BAB II

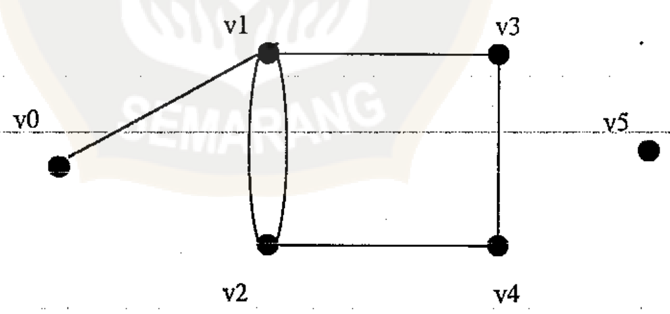
MATERI PENUNJANG

2.1 Konsep Dasar Pohon Biner

Definisi 2.1.1 :

Suatu graph G adalah himpunan V(G) yang anggotanya titik-titik, beserta sebuah himpunan E(G) yang anggotanya adalah garis-garis. Setiap elemen dalam E menghubungkan pasangan-pasangan titik dalam V. Jika $V = \phi$ graph tersebut disebut null graph. Untuk selanjutnya titik dalam V disebut simpul .

Contoh 2.1.1 :



Gambar 2.1

Gambar 2.1 menunjukkan suatu graph G (V,E) dengan $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ dan $E = \{ v_0v_1, (v_1v_2)_1, (v_1v_2)_2, v_2v_4, v_1v_3, v_3v_4 \}$.

Definisi 2.1.2 :

Graph paralel adalah graph yang mempunyai garis-garis paralel, yaitu dua garis atau lebih yang menghubungkan sepasang simpul.

Contoh 2.1.2 :

Pada gambar 2.1, simpul v_1 dan v_2 mempunyai 2 garis paralel yaitu $(v_1v_2)_1$ dan $(v_1v_2)_2$.

Definisi 2.1.3 :

Walk dari suatu graph G adalah barisan simpul dan garis secara bergantian : $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ yang dimulai dan diakhiri dengan simpul. Setiap garis dalam walk menghubungkan dua simpul, yaitu simpul-simpul yang berada tepat sebelum dan sesudahnya.

Definisi 2.1.4 :

Sebuah walk yang semua simpulnya berbeda disebut path.

Definisi 2.1.5 :

Sebuah walk yang semua garisnya berbeda disebut trail.

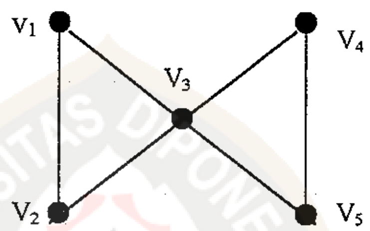
Definisi 2.1.6 :

Trail yang tertutup disebut circuit.

Definisi 2.1.7 :

Sebuah circuit dengan banyaknya simpul yang diulang adalah 1 ($v_0 = v_n$) disebut cycle.

Contoh 2.1.3 :



Gambar 2.2

Dengan menggunakan graph pada gambar 2.2 :

$W(v_1,v_5) = v_1\, v_2\, v_3\, v_5\, v_4\, v_3\, v_5$ adalah sebuah walk.

$P(v_1,v_5) = v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5$ adalah sebuah path.

$W(v_1,v_2) = v_1\, v_3\, v_4\, v_5\, v_3\, v_2$ adalah sebuah trail.

$W(v_1,v_1) = v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_3\, v_1$ adalah sebuah circuit tetapi bukan cycle.

$W(v_1,v_1) = v_1\, v_2\, v_3\, v_1$ adalah sebuah cycle.

Definisi 2.1.8 :

Sebuah graph dikatakan graph terhubung (connected graph) jika untuk setiap pasang simpul x dan y dalam G, terdapat sebuah path P(x,y).

