

## BAB II

### MATERI PENUNJANG

#### 2.1. Proses Stokastik

Suatu variabel random  $Z$  adalah suatu aturan untuk menentukan harga  $Z\{\zeta\}$  pada setiap hasil  $\zeta$  suatu eksperimen. Proses stokastik  $Z_t$  adalah suatu aturan untuk menentukan fungsi  $Z(t, \zeta)$  untuk setiap  $\zeta$ . Jadi proses stokastik adalah keluarga fungsi waktu yang bergantung pada parameter  $\zeta$  atau secara ekuivalen fungsi  $t$  dan  $\zeta$ . Ketika  $t$  suatu interval, sedemikian hingga  $t \in (-\infty, \infty)$ , proses dinamakan proses waktu kontinu, dan dinamakan proses waktu diskrit bila  $t \in T$ , dengan  $T = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ .

Sehingga proses random  $\{Z_t\}$  adalah keluarga dari random variabel riil atau kompleks yang diindeks oleh  $t$ . Random variabel  $Z_t$  dimungkinkan proses kontinu, diskrit atau tipe campuran dari proses kontinu dan diskrit.

Sifat-sifat statistik dari proses stokastik riil  $Z_t$  untuk keluarga dari  $n$  waktu dalam bentuk distribusi random vektor pada tingkat ke- $n$  nya

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(Z_{t_1} < z_1, \dots, Z_{t_n} < z_n) \dots (2.1)$$

persamaan diatas dinamakan distribusi probabilitas dimensi terbatas. Andaikan  $f_{t_1}(z)$  adalah fungsi densitas probabilitas dari  $Z_{t_1}$ , maka mean dari  $Z_{t_1}$  diberikan oleh

$$E[Z_{t_1}] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_{t_1}(z) dz \dots (2.2)$$

Untuk fungsi densitas probabilitas bersama dari  $(Z_{t_1}, Z_{t_2})$  yaitu  $f_{t_1, t_2}(z_1, z_2)$  sedemikian hingga

$$E[Z_{t_1}, Z_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 f_{t_1, t_2}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \dots (2.3)$$

Dari persamaan (2.2) dan (2.3) didapatkan kovarian dari  $Cov[Z_{t_1}, Z_{t_2}]$  yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} Cov[Z_{t_1}, Z_{t_2}] &= E\{[Z_{t_1} - E[Z_{t_1}]] [Z_{t_2} - E[Z_{t_2}]]\} \\ &= E[Z_{t_1}, Z_{t_2}] - E[Z_{t_1}] E[Z_{t_2}] \dots (2.4) \end{aligned}$$

Untuk  $t_1 = t_2$  maka  $Cov[Z_{t_1}, Z_{t_2}] = Var[Z_{t_1}] = Var[Z_{t_2}]$

Fungsi  $R(s, t) = Cov[Z_s, Z_t]$  disebut fungsi autokovarian.

Korelasi atau fungsi autokorelasi,  $\rho(s, t)$  didefinisikan dari fungsi kovarian

$$\rho(s, t) = \frac{R(s, t)}{\sqrt{R(s, s)} \sqrt{R(t, t)}}$$

dengan  $\rho(s, t) = \rho(t, s)$ , dan  $|\rho(s, t)| \leq \rho(t, t) = 1$

### Definisi 2.1

Suatu proses bernilai riil  $\{Z_t\}$ ,  $t \in T$ , dengan  $T = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$  disebut proses *Gauss* atau *normal* bila untuk setiap  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ , distribusi bersama  $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n})$  adalah normal bergabungan. Statistik proses Gauss dalam bentuk mean  $m(t)$  dan autokovarian  $C[Z_s, Z_t]$ , karena

$$E[Z_t] = m(t) \quad \text{dan} \quad R(s, t) = Cov[Z_s, Z_t]$$

### Definisi 2.2

## Definisi 2.2

Proses Gauss dikatakan proses *white noise* (*gangguan putih*) bila proses  $\{Z_{t,s}\}$  tidak mempunyai korelasi untuk setiap  $t$  dan  $s$ ,  $t \neq s$

$$\text{Cov}[Z_s, Z_t] = 0, \quad s \neq t$$

### 2.1.1 Proses Stasioner

Proses stokastik  $Z_t$  disebut proses stasioner kuat bila distribusi bersama dari  $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n})$  sama dengan distribusi bersama dari  $(Z_{t_1+c}, Z_{t_2+c}, \dots, Z_{t_n+c})$  untuk setiap  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ,  $n$  dan  $c$ .

Karena  $Z_t$  dan  $Z_{t+c}$  mempunyai berdistribusi sama untuk setiap  $t$  dan  $c$  maka untuk suatu konstanta  $m$  dan  $c = -c$  berlaku

$$E[Z_t] = E[Z_{t+c}] = E[Z_0] = m \quad \dots(2.5)$$

Jika mean stasioneritas  $(Z_t, Z_s)$  dan  $(Z_{t+c}, Z_{s+c})$  berdistribusi sama untuk setiap  $t, s$ , dan  $c$ , dan untuk  $c = -s$ , maka

$$E[Z_t, Z_s] = E[Z_{t+c}, Z_{s+c}] = E[Z_{t-s}, Z_0]$$

atau

$$R(s, t) = \text{Cov}(Z_t, Z_s) = R(t-s)$$

Fungsi autokovarian dari proses stasioner bernilai riil yang merupakan fungsi dari kelambatan waktu  $c$  saja

$$R(c) = \text{Cov}(Z_{t+c}, Z_t) = \text{Cov}(Z_c, Z_0) \quad \dots(2.6)$$

Untuk  $\text{Var}(Z_t) = R(0)$ , dan  $R(c) = R(-c)$ , fungsi autokorelasi dari fungsi  $c$  yaitu

$$\rho(c) = \frac{R(c)}{R(0)}$$

dimana  $\rho(c) = \rho(-c)$  dan  $|\rho(c)| \leq \rho(0) = 1$

### 2.1.2. Proses Stasioner Nilai Kompleks

Suatu kompleks random variabel  $Z$  diasumsikan berbentuk  $Z = U + iV$ , dengan  $U$  dan  $V$  variabel random riil.

