir θ dan dinotasikan $\hat{\theta}$. Penaksir $\hat{\theta}$ adalah sebuah variabel random, karena penaksir tersebut merupakan sebuah fungsi data sampel.

Penaksir yang baik adalah penaksir yang dapat memberikan hasil sedekat mungkin ke parameter yang ditaksirnya. Jadi jelas sangat dikehendaki $\hat{\theta} = \theta$, yaitu bisa menyebutkan harga θ yang sebenarnya. Kenyataan yang bisa terjadi adalah

a. menaksir θ oleh $\hat{\theta}$ terlalu tinggi atau

b menaksir θ oleh $\hat{\theta}$ terlalu rendah.

2.2. Penaksir Tak Bias

Kita mengenal beberapa kriteria kebaikan suatu penaksir seperti Konsisten, Tak Bias dan Sesatan Kuadrat Rata-rata. Tetapi untuk keperluan pembahasan pada bab selanjutnya, yang akan dibahas disini adalah kriteria Tak Bias.

Definisi 2.2.1

Suatu penaksir titik $\hat{\theta}$ disebut penaksir tak bias untuk θ jika $E[\hat{\theta}] = \theta$.

Kriteria ini menyatakan bahwa rata-rata semua harga $\hat{\theta}$ yang mungkin akan sama dengan θ.

Sementara itu penaksir yang tidak tak bias disebut penaksir bias. Jika $\hat{\theta}$ adalah penaksir bias untuk θ dan bias dari penaksir dituliskan sebagai $B(\hat{\theta})$ maka

$$E[\hat{\theta}] = \theta + B(\hat{\theta})$$

Sehingga bias penaksir

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$
$$= E[\hat{\theta} - \theta]$$

Contoh 2.2

Misal X berdistribusi Uniform dalam interval $(0,\theta)$ dengan fungsi densitas

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , 0 < x < \theta \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ merupakan penaksir bias untuk θ.

$$E[X] = \int_0^\theta x\, f(x|\theta)\, dx = \int_0^\theta x\, \frac{1}{\theta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\theta = \frac{\theta}{2}$$

maka

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\, n\, \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\theta}{2}$$

$$E[\,\overline{X}\,] = \theta - \frac{\theta}{2}$$

2.3 Reduksi Bias Dengan Metode Generalized Jackknife

Selanjutnya akan dibicarakan beberapa definisi dan teorema reduksi bias suatu penaksir yang berdasarkan Statistik *Generalized Jackkniffe*. Bentuk penaksir ini pertama kali diperkenalkan oleh Quenuoille (1956) untuk maksud mereduksi bias, dan selanjutnya digunakan oleh Tukey (1958) mengembangkan metode umum untuk memperoleh aproksimasi interval kepercayaan.

2.3.1 Generalized Jackknife

Definisi 2.3.1.1

Jika diberikan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ adalah penaksir-penaksir untuk θ, kemudian untuk sebarang bilangan riil $R \neq 1$, didefinisikan Generalized Jackknife:

$$G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\hat{\theta}_1 - R\,\hat{\theta}_2}{1 - R} \quad \text{..................(2.3.1.1)}$$

Satu sifat yang penting dari $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ diberikan teorema berikut :

Teorema 2.3.1.1

Jika $E(\hat{\theta}_k) = \theta + b_k(n,\theta)$, $k=1,2$,

dengan $b_k(n,\theta)$ adalah bias dari suatu penaksir untuk θ atas sampel random yang besarnya n observasi. Dengan $b_2(n,\theta) \neq 0$.

dan

$$R = \frac{b_1(n,\theta)}{b_2(n,\theta)} \neq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.1.2)$$

maka $E\,[G(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)] = \theta$

Bukti :

$$G(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = \frac{\hat{\theta}_1 - R\,\hat{\theta}_2}{1 - R}$$

$$E\,[G(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)] = \frac{E(\hat{\theta}_1) - R\,E(\hat{\theta}_2)}{1 - R}$$

$$= \frac{\theta + b_1(n,\theta) - R\,[\theta + b_2(n,\theta)]}{1 - R}$$

$$= \frac{\theta + b_1(n,\theta) - R\,\theta - R\,b_2(n,\theta)]}{1 - R}$$

$$= \frac{(1-R)\theta + b_1(n,\theta) - R\,b_2(n,\theta)}{1 - R}$$

$$= \frac{(1-R)\theta + b_1(n,\theta) - \dfrac{b_1(n,\theta)}{b_2(n,\theta)}\,b_2(n,\theta)}{1 - R}$$

$$= \theta \qquad \blacksquare$$

Maksud dari teorema (2.3.1.1) adalah, jika R diketahui dan diberikan dengan persamaan (2.3.1.2), $G(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ adalah penaksir tak bias untuk θ. Dengan menganggap $G(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ sebagai suatu penaksir untuk θ jika R diketahui, pertanyaan yang segera timbul adalah bagaimana cara sebaiknya $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ dipilih.

Misal $\hat{\theta}_1$ adalah suatu penaksir tertentu dari θ atas sampel random $X_1,X_2,\ldots,X_n$ dengan

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta + b_1(n.\theta) = \theta + b(\theta)\ f(n)$$

Selanjutnya dimisalkan $\hat{\theta}_2$ adalah penaksir lain untuk θ didefinisikan atas sub sampel dari $X_1,X_2,\ldots,X_n$ yang diperoleh dengan membuang satu X_i maka

$$E(\hat{\theta}_2) = \theta + b_2(n.\theta) = \theta + b(\theta)\ f(n-1)$$

dan

$$R = \frac{b_1(n,\theta)}{b_2(n,\theta)} = \frac{b(\theta)\ f(n)}{b(\theta)\ f(n-1)} = \frac{f(n)}{f(n-1)}$$

Sehingga jika f(n) diketahui maka R diketahui. Karena pada umumnya R adalah fungsi dari n maka untuk selanjutnya digunakan R(n) untuk R.

2.3.2 Metode Quenuoille

Sekarang akan dibahas prosedur umum untuk memilih $\hat{\theta}_2$ jika $\hat{\theta}_1$ diberikan. Misal $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}$ adalah suatu penaksir θ yang didasarkan atas sampel random $X_1,X_2,\ldots,X_n$.

Dengan cara menghilangkan sebarang satu sampel ke-i dari sampel semula dan ditetapkan penaksir $\hat{\theta}_i$ sebagai penaksir θ yang ditetapkan atas sampel yang didapat setelah satu sampel ke-i dibuang.

Sehingga didefinisikan

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\theta}^i = \tilde{\hat{\theta}}^i$$

sebagai penaksir kedua dari sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$.