Contoh 2.1.4 :

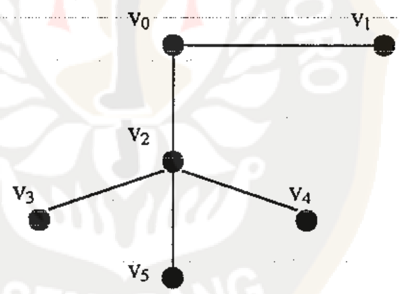
Graph pada gambar 2.1 bukan merupakan graph terhubung. Jika v_5 dihilangkan maka graph tersebut menjadi graph terhubung.

Definisi 2.1.9 :

Pohon (Tree) adalah suatu graph terhubung yang tidak memiliki cycle.

Contoh 2.1.5 :

Graph pada gambar 2.3 adalah sebuah pohon.



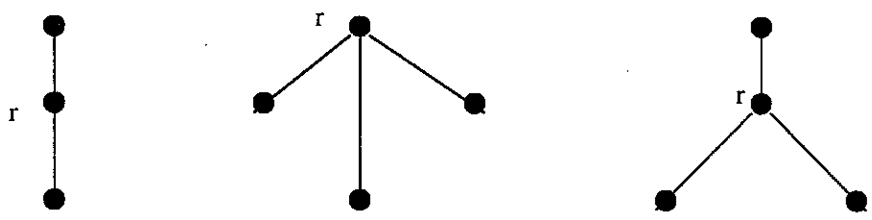
Gambar 2.3

Definisi 2.1.10 :

Suatu pohon yang salah satu simpulnya dijadikan akar (root) disebut pohon berakar (rooted tree).

Contoh 2.1.6 :

Ketiga bentuk pohon (a), (b), (c), pada gambar 2.4 mempunyai akar r .



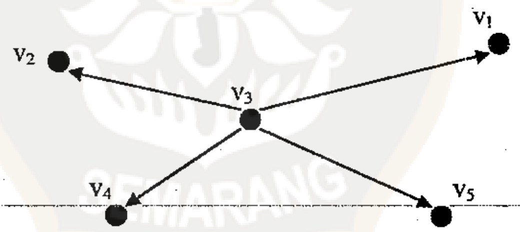
Gambar 2.4

Definisi 2.1.11 :

Pohon berarah adalah suatu pohon yang semua garisnya berarah.

Contoh 2.1.7 :

Pohon pada gambar 2.5 adalah pohon berarah.



Gambar 2.5

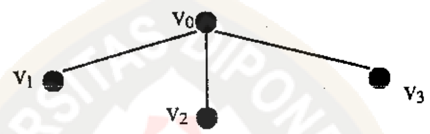
Untuk selanjutnya penulisan pohon di sini diartikan sebagai pohon berakar dan berarah.

Definisi 2.1.12 :

Derajat keluar (out degree) dari simpul v_i dalam pohon adalah banyaknya garis yang mempunyai v_i sebagai simpul awal dan dinotasikan d_{out} (v_i). Sedangkan derajat masuk (indegree) dari simpul v_j dalam pohon adalah banyaknya garis yang mempunyai v_j sebagai simpul akhir dan dinotasikan dengan d_{in} (v_j).

Contoh 2.1.8 :

Pohon pada gambar 2.6, dengan v_0 sebagai akarnya didapat d_{out} $(v_0) = 3$, d_{in} $(v_0) = 0$, $d_{out}(v_1) = d_{out}$ $(v_2) = d_{out}$ $(v_3) = 0$, d_{in} $(v_1) = d_{in}$ $(v_2) = d_{in}$ $(v_3) = 1$.



Gambar 2.6

Definisi 2.1.13 :

Pohon biner adalah pohon berakar sedemikian sehingga :

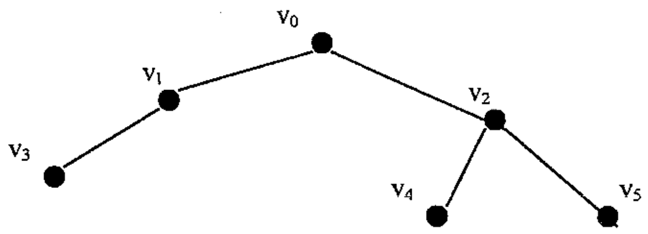
(i). Terdapat sebuah simpul r yang dijadikan akar dan d_{in} (r) = 0.