Kompleks konjugasinya yaitu  $\bar{Z} = U - iV$ ,  $|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z} = U^2 + V^2$

$E[Z] = E[U] + iE[V]$ ,  $E[|Z|^2] = E[U^2] + E[V^2]$

Untuk dua random variabel nilai kompleks  $Z_t, Z_s$ , kovariansi didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z_t, Z_s] &= E\{[Z_t - E(Z_t)][\bar{Z}_s - E(\bar{Z}_s)]\} \\ &= E[Z_t, \bar{Z}_s] - E[Z_t]E[\bar{Z}_s] \end{aligned}$$

Untuk  $E[Z_t] = E[Z_s] = 0$  maka  $\text{Cov}[Z_t, Z_s] = E[Z_t, \bar{Z}_s]$

Didefinisikan suatu proses stokastik nilai kompleks  $\{Z\}$  dari proses nilai riil  $\{U_t\}, \{V_t\}$

$$Z_t = U_t + iV_t$$

Proses  $\{Z_t\}$  adalah stasioner lemah jika untuk suatu konstanta nilai kompleks  $m$  adalah sebagai meannya

$$E[Z_t] = E[U_t] + iE[V_t] = m$$

dan fungsi autokovarian dari kelambatan waktu  $k$

$$R_k = E[(Z_{t+k} - m)[\bar{Z}_t - \bar{m}]] = E[(Z_{t+k}, \bar{Z}_t)] = |m|^2$$

dengan variansi  $R_0 = E[|Z_t - m|^2]$  adalah riil.

Untuk  $R_0 = 0$ , autokorelasi diperoleh

$$\rho_k = \frac{R_k}{R_0}$$

Dengan

$$R_{-k} = \bar{R}_k, \quad |R_k| \leq R_0 \quad \dots(2.7)$$

dan

$$\rho_{-k} = \bar{\rho}_k, \quad |\rho_k| \leq 1$$

Untuk bilangan kompleks  $a_1, a_2, \dots, a_N$  dan integer  $t_1, t_2, \dots, t_N$  dengan  $N \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var} \left[ \sum_{j=1}^N a_j Z_{t_j} \right] &= \text{Cov} \left[ \sum_{j=1}^N a_j Z_{t_j}, \sum_{l=1}^N \bar{a}_l Z_{t_l} \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N a_j \bar{a}_l \text{Cov}[Z_{t_j}, Z_{t_l}] \quad \dots (2.8) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N a_j \bar{a}_l R_{t_j - t_l} \end{aligned}$$

Dalam hal ini  $R_x$  definit nonnegatif

$R_x$  membentuk penyajian spektral yang tunggal dari fungsi riil tidak menurun (*nondecreasing*) terbatas  $F$  sedemikian hingga  $F(-\pi) = 0$ , maka:

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF(\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots(2.9)$$

dengan  $F(\lambda)$  adalah fungsi distribusi spektral.

Barisan bernilai kompleks  $R_k$  dalam penyajian (2.9) adalah definit non negatif.

Penyajian spektral persamaan (2.9) dapat disajikan dalam bentuk alternatif ukuran spektral tunggal sebagai berikut:

$F_1$  dan  $F_2$  ukuran spektral pada  $(-\pi, \pi)$  sehingga untuk semua bilangan bulat  $k$  :

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F_1(d\lambda)$$

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F_2(d\lambda)$$

misal  $g(\lambda)$  fungsi pembatas kontinu pada  $(-\pi, \pi)$ .

Secara analog fapat diperoleh :

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) F_1(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) F_2(d\lambda)$$

Jadi  $F_1(\Delta) = F_2(\Delta)$  , untuk semua ukuran subset  $\Delta \in (0\pi, \pi)$ .

Kesimpulan bahwa  $F(\Delta)$  merupakan subset dari ukuran  $\Delta$  pada interval  $(-\pi, \pi)$ , sehingga :

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F(d\lambda) \dots (2.10)$$

dengan hubungan antara distribusi spektral dan fungsi distribusi spektral adalah

$$F(\lambda) = F(-\pi, \lambda]$$

Jadi autokovarian setiap proses stasioner lemah pada waktu diskrit, yang disajikan dalam keadaan tunggal pada definisi fungsi distribusi, dimana keadaan konstan. Hal ini dinamakan dengan Fungsi Distribusi Probabilitas pada  $(-\pi, \pi)$ .

Suatu fungsi distribusi spektral dapat memiliki densitas spektral  $f(\lambda)$  sedemikian hingga :

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\omega) d\omega, \quad f(\lambda) = F'(\lambda), \quad -\pi \leq \lambda < \pi$$

Kondisi ini merupakan jumlahan dari autokovarian  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$  pada kasus ini transformasi invers diberikan:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} R_k \quad \dots (2.11)$$

Karena mempunyai densitas spektral,  $F(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ ,  
sehingga persamaan (2.10) menjadi

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda \quad \dots (2.12)$$

Dengan demikian

$$R_0 = \text{Var} [Z_t] = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \quad \dots (2.13)$$

## 2.2. Spektrum Tercampur

### 2.2.1 Dekomposisi Distribusi Spektral

Suatu proses dimungkinkan mempunyai spektrum diskrit, kontinu, atau spektrum campuran dari keduanya. Proses ini dikatakan mempunyai spektrum tercampur bila komponen diskrit dan kontinu terdapat dalam proses tersebut, sedemikian hingga fungsi distribusi spektral dapat dipisahkan atas komponen diskrit dan kontinu

$$F(\lambda) = F_c(\lambda) + F_d(\lambda) \quad (2.14)$$

dimana  $F_c$  bagian kontinue, dapat diekspresikan sebagai integral nonnegatif densitas spektral  $f(\lambda)$

dan  $F_d$  bagian diskrit, yakni jumlahan nonnegatif fungsi  $p(\lambda)$ , yang memberikan nilai positif hanya untuk frekuensi diskrit  $\lambda_j$

$$F_d(A) = \sum_{\lambda_j \in A} p(\lambda_j)$$

dengan  $F_d(A) = 0$ , jika A tidak memuat dari diskrit  $\lambda_j$ .  
Sedemikian hingga

$$F(A) = \int_A f(\lambda) d\lambda + \sum_{\lambda_j \in A} p(\lambda_j) \quad (2.15)$$

