BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 REGRESI LINIER BERGANDA

2.1.1 MODEL REGRESI LINIER BERGANDA

Suatu model regresi yang mencakup lebih dari satu variabel bebas disebut model regresi berganda.

Definisi 2.1.1 :

Secara umum model regresi linier berganda, dengan variabel tidak bebas Y dapat dihubungkan pada k variabel bebas (x_1, x_2, x_3, ... , x_k), yakni :

$$y = \beta_o + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad \ldots (2.1)$$

dimana $\varepsilon \propto$ NID $(0.\sigma_\varepsilon^2)$, dengan β_i (i=1,2,...,k) disebut koefisien regresi.

2.1.2 PENYELESAIAN KOEFISIEN REGRESI LINIER BERGANDA

Model umum regresi linier berganda adalah :

$$y = \beta_o + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

Model regresi untuk setiap vektor pengamatan (misal pengamatan ke-i) adalah :

$$y_i = \beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$$

Harga taksiran untuk y_i adalah

$$\begin{aligned} E(y_i) &= E(\beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i) \\ &= E(\beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}) + E(\varepsilon_i) \\ &= E(\beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}) + 0 \end{aligned}$$

karena $E(\varepsilon_i)$ adalah nol , sehingga :

$$E(y_i) = E(\beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki})$$

$$= \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$

jadi $E(y) = \hat{y} = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}$

Untuk menyelesaikan koefisien pada regresi linier berganda digunakan metode kuadrat terkecil.

Fungsi kuadrat terkecil adalah :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_o - \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j x_{ji})^2 \qquad \ldots (2.2)$$

Fungsi L tersebut diminimumkan terhadap $\hat{\beta}_o$ dan $\hat{\beta}_j$.

penaksir kuadrat terekecil $\beta_o, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ harus memenuhi :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta_o}\right|_{\hat{\beta}_o, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_o - \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j x_{ji}) = 0$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta_j}\right|_{\hat{\beta}_o, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_o - \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j x_{ji}) x_{ji} = 0$$

$$\ldots (2.3)$$

dari persamaan (2.3) diperoleh persamaan-persamaan normal kuadrat terkecil :

$$n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\beta_{0}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + \hat{\beta}_{1}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + \hat{\beta}_{2}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_{k}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\hat{\beta}_{0}\sum_{i=1}^{n} x_{ki} + \hat{\beta}_{1}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} + \hat{\beta}_{2}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i \quad \ldots (2.4)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.4), yang terdiri dari p=k+1 persamaan normal maka diperoleh nilai taksiran untuk $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$.

2.1.3 KOEFISIEN KORELASI PADA REGRESI BERGANDA

Dalam regresi berganda, kaitan antara dua variabel dapat dinyatakan dengan perhitungan korelasi antara dua variabel.

Definisi 2.1.2 :Kovarian antara dua variabel X dan Y untuk n pasangan observasi (X_i, Y_i), i=1,2,3,...,n adalah :

$$\text{Cov } XY = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad \ldots (2.5)$$

Koefisien korelasi dapat dengan mudah dinyatakan dari definisi kovarian yang dibagi dengan standar deviasi dari masing-masing variabelnya.

Definisi 2.1.3 : Korelasi antara dua variabel X dan Y untuk n pasangan observasi (X_i, Y_i), i=1,2,3,...,n adalah :

$$r_{XY} = \frac{\text{Cov } XY}{\sqrt{\text{Cov } XX \;\; \text{Cov } YY}} \qquad \ldots (2.6)$$

dimana :

$$\text{Cov } XX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$\text{Cov } YY = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y \;\; - \bar{Y})^2$$

Dalam suatu regresi linier berganda , manfaat atau kegunaan dalam menghitung koefisien korelasi antara variabel tidak bebas Y dengan variabel bebas X adalah untuk menunjukan tingkat keterkaitan antara variabel tidak bebas Y dengan variabel bebas X.

2.2 DERET BERKALA (TIME SERIES) UNIVARIATE

Dalam pembahasan deret berkala univariate ini akan dikhususkan pada deret berkala yang stasioner.

Definisi 2.2.1 : Bila T himpunan waktu yang diamati, t didalam T dan Y_t adalah hasil pengamatan pada saat t, maka $\{Y_t, \; t \in T\}$ disebut proses stokastik.

Untuk proses stokastik yang stasioner akan diberikan pada definisi 2.2.2, yakni :

Definisi 2.2.2 : Misal Y_{t_1} , Y_{t_2} , ... , Y_{t_n} adalah pengamatan pada saat t_1, t_2, ... , t_n dari proses stokastik $\{Y_t, t \in T\}$ dan distribusi peluang gabungan yang berkaitan adalah :

$f(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$

jika dipenuhi :

$f(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}) = f(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \ldots, Y_{t_n+k})$

untuk setiap pergeseran waktu sebesar k, maka proses stokastik $\{Y_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik stasioner.