(ii). Semua simpul lainnya kecuali akar ($v \neq r$) mempunyai derajat masuk 1, d_{in} $(v) = 1$.

(iii). Setiap simpul mempunyai derajat keluar maksimal 2, maks { $d_{out}(v) = 2$ }.

Contoh 2.1.9 :

Gambar 2.7 adalah sebuah pohon biner dengan 6 simpul, dengan v_0 sebagai akarnya.



Gambar 2.7

Definisi 2.1.14 :

Sebuah pohon biner berarah berurutan (binary, directed, ordered tree) t didefinisikan secara rekursif sebagai :

$$t = \text{null} \vee (x,y,z)$$

dengan null adalah pohon yang kosong, yang tidak mempunyai simpul dan garis. (x,y,z) adalah tiga pasangan berurutan berikut :

x adalah subpohon kiri

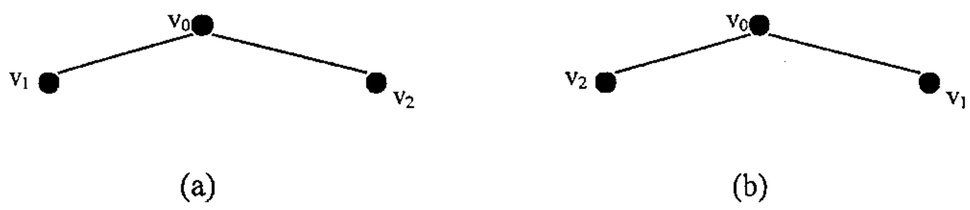
y adalah akar dari t, dan

z adalah subpohon kanan.

Untuk selanjutnya penulisan pohon biner diartikan sebagai pohon biner berarah berurutan.

Contoh 2.1.10 :

Gambar 2.8 adalah dua pohon biner yang berbeda.



Gambar 2.8

Definisi 2.1.15 :

Jika 2 simpul v_i dan v_j masing-masing merupakan simpul awal dan akhir dari garis v_iv_j pada pohon T maka v_j disebut simpul anak v_i, dan v_i disebut simpul parent (orang tua) v_j.

Contoh 2.1.11 :

Pada gambar 2.8 (a), v_1, v_2 adalah simpul anak dari v_0. Sebaliknya v_0 adalah simpul parent dari v_1 dan v_2.

2.2 Konsep Dasar Kombinatorik

2.2.1 Himpunan dan Kombinasi pada Himpunan

Definisi 2.2.1.1 :

Himpunan adalah sekelompok obyek yang berada dalam suatu kesatuan atau batasan yang mempunyai sifat keterikatan di antara anggota-anggotanya. Jika A adalah suatu himpunan dan x adalah anggota dari himpunan A maka dapat ditulis $x \in A$. Bila himpunan A = {a,b,c} maka himpunan tersebut mempunyai anggota-anggota a, b dan c.

Definisi 2.2.1.2 :

Himpunan A adalah himpunan bagian (subset) dari B jika dan hanya jika untuk setiap anggota A adalah anggota B, tetapi untuk setiap anggota B belum tentu anggota A, dinotasikan $A \subseteq B$.

Definisi 2.2.1.3 :

Misalkan r suatu bilangan bulat yang tidak negatip. Yang dimaksud dengan kombinasi r dari himpunan S yang terdiri dari n anggota yang berbeda adalah jumlah himpunan bagian dari S yang banyak anggotanya adalah r. Atau dengan perkataan lain banyaknya susunan r unsur dari S yang tidak terikat pada urutan yang dapat dibuat dari n unsur dari S.

Contoh 2.2.1 :

Bila S = {a,b,c,d} maka {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d} adalah keempat kombinasi 3 dari S.