Fungsi  $p(\lambda)$ , disebut sebagai fungsi spektral, untuk frekuensi diskrit  $\lambda_j$

$$F(\{\lambda_j\}) = P_d(\{\lambda_j\}) = p(\lambda_j)$$

Jadi spektral garis berkorespondensi terhadap  $\lambda_j$  ada,  $p(\lambda_j) > 0$ , untuk lainnya  $p(\lambda) = 0$

Untuk proses bernilai riil karena  $F(\lambda)$  simetri, maka  $f(-\lambda) = f(\lambda)$  dan  $p(-\lambda) = p(\lambda)$ . Apabila dihubungkan dengan persamaan (2.9) maka

$$\begin{aligned} R_k &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F_c(d\lambda) + \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F_d(d\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda + \sum_j e^{ik\lambda} p(\lambda_j) \end{aligned} \quad (2.16)$$

dan untuk

$$R_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda + \sum_k p(\lambda_k)$$

Persamaan autokorelasi untuk  $R_k$  dan  $R_0$  dari persamaan (2.16) diperoleh autokorelasi

$$\rho_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda + \sum_j e^{ik\lambda} p(\lambda_j)}{\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda + \sum_k p(\lambda_k)} \quad (2.17)$$



Untuk proses bernilai riil dan  $p(0) = 0$ , sifat simetri didapatkan

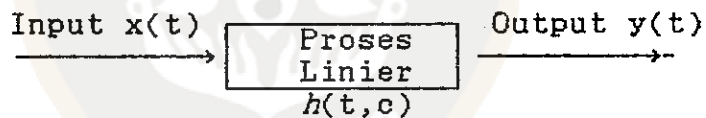
$$\rho_k = \frac{\int_0^{\pi} \cos(k\lambda) f(\lambda) d\lambda + \sum_j \cos(k\lambda_j) p(\lambda_j)}{\int_0^{\pi} f(\lambda) d\lambda + \sum_{\lambda_j > 0} p(\lambda_j)} \quad (2.18)$$

dengan  $f(\lambda) = f(-\lambda)$  dan  $p(-\lambda) = p(\lambda)$ , sedemikian hingga

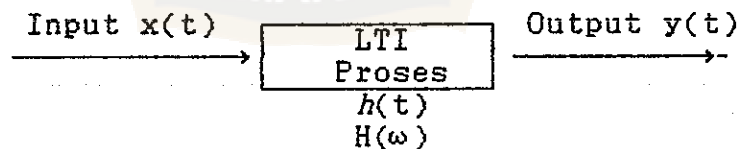
$$\cos(k\lambda) = \frac{e^{ik\lambda} + e^{-ik\lambda}}{2} = \frac{2e^{ik\lambda}}{2} = \frac{2e^{-ik\lambda}}{2}$$

sehingga  $e^{ik\lambda} = e^{-ik\lambda}$

### 2.2.2 Proses Linier



Gambar 2.1.a



Gambar 2.1.b

Gambar 2.1.a

→ Input tunggal, proses linier output tunggal

Gambar 2.1.b.

→ Suatu proses linier, proses linier invarian waktu (LTI)

Proses linier (Gambar 2.1.a) menyebabkan respon  $y(t)$

berbeda dari sinyal input  $x(t)$ , yang dapat ditulis suatu operasi proses dari  $x(t)$  ke  $y(t)$

$$y(t) = \mathfrak{R} [x(t)] \quad (2.19)$$

Disini  $\mathfrak{R}$  adalah suatu operator penggambaran terjadinya proses atas  $x(t)$

Suatu proses dikatakan linier jika responnya terhadap suatu jumlahan dari input  $x_n(t)$ ,  $n=1,2,\dots,N$  adalah sama dengan jumlahan dari respon yang diterima. Jadi, jika  $x_n(t)$  menyebabkan respon  $y_n(t)$ , maka jumlahan suatu proses linier

$$y(t) = \mathfrak{R} \left[ \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \right] = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathfrak{R} [x_n(t)] = \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n(t) \quad (2.20)$$

harus terpenuhi, dimana  $\alpha_n$  adalah suatu konstanta yang berubah dan  $N$  dapat bernilai tak hingga.

Andaikan  $\phi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x-x_0) dx$ , dan bentuk ini merupakan sifat dari fungsi impuls yang dapat ditulis

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) \delta(t-\zeta) d\zeta \quad (2.21)$$

Dengan mensubstitusikan (2.21) ke (2.19) maka diperoleh

$$y(t) = \mathfrak{R} [x(t)] = \mathfrak{R} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) \delta(t-\zeta) d\zeta \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) \mathfrak{R} [\delta(t-\zeta)] d\zeta \quad (2.22)$$

dimana  $\delta(\zeta)$  disebut dengan fungsi "Delta Dirac", yang didefinisikan oleh

$$\delta(\zeta) = \infty \quad \zeta = 0$$

$$= 0 \quad \zeta \neq 0$$

dan

$$\int_{-c}^c \delta(\zeta) d\zeta = 1$$

untuk suatu nilai  $c$ .