Akibat : $f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ bebas dari waktu sehingga proses stokastik stasioner mempunyai mean dan varian yang konstan, yaitu :

Mean $= \mu = E[Y_t] = E[Y_{t+k}]$

Varian $= \tau_Y^2 = E[Y_t - \mu]^2 = E[Y_{t+k} - \mu]^2$

Untuk sampel data $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ maka taksiran mean dan varian adalah :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \quad \text{dan} \quad \tau^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y})^2$$

Sementara itu fungsi autokovarians dan autokorelasi pada proses stokastik akan disajikan pada definisi berikut :

Definisi 2.2.3 : Fungsi autokovarian proses stokastik $\{Y_t, t \in T\}$ adalah :

$$\gamma_{YY}(t_1, t_2) = \text{Cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2})$$
$$= E(Y_{t_1} Y_{t_2})$$

Untuk proses stokastik stasioner, fungsi auto kovariansi hanya bergantung pada selang waktu (lag) antara t_1 dan t_2.

Misal untuk proses stasioner, selang waktu dinyatakan dalam k, maka fungsi autokovariansi menjadi :

$$\gamma_{YY}(k) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k})$$
$$= E(Y_t \; Y_{t+k})$$

$\gamma_{YY}(k)$ ditulis γ_k .

Definisi 2.2.4 : Fungsi autokorelasi proses stokastik $\{Y_t, t \in T\}$ untuk selang waktu k (lag k) adalah :

$$\rho_{YY} = \frac{\gamma_k}{\tau_Y^2}$$

dimana τ_Y^2 adalah autokovarian dari Y dengan selang waktu, k = 0 .

mengingat : $\gamma_0 = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k})$

$$= E(Y_t - \mu)(Y_{t+0} - \mu)$$
$$= E(Y_t - \mu)^2$$
$$= \tau_Y^2$$

maka:

$$\rho_{YY}(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}$$

adapun taksiran autokorelasi lag k adalah :

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}$$

Definisi 2.2.5 : White noise adalah barisan variabel acak a_t , a_{t-1} , ... yang masing-masing tidak berkorelasi , dimana $a_t \infty (0, \sigma_a^2)$.

Autokovarians lag k white noise adalah :

$Cov\ (a_t, a_{t+k}) = E\ [(a_t - E(a_t)(a_{t+k}) - E(a_{t+k})]$

$Cov\ (a_t, a_{t+k}) = E[(a_t a_{t+k} - a_t E(a_{t+k}) - E(a_t) a_{t+k} + E(a_t)E(a_{t+k})]$

karena $E(a_t) = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned} Cov\ (a_t, a_{t+k}) &= E\ [a_t\ a_{t+k} - a_t E(a_{t+k})] \\ &= E\ (a_t\ a_{t+k}) - E(a_t E(a_{t+k})) \\ &= E\ (a_t\ a_{t+k}) \end{aligned}$$

Untuk $k = 0 \longrightarrow Cov\ (a_t, a_{t+k}) = E\ (a_t\ a_{t+k})$

$$= E\ (a_t^2)$$

$$= \sigma_a^2$$

Untuk $k \neq 0 \longrightarrow Cov\ (a_t, a_{t+k}) = E\ (a_t\ a_{t+k})$

$$= 0$$

karena nilai-nilai white bersifat acak / random dan suatu nilai white noise tidak berkorelasi dengan nilai white noise sesudah atau sebelumnya.

Beberapa proses dari deret berkala univariate yang stasioner diantaranya adalah proses Autoregressive dengan orde p atau AR(p).

Definisi 2.2.6 Bila Y dinyatakan dalam bentuk :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \mu' + a_t$$

dengan $\phi_p \neq 0$, maka Y_t disebut proses Autoregressive dengan orde p atau AR(p).

μ' pada persamaan diatas adalah tidak sama dengan "nilai tengah" dari deret Y.

Pengembangannya adalah sebagai berikut :

$$(Y_t - \mu) = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + (\mu - \phi_1\mu - \phi_2\mu - \ldots - \phi_p\mu) + a_t$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \mu' + a_t$$

Contoh 2.2.1 :

Untuk p=1 dan p = 2 , maka model AR(p) adalah:

* untuk AR(1) : $Y_t = \mu' + \phi_1 Y_{t-1} + a_t$
* untuk AR(2) : $Y_t = \mu' + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + a_t$.

Proses lain dari deret berkala univariate adalah Proses Moving Averages Orde q atau MA(q).