Definisi 2.2.1.4 :

Banyaknya kombinasi-r dari n unsur dari S dinotasikan C(n,r) atau $\binom{n}{r}$. Dari definisi kombinasi jelas $\binom{n}{r} = 0$ untuk $r > n$.

Demikian pula untuk nilai n=0 dan r bilangan bulat positip.

Definisi 2.2.1.5 :

Untuk setiap bilangan bulat r dan n yang memenuhi r ≤ n,

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{2.1}$$

2.2.2 Koefisien Binomial

Bentuk $\binom{n}{k}$ disebut koefisien binomial karena koefisien-koefisien ini memenuhi definisi berikut.

Definisi 2.2.2.1 :

Misalkan n suatu bilangan bulat positip maka untuk setiap nilai x dan y akan dipenuhi :

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.3 Relasi Rekursif dan Fungsi Pembangkit

Definisi 2.2.3.1 :

Relasi rekursif yang tergantung pada nilai n adalah banyaknya barisan bilangan a_0,

a_1, a_2, ... ,a_n, sehingga a_n dapat dinyatakan sebagai fungsi dari n nilai a_i sebelumnya.

Contoh 2.2.2 :

Barisan Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... diperoleh dengan menggunakan relasi rekursif :

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$.

Definisi 2.2.3.2 :

Misalkan a_0 , a_1 , a_2 , ... ,a_n adalah barisan bilangan dengan indeks n, maka fungsi pembangkit atau generating function dari barisan tersebut didefinisikan sebagai deret pangkat berikut :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kebanyakan relasi rekursif yang melibatkan a_n dapat dirubah ke dalam suatu persamaan (2.3) sehingga dapat diselesaikan secara aljabar, dan ekspresi yang diperoleh untuk f(x) diekspansikan ke dalam deret pangkat untuk memperoleh a_n yang merupakan koefisien dari X^n .

Untuk menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit, berikut ini diberikan beberapa persamaan yang berhubungan dengan ekspansi suatu polinomial.

$$\frac{1-X^{n+1}}{1-X}=1+X+X^2+X^3+\ldots+X^n$$

$$\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+X^3+\ldots+X^n+\ldots \qquad ,-1<X<1$$

$$(1+X)^n=1+\binom{n}{1}X+\binom{n}{2}X^2+\ldots+\binom{n}{r}X^r+\ldots+\binom{n}{n}X^n$$

$$\frac{1}{(1-X)^n}=1+\binom{1+n-1}{1}X+\binom{2+n-1}{2}X^2+\ldots+\binom{r+n-1}{r}X^r+\ldots$$

Contoh 2.2.3 :

Diberikan suatu relasi rekursif $a_n = a_{n-1} + n$, dengan $a_0 = 1$. Akan dicari fungsi pembangkit g(x) dengan koefisien a_n yang memenuhi hubungan rekursif tersebut. Dengan menggunakan hubungan rekursif untuk setiap suku dari g(x), kecuali a_0, diperoleh hubungan :

$$a_nX^n=a_{n-1}X^n+nX^n \qquad ,n\geq 1$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} g(X)-a_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nX^n \\ g(X)-1 &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}X^n+nX^n) \\ &= X\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nX^n \\ &= X\sum_{m=0}^{\infty}a_mX^m+\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{1}X^m \\ &= Xg(X)+\frac{X}{(1-X)^2} \\ g(X)(1-X) &= 1+\frac{X}{(1-X)^2} \\ g(X) &= \frac{1}{1-X}+\frac{X}{(1-X)^3} \end{aligned}$$

koefisien x^n pada $(1-x)^{-1}$ adalah 1 dan dalam $x(1-x)^{-3}$ adalah :

$$\binom{(n-1)+3-1}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

dengan menggunakan kesamaan $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, maka :

$$\binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2}$$

sehingga:

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot X^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{2} X^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \binom{n+1}{2}\right) X^n$$

dari sini diperoleh :

$$a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$$