Didefinisikan suatu fungsi  $h(t, \zeta)$  sebagai respon impuls dari proses linier sehingga

$$\mathcal{R} [ \delta(t-\zeta) ] = h(t, \zeta) \quad (2.23)$$

Sehingga persamaan (2.22) menjadi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) h(t, \zeta) d\zeta \quad (2.24)$$

yang menunjukkan bahwa respon dari proses linier adalah respon impuls dari persamaan (2.24)

### 2.2.3 Proses Linier Invarian Waktu

Suatu proses linier dikatakan invarian waktu jika bentuk dari respon impuls  $h(t, \zeta)$  tidak bergantung atas waktu impuls yang digunakan. Jadi, jika impuls  $\delta(t)$  terjadi di  $t=0$ , menyebabkan respon  $h(t)$ , impuls  $\delta(t-\zeta)$  terjadi di  $t=\zeta$  harus menyebabkan respon  $h(t-\zeta)$  jika proses adalah invarian terhadap waktu. Hal ini menunjukkan bahwa

$$h(t, \zeta) = h(t-\zeta) \quad (2.25)$$

untuk proses linier invarian waktu, sehingga persamaan (2.24) menjadi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) h(t-\zeta) d\zeta \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) disebut sebagai integral konvolusi dari  $x(t)$  dan  $h(t)$ , yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y(t) = x(t)*h(t) \quad (2.27)$$

Dengan merubah sifat variabel, persamaan (2.26) dapat ditulis sebagai

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)x(t-\zeta)d\zeta \quad (2.28)$$

#### 2.2.4. Fungsi Alih Proses Invarian Waktu

Persamaan (2.26) atau (2.28) menunjukkan bahwa suatu proses linier invarian waktu adalah ciri dari pelengkap respon impuls. Jika  $X(\omega)$ ,  $Y(\omega)$ , dan  $H(\omega)$  adalah transformasi Fourier dari  $x(t)$ ,  $y(t)$ , dan  $h(t)$  maka

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta)h(t-\zeta)d\zeta \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\zeta)e^{-j\omega(t-\zeta)} dt \right] e^{-j\omega\zeta} d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\zeta) H(\omega) e^{-j\omega\zeta} d\zeta \\ &= X(\omega)H(\omega) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Fungsi  $H(\omega)$  disebut fungsi alih dari proses invarian waktu. Persamaan (2.29) menunjukkan bahwa transformasi Fourier dari respon untuk beberapa proses linier invarian waktu adalah sama dengan hasil dari transformasi dari

sinyal input dan transformasi dari respon impuls jaringan kerja.

### 2.2.5. Spektrum dan Fungsi Pembangkit Autokovarian

Pada persamaan (2.9) diberikan autokovarian  $R_k$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , fungsi pembangkit autokovarian didefinisikan sebagai

$$R(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k B^k \quad (2.30)$$

dengan variansi dari proses  $R_0$  yaitu koefisien  $B^0 = 1$ , dan autokovarian dari kelambatan  $k$ ,  $R_k$  adalah koefisien dari  $B^k$  dan  $B^{-k}$ . Jika diberikan barisan autokovarian  $R_k$  maka dari persamaan (2.11), spektrum atau densitas spektral diberikan oleh

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} R_k \quad (2.31)$$

Dengan membandingkan persamaan (2.30) dan (2.31) untuk proses dengan jumlah mutlak barisan autokovarian, spektrum dan fungsi pembangkit autokovarian dihubungkan sebagai

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} R(e^{-i\omega}) \quad (2.32)$$

Untuk proses linier non deterministik  $Z_t$  dapat ditulis

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j a_{t-j} = \phi(B) a_t \quad (2.33)$$

dimana  $\varphi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j B^j$ ,  $\varphi_0 = 1$ . Diasumsikan bahwa  $E(Z_t) = 0$

dan fungsi pembangkit autokovarian dari proses linier diberikan oleh

$$R(B) = \sigma_a^2 \varphi(B)\varphi(B^{-1}) \quad (2.34)$$

Untuk model stasioner AR(p)

$$\alpha_p(B)Z_t = a_t \quad (2.35)$$

dengan  $\alpha_p(B) = (1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_p B^p)$ .

Dengan memfaktorkan persamaan (2.35) diperoleh

$$Z_t = \varphi(B) a_t$$

dimana  $\varphi(B) = \frac{1}{\alpha_p(B)}$ . Dan fungsi pembangkit autokovarian dari model AR(p) menjadi

$$R(B) = \sigma_a^2 \frac{1}{\alpha_p(B)\alpha_p(B^{-1})} \quad (2.36)$$

Dari persamaan (2.32) dan persamaan (2.36) untuk  $R(e^{-i\omega})$  sama dengan  $R(B)$  maka spektrum dari model AR(p) stasioner diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} R(e^{-i\omega}) \\ &= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{1}{\alpha_p(e^{i\omega})\alpha_p(e^{-i\omega})} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \left| \frac{1}{\alpha_p(e^{i\omega})} \right|^2 \quad (2.38)$$

fungsi  $|1/(\alpha_p e^{i\omega})|^2$  disebut sebagai pertambahan kuadrat dari tapis linier disimbolkan dengan  $|H(\omega; \alpha)|^2$

### 2.2.6. Spektrum dari Proses White Noise

Suatu proses white noise

$$Z_t = a_t \quad (2.39)$$

adalah suatu barisan random variabel tak berkorelasi dengan fungsi autokovarian didefinisikan

$$R_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & , k = 0 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.40)$$

dan fungsi pembangkit autokovarian  $R(B) = \sigma_a^2$ . Kemudian dengan persamaan (2.31) atau persamaan (2.32) bentuk spektrumnya

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} R_k = \dots + 0 + \frac{\sigma_a^2}{2\pi} + 0 + \dots = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \quad (2.41)$$

### 2.2.7. Spektrum dari Tapis Linier

Misal  $Z_t$  suatu proses stasioner dengan barisan autokovarian  $R_k(t)$  dan spektrumnya

$$f_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_k(l) e^{i\omega l}$$

Dengan menganggap tapis linier  $Z_t$  diberikan oleh

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j Z_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B^j Z_t = \alpha(B) Z_t \quad (2.42)$$

dimana  $\alpha(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B^j$ , dan  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$

diasumsikan bahwa  $E(Z_t) = 0$ , dan  $E(Y_t) = 0$  maka

$$\begin{aligned}
E[Y_t, Y_{t+k}] &= E\left[ \left( \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h Z_{t-h} \right) \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j Z_{t+k-j} \right) \right] \\
&= E\left[ \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j Z_{t-h} Z_{t+k-j} \right] \\
&= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j R_Z(k-j+h) \\
&= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{h+k-l} R_Z(1) = R_Y(k) \quad (2.43)
\end{aligned}$$

dengan  $l = k-j+h$

Dan  $R_Y(k)$  adalah jumlahan mutlak, sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_Y(k)| &\leq \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\alpha_h| \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\alpha_{h+k-l}| |R_Z(1)| \\
&= \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\alpha_h| R_Z(0) \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\alpha_{h+k-l}| |R_Z(1)| \\
&\leq R_Z(0) \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\alpha_h| \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\alpha_{h+k-l}| < \infty
\end{aligned}$$

Kemudian didapatkan

$$\begin{aligned}
f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_Y(k) e^{-i\omega k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{h+k-l} R_Z(1) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_h \alpha_{h+k-l} R_Z(1) e^{i\omega h} e^{-i\omega l} e^{-i\omega(h+k-l)} \\
&= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h e^{i\omega h} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_Z(1) e^{-i\omega l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{h+k-l} e^{-i\omega(h+k-l)} \\
&= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h e^{i\omega h} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_Z(1) e^{-i\omega l} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha_t e^{-i\omega t} \\
&= | \sigma(e^{i\omega}) | f_Z(\omega) \quad (2.44)
\end{aligned}$$

dengan



$$\begin{aligned}
 |\alpha(e^{i\omega})| &= \alpha(e^{i\omega})[\alpha(e^{i\omega})]^* \\
 &= \alpha(e^{i\omega})\alpha(e^{-i\omega}) \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

persamaan (2.45) ini sebagai fungsi tapis atau fungsi alih. Fungsi tapis dapat digunakan untuk mengukur pengaruh dari penggunaan suatu tapis atas suatu deret, dengan salah satu tujuannya adalah untuk merancang suatu tapis yang baik sehingga output deret atau sinyal sesuai dengan yang diharapkan.

### 2.3 Persilangan-nol (Zero-Crossing) pada Waktu Diskrit

#### 2.3.1. Formula Cosinus

Misalkan  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  proses stasioner dengan mean nol dari suatu deret waktu. Hitungan zero-crossing pada waktu diskrit didefinisikan sebagai bilangan simbol yang berubah dalam hubungan deret waktu biner.

Didefinisikan sebuah perpotongan deret waktu biner  $X_1, X_2, \dots, X_N$  oleh transformasi nonlinier

$$X_t = \begin{cases} 1 & , \text{jika } Z_t \geq 0 \\ 0 & , \text{jika } Z_t < 0 \end{cases}$$

Tampak bahwa  $\{X_t\}$  adalah deret stasioner karena  $Z_t$  adalah jumlahan dari zero-crossing, yang dinotasikan oleh  $D$ , yaitu didefinisikan dalam waktu dari  $\{X_t\}$

$$D = \sum_{t=2}^N [X_t - X_{t-1}]^2 \quad \dots (2.46)$$

Jika  $dt$  adalah proses terjadinya  $(X_t \neq X_{t-1})$ , yang dinotasikan  $I[X_t \neq X_{t-1}]$  ( $I$  adalah simbol even  $A$ , sama dengan 1 bila  $A$  terjadi, dan 0 untuk lainnya), maka  $D$  dapat diekspresikan sebagai jumlahan dari

$$D = \sum_{t=2}^N [X_t \neq X_{t-1}] \quad \dots (2.47)$$

$$= \sum_{t=2}^N dt \quad \dots (2.48)$$

Sehingga  $D$  bergantung atas deret waktu berukuran  $N$ , dan ini dimungkinkan bernilai

$$0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Nilai tertinggi  $N-1$  adalah menunjukkan bahwa kemungkinan bilangan maksimum dari sifat tanda dari 0 ke 1 dan dari 1 ke 0 pada  $X_1, X_2, \dots, X_N$  adalah  $N-1$ .

Laju zero-crossing yang teramati, dinotasikan oleh  $\hat{\gamma}$  yang didefinisikan oleh perbandingan

$$\hat{\gamma} = \frac{D}{N-1} \quad \dots (2.49)$$

Penggunaan dua parameter tersebut pada deret waktu biner  $\{X_t\}$  dengan probabilitas  $p$  dari 1 pada deret waktu  $t$ , dan probabilitas syarat  $\lambda_1$  dari 1 pada waktu  $t$ , diberikan oleh 1 pada waktu  $t-1$ ,

$$p = P(X_t = 1)$$

dan

$$\lambda_1 = P(X_t = 1 | X_{t-1} = 1) \quad \dots (2.50)$$

Dengan persamaan ini

$$E[D] = 2p(N-1)(1-\lambda_1)$$

dan yang bergantung atas  $N$  sebagai syaratnya, sehingga

diharapkan suku zero-crossing, yang dinotasikan oleh  $\gamma$

$$\gamma = E[\hat{\gamma}] = \frac{E[D]}{N-1} = 2p(1-\lambda_1) \quad \dots (2.51)$$

yaitu independen terhadap  $N$ .

Definisi dari  $D$  digunakan untuk menuliskan hubungan antara  $\rho_1$  dan  $E[D]$  atau hubungan persamaan  $\rho_1$  dan  $\gamma$ .

Apabila  $\{Z_t\}$  adalah suatu random variabel sinusoid stasioner, atau suatu proses stasioner, maka hubungan antara  $\rho_1$  dan  $E[D]$  dapat dituliskan sebagai

$$\rho_1 = \cos \left[ \frac{\pi E[D]}{N-1} \right] \quad \dots (2.52)$$

Persamaan (2.52) dinamakan dengan "*formula cosinus*".

### 2.3.2. Kasus Pada Sinusoid Murni

Pada kasus sinusoid murni, hubungan antara  $\rho_1$  dan  $E[D]$  diperoleh dari pengamatan pertama dengan frekuensi dari sinusoid dapat diestimasi dari zero-crossing.

#### Teorema 2.1

Andaikan  $\{Z_t\}$ ,  $t=0,1,2,\dots$ , adalah suatu random sinusoid stasioner

$$Z_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

dimana  $A$  dan  $B$  random variabel yang tidak berkorelasi dan dengan mean nol, serta dengan variansi  $\sigma^2$ . Ambil  $\rho_k$  barisan autokorelasi dari  $\{Z_t\}$ , maka formula cosinus terpenuhi.

*Bukti*

Diambil untuk suatu random sinusoid stasioner

$$\rho_1 = \cos(\omega)$$

Andaikan yang diamati berkisar pada  $C$  siklus lengkap, dan  $C+1$  bukan siklus lengkap, maka dengan mengabaikan pengaruh akhir, didapatkan

$$\frac{N}{C+1} \leq \text{PERIODE} = \frac{2\pi}{\omega} \leq \frac{N}{C}$$

$$\frac{N}{2\pi(C+1)} \leq \frac{1}{\omega} \leq \frac{N}{2\pi C}$$

dapat diubah menjadi

$$\frac{2\pi C}{N} \leq \omega \leq \frac{2\pi(C+1)}{N} \quad \dots (2.53)$$

dengan mensubstitusikan  $D = 2C$ , maka persamaan (2.53)

menjadi

$$\frac{\pi D}{N} \leq \omega \leq \frac{\pi D}{N} + \frac{2\pi}{N} \leq \frac{\pi D}{N-1} + \frac{2\pi}{N}$$

atau

$$-\frac{\pi D}{N} \leq \omega - \frac{\pi D}{N-1} \leq \frac{2\pi}{N}$$

Untuk  $N \rightarrow \infty$ , maka

$$\frac{\pi D}{N-1} \rightarrow \omega$$

Karena konvergen terbatas, dan  $N \rightarrow \infty$ , maka

$$E\left[\frac{\pi D}{N-1}\right] = \frac{\pi E[D]}{N-1} \rightarrow \omega$$

dan suku zero-crossing independen terhadap  $N$ , dan mengikuti persamaan ini

$$\frac{\pi E[D]}{N-1} = \omega_1$$

sehingga diperoleh

$$\rho_1 = \cos(\omega) = \cos\left[\frac{\pi E[D]}{N-1}\right]$$

□

### 2.3.3. Persilangan-nol pada Spektrum Tercampur.

Persamaan cosinus pada (2.52) dapat dijelaskan dengan menggunakan hubungan antara bilangan zero-crossing yang diharapkan, dengan spektrum. Dari definisi  $\rho_1$  dan hubungan persamaan (2.9), didapatkan hubungan

$$\cos \left[ \frac{\pi E[D]}{N-1} \right] = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) dF(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} dF(\omega)} \quad (2.54)$$

disebut sebagai "penjabaran spektral zero-crossing".

Untuk  $F$  kontinu dan dari persamaan (2.54) serta karena simetri, maka untuk frekuensi positif, diberikan

$$\cos \left[ \frac{\pi E[D]}{N-1} \right] = \frac{\int_0^{\pi} \cos(\omega) dF(\omega)}{\int_0^{\pi} dF(\omega)} \quad (2.55)$$

Dengan menganggap proses Gaussian zero-mean spektrum tercampur

$$Z_t = \sum_{j=1}^p \{ A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) \} + \zeta_t \quad (2.56)$$

dimana  $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  dengan  $A$  dan  $B$  random variabel normal tidak berkorelasi,  $E(A_j) = E(B_j) = 0$ , dan  $\text{Var}(A_j) = \text{Var}(B_j) = \sigma_j^2$ , dan  $\{\zeta_t\}$  adalah gangguan berwarna stasioner Gaussian dengan mean 0 dan variansi  $\sigma_\zeta^2$  independen terhadap  $A$  dan  $B$ . Gangguan diasumsikan memiliki fungsi distribusi spektral kontinu absolut  $F_\zeta(\omega)$  dengan

densitas spektral  $f_{\zeta}(\omega)$ ,  $\omega \in [-\pi, \pi]$ . Dengan frekuensi dianggap berorder tertentu dalam  $(0, \pi]$

$$0 < \omega_1 < \omega_2 \dots \dots \dots < \omega_p < \pi$$

Didefinisikan suatu proses  $\{Y_t\}$ , dengan fungsi distribusi spektral  $F_y$  yaitu

$$Y_t = \sum_{j=1}^P \{ A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) \}$$

sedemikian hingga

$$Z_t = Y_t + \zeta_t$$

Maka dari penjabaran  $\rho_1$  pada persamaan (2.54) dan bahwa  $F(\omega) = F_y(\omega) + F_{\zeta}(\omega)$ , maka didapatkan

$$\rho_1 = \cos \left[ \frac{\pi E[D]}{N-1} \right] = \frac{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 \cos(\omega_j) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) dF_{\zeta}(\omega)}{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 + \int_{-\pi}^{\pi} dF_{\zeta}(\omega)} \quad (2.57)$$

dan suku zero-crossing diharapkan diberikan oleh

$$\frac{E[D]}{N-1} = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 \cos(\omega_j) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) dF_{\zeta}(\omega)}{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 + \int_{-\pi}^{\pi} dF_{\zeta}(\omega)} \right] \quad (2.58)$$

Dari bentuk (2.58), pada waktu  $\sigma_1^2 \rightarrow \infty$ , dan lainnya tetap maka  $\omega_1$  menjadi dominan, dan diharapkan

$$\frac{\pi E[D]}{N-1} \rightarrow \omega_1$$

Untuk  $\{\zeta_t\}$  gangguan putih Gaussian, (2.57) diturunkan menjadi

$$\rho_1 = \cos \left[ \frac{\pi E[D]}{N-1} \right] = \frac{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 \cos(\omega_j)}{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 + \sigma_\zeta^2} \quad (2.59)$$

Kalau tanpa adanya gangguan, maka (2.32) menjadi

$$\rho_1 = \cos \left[ \frac{\pi E[D]}{N-1} \right] = \frac{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 \cos(\omega_j)}{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2}$$

hal ini mengakibatkan

$$\omega_1 \leq \frac{\pi E[D]}{N-1} \leq \omega_P$$

yaitu suku zero-crossing yang ternormalisasi yang diharapkan berada diantara frekuensi terendah dan tertinggi

Pada spektrum tercampur persamaan (2.56), andaikan tapis linier invarian waktu  $\mathfrak{L}$  dengan fungsi alih  $H(\omega)$  digunakan pada  $Z_t$ . Dinotasikan dengan  $D_H$ , bilangan zero-crossing pada tapis deret waktu adalah  $\mathfrak{L}(Z)_1, \mathfrak{L}(Z)_2, \dots, \mathfrak{L}(Z)_N$ . Dari persamaan (2.57)

$$\cos \left[ \frac{\pi E[D_H]}{N-1} \right] = \frac{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 |H(\omega_j)|^2 \cos(\omega_j) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) |H(\omega)|^2 dF_\zeta(\omega)}{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 |H(\omega)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 dF_\zeta(\omega)} \quad (2.60)$$

Diharapkan suku zero-crossing proses tertapis  $\{\mathfrak{L}(Z)_t\}$  diberikan oleh

$$\frac{E[D_H]}{N-1} \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 |H(\omega_j)|^2 \cos(\omega_j) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) |H(\omega)|^2 dF_{\zeta}(\omega)}{\sum_{j=1}^P \sigma_j^2 |H(\omega)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 dF_{\zeta}(\omega)} \right] \quad (2.61)$$

#### 2.4. Persilangan Order Tinggi (HOC)

Misalkan  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  adalah data deret waktu yang bersifat stasioner dengan nilai tengah nol, maka banyaknya persilangan sumbu (*axis crossing*) dari data deret waktu tersebut didefinisikan sebagai berikut:

Ditentukan proses biner  $\{X_t\}$  dari  $Z_t$  untuk  $t=1, 2, \dots, n$  dengan ketentuan:

$$X_t = \begin{cases} 1 & , Z_t \geq 0 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.62)$$

Selanjutnya ditetapkan bahwa nilai  $d_t$  sama dengan satu jika terdapat perubahan nilai dalam  $\{X_t\}$  pada waktu  $t$ , dalam arti  $\{X_t \neq X_{t-1}\}$  dan  $d_t$  bernilai nol untuk lainnya. Perubahan nilai pada waktu  $t$  dalam sumbu  $\{X_t\}$  ini berhubungan dengan persilangan sumbu dalam  $Z_t$  pada waktu  $t$ . Banyaknya persilangan sumbu dalam  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  yang dinotasikan dengan  $D_{1,N}$ , didefinisikan sebagai banyaknya perubahan nilai dalam  $X_1, X_2, \dots, X_N$  atau setara dengan

$$D_{1,N} = d_2 + d_3 + \dots + d_N$$

dengan  $N < n$ .



Untuk mendefinisikan persilangan (sumbu) orde yang lebih tinggi (*higher order (axis) crossing*), disingkat HOC, digunakan operator  $\nabla$ .

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} \quad (2.63)$$

dan  $\nabla^k Z_t = \nabla(\nabla^{k-1} Z_t)$

untuk  $k = 1, 2, 3, \dots$

Sehingga proses biner  $X_t^{(k)}$  menjadi

$$X_t^{(k)} = \begin{cases} 1 & , \nabla^{k-1} Z_t \geq 0 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.64)$$

untuk  $k = 1, 2, \dots$  dan

$$d_t^{(k)} = \begin{cases} 1 & , X_t^{(k)} \neq X_{t-1}^{(k)} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.65)$$

Dengan demikian nilai amatan HOC untuk orde yang ke-k didefinisikan sebagai:

$$D_{k,N} = d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \dots, d_N^{(k)}$$

Jadi nilai  $D_{1,N}$  yang merupakan perluasan dari  $D_{1,N}$  adalah banyaknya persilangan sumbu untuk orde beda ke-(k-1) dari deret  $\nabla^{k-1} Z_1, \dots, \nabla^{k-1} Z_N$ .

Contoh:

Diberikan record

1 6 1 7 8 9 2 3 0 7

dengan rata-rata : 4,4

dari data record dikurangi nilai rata-rata didapatkan:

$$\begin{array}{r}
 -3,4 \quad 1,6 \quad -3,4 \quad 2,6 \quad 3,6 \quad 4,6 \quad -2,4 \quad -1,4 \quad -4,4 \quad 2,6 \\
 \text{Untuk menghitung } D_1, D_2, D_3, \text{ diambil } Z_1 = -3,4 \text{ dan } Z_2 = 2,6 \\
 \text{dengan } -3,4 \text{ dan } 1,6 \text{ masing-masing untuk } Z_{-1} \text{ dan } Z_0 \\
 Z \quad \quad \quad : \quad -3,4 \quad 2,6 \quad 3,6 \quad 4,6 \quad -2,4 \quad -1,4 \quad -4,4 \quad 2,6 \\
 \nabla Z \quad \quad \quad : \quad -5,0 \quad 6,0 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad -7,0 \quad 1,0 \quad -3,0 \quad 7,0 \\
 \nabla^2 Z \quad \quad \quad : \quad -10,0 \quad 11,0 \quad -5,0 \quad 0,0 \quad -8,0 \quad 8,0 \quad -4,0 \quad 10,0
 \end{array}$$

dan

$$\begin{array}{r}
 X(1) \quad \quad \quad : \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
 X(2) \quad \quad \quad : \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 X(3) \quad \quad \quad : \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

maka

$$\begin{array}{r}
 D_1 \quad \quad \quad = \quad 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 3 \\
 D_2 \quad \quad \quad = \quad 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\
 D_3 \quad \quad \quad = \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7
 \end{array}$$

dengan panjang data  $N=8$ .

#### 2.4.2. Persilangan Order Tinggi dari Tapis AR(1)

Kelompok HOC diperoleh dari kelompok tapis

$$\mathcal{L}_\alpha = 1 + \alpha B + \alpha^2 B + \alpha^3 B + \dots \quad (2.66)$$

persamaan (2.66) disebut sebagai tapis- $\alpha$ , untuk untuk kelompok yang sesuai dari Persilangan Order Tinggi  $\{D_\alpha\}$ ,  $\alpha \in (-1,1)$ , sebagai HOC dari tapis- $\alpha$ . Persamaan (2.66) dapat dikatakan sebagai penghalusan eksponensial. Dengan mengamati persamaan ini

$$\mathcal{L}_\alpha(Z)_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \dots \quad (2.67)$$

Persamaan (2.66) dapat ditulis dalam bentuk sederhana

$$Z_t(\alpha) = \mathfrak{R}_\alpha(Z)_t, \quad \alpha \in (-1,1) \quad (2.68)$$

Maka persamaan (2.67) menjadi

$$Z_t(\alpha) = \alpha Z_{t-1}(\alpha) + Z_t, \quad \alpha \in (-1,1) \quad (2.69)$$

Pada  $Z_t$  dalam proses stasioner Gaussian mean-nol, maka  $\gamma(\alpha)$  adalah monoton turun, dan dapat diperoleh penggambaran spektral

$$\cos [\pi\gamma(\alpha)] = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) |H(\omega; \alpha)|^2 dF(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega; \alpha)|^2 dF(\omega)} \quad (2.70)$$

dengan

$$|H(\omega; \alpha)|^2 = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2}, \quad \alpha \in (-1,1), \quad \omega \in [0, \pi] \quad (2.71)$$

### Lemma 2.1

Dengan menganggap kelompok tapis  $\{\mathfrak{R}_\alpha(\cdot), \alpha \in A\}$ , dan diasumsikan bahwa untuk setiap  $\alpha \in A$ ,  $\mathfrak{R}_\alpha(\cdot)$  mempunyai suatu definisi invers  $\mathfrak{R}_\alpha^{-1}(\cdot)$ .

Andaikan bahwa untuk  $\alpha \leq \beta$ ,  $\alpha, \beta \in A$

$$G(\omega; \alpha, \beta) = \frac{|H(\omega; \beta)|^2}{|H(\omega; \alpha)|^2}$$

adalah monoton turun pada  $\omega \in [0, \pi]$ , maka

$$\rho_1(\alpha) \leq \rho_1(\beta)$$

Dan jika  $\{Z_t\}$  Gaussian, maka

$$E[D_\alpha] \geq E[D_\beta] \quad (2.72)$$

Persamaan (2.72) terbalik apabila  $G(\omega; \alpha, \beta)$  monoton naik

pada  $\omega \in [0, \pi]$

*Bukti*

Definisi  $Z_t(\alpha) \equiv \mathfrak{R}_\alpha(Z)_t$ . Operasi  $\{Z_t(\alpha)\}$  dengan  $\mathfrak{R}_\beta \mathfrak{R}_\alpha^{-1}(\cdot)$ .  
Pertambahan kuadrat dari barisan tapis ini adalah  $G(\omega; \alpha, \beta)$ , yang mana diasumsikan monoton turun. Maka

$$\rho_1(\alpha) \leq \rho_1(G)$$

dengan  $\rho_1(G)$  berkorelasi tingkat pertama pada proses tertapis

$$\mathfrak{R}_\beta \mathfrak{R}_\alpha^{-1} \mathfrak{R}_\alpha(Z)_t = \mathfrak{R}_\beta(Z)_t = Z_t(\beta)$$

Oleh karena  $\rho_1(G) = \rho_1(\beta)$ , dan

$$\rho_1(\alpha) \leq \rho_1(G) = \rho_1(\beta)$$

Dalam kasus Gaussian ini memerlukan

$$\rho_1(\alpha) = \cos \left[ \frac{\pi E[D_\alpha]}{N-1} \right] \leq \rho_1(\beta) = \cos \left[ \frac{\pi E[D_\beta]}{N-1} \right]$$

dan saat  $\cos(x)$  monoton turun di  $[0, \pi]$ , maka didapatkan

$$\left[ \frac{\pi E[D_\alpha]}{N-1} \right] \geq \left[ \frac{\pi E[D_\beta]}{N-1} \right]$$

Jadi  $E[D_\alpha] \geq E[D_\beta]$

□

### *Teorema 2.2*

Misal  $\{Z_t\}$ ,  $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  suatu proses stasioner Gaussian mean nol, dan dengan menganggap HOC dari tapis- $\alpha$ , maka

a.  $\gamma(\alpha)$  adalah monoton turun pada  $\alpha \in (-1, 1)$

b. Misal  $-1 < \alpha < \beta < 1$ . Maka,  $\gamma(\alpha) \neq \gamma(\beta)$ , jika dan hanya

jika  $\{Z_t\}$  adalah suatu sinusoid murni dengan probabilitas satu.

*Bukti:*

Dengan menggunakan lemma (2.1) untuk membandingkan pada kondisi pertambahan kuadrat tapis- $\alpha$ ,

$$|H(\omega; \alpha)|^2 = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2}$$

menunjukkan bahwa

$$G(\omega; \alpha, \beta) = \frac{|H(\omega; \beta)|^2}{|H(\omega; \alpha)|^2} = \frac{1 - 2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2}{1 - 2\beta \cos(\omega) + \beta^2}$$

adalah monoton turun, dan dengan lemma (2.1), untuk  $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \pi$  perhitungan dari penurunan

$$G(\omega_2; \alpha, \beta) - G(\omega_1; \alpha, \beta)$$

adalah sama dengan

$$2(\cos(\omega_1) - \cos(\omega_2))(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta) < 0$$

Karena  $G(\omega; \alpha, \beta)$  adalah turun, dan juga tapis- $\alpha$  mempunyai definisi kebalikan yang sesuai, misal  $\mathfrak{R}^-$  sehingga (a) terbukti.

Untuk membuktikan (b) misal bahwa pada saat tapis  $\mathfrak{R}_\alpha$  mempunyai definisi kebalikan yang sesuai, yang dinotasikan dengan  $\mathfrak{R}^-$ ,  $\{Z_t(\beta)\}$  diperoleh dari  $\{Z_t(\alpha)\}$  yang didefinisikan dengan tapis linier  $\mathfrak{R}_\beta \mathfrak{R}_\alpha^{-1}(\cdot)$  yang mana memiliki pertambahan turun, dengan pengandaian autokorelasi tingkat pertama lengkap. Karena  $\{Z_t(\alpha)\}$  adalah suatu sinusoid murni dengan probabilitas satu.

Dengan kebalikan penapisan, bahwa  $\{Z_t\}$  juga suatu sinusoid murni dengan probabilitas satu. Sebaliknya, jika proses suatu sinusoid murni, dapat dipastikan mempunyai kesamaan bahwa  $\gamma(\alpha) \Rightarrow \gamma(\beta)$ .