Definisi 2.2.7 :Bila Y_t dinyatakan dalam bentuk:

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

dengan $\theta_q \neq 0$ disebut proses averages dengan orde q atau MA(q).

Contoh 2.2.2 :

Untuk q = 1 dan q = 2 , yaitu:

* untuk MA(1): $Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$

* untuk MA(2): $Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$.

Sedangkan proses campuran dari AR(p) dan MA(q) biasa disebut Proses Autoregressive-Moving Averages atau ARMA(p,q).

Definisi 2.2.8 Bila Y_t dinyatakan dalam bentuk :

$$Y_t = \mu' + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

dinamakan Proses Autoregressive/Moving Averages Orde (p,q) atau ARMA (p,q).

Contoh 2.2.3 :

Model ARMA untuk p = 1 dan q = 1 adalah :

* $Y_t = \mu' + \phi_1 Y_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1}$

2.3 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL BERKALA UNIVARIATE.

2.3.1 PENAKSIRAN PARAMETER AR (P)

Dari model Umum proses AR(p) :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

Kedua sisi dikalikan dengan Y_{t-k}, dimana k =1,2,...,p

$$Y_t Y_{t-k} = \phi_1 Y_{t-k} Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-k} Y_{t-2} + \dots + Y_{t-k} a_t$$

nilai harapan dari persamaan diatas adalah :

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1 E(Y_{t-k} Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-k} Y_{t-2}) + \dots + E(Y_{t-k} a_t)$$

dari definisi 2.2.3 dan karena $E(Y_{t-k}a_t) = 0$,maka persamaan menjadi :

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p}$$

Kedua sisi dibagi dengan Varian dari Y_t ,yaitu γ_o hasilnya adalah :

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \ldots + \phi_p\rho_{k-p} \quad , k=1,2,\ldots,p \qquad \ldots (2.7)$$

Karena nilai teoritis untuk ρ_1, ρ_2, ρ_3,... ,ρ_p tidak diketahui ,maka diganti dengan nilai taksirannya yaitu r_1, r_2, r_3,..., r_p .

Kemudian persamaan diatas dapat dipecahkan untuk mengetahui nilai ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_p .

Contoh 2.2.4

Misal P = 2 ,maka persamaan (2.7) diperoleh :

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

maka pemecahan persamaan diatas menjadi :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1 - r_1^2}$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

2.3.2 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL MA (q)

Model MA(q) ditulis:

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

kedua sisi dikalikan Y_{t-k} kemudian di cari nilai harapannya adalah :

$$E(Y_{t-k}Y_t) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}) \times$$
$$a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \dots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

$$\begin{aligned}\gamma_k = E(&a_t a_{t-k} - \theta_1 a_t a_{t-k-1} - \theta_2 a_t a_{t-k-2} - \dots - \theta_q a_t a_{t-k-q}\\ &-\theta_1 a_{t-1} a_{t-k} + \theta_1^2 a_{t-1} a_{t-k-1} + \dots + \theta_1\theta_q a_{t-1} a_{t-k-q}\\ &-\theta_2 a_{t-2} a_{t-k} + \theta_1\theta_2 a_{t-2} a_{t-k-1} + \dots + \theta_2\theta_q\ a_{t-2} a_{t-k-q}\\ &\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\ &-\theta_q a_{t-q} a_{t-k} + \theta_q\theta_1 a_{t-1} a_{t-k-1} + \dots + \theta_q^2\ a_{t-q} a_{t-k-q})\end{aligned} \qquad \dots (2.8)$$

bila k sama dengan nol, maka :

$$\gamma_o = E(a_t a_{t-o}) + \theta_1^2 E(a_{t-1} a_{t-o-1}) + \dots + \theta_q^2 \quad a_{t-q} a_{t-o-q}$$

Karena $E(a_t a_{t+i}) = 0$, untuk $i \neq 0$

$E(a_t a_{t+i}) = \sigma_a^2$, untuk $i = 0$

Jadi persamaannya menjadi :

$$\gamma_o = \sigma_a^2 + \theta_1^2\ \sigma_a^2 + \dots + \theta_q^2\ \sigma_a^2$$

$$\gamma_o = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^q) \qquad \dots (2.9)$$

Persamaan (2.9) adalah varians dari proses MA(q).

Bila k=1, persamaan (2.8) menjadi :

$$\gamma_1 = -\theta_1 E(a_{t-1} a_{t-1}) + \theta_1\theta_2 E(a_{t-2} a_{t-2}) + \dots + \theta_{q-1}\theta_q E(a_{t-q-1} a_{t-q-1})$$

$$\gamma_1 = -\theta_1\ \sigma_a^2 + \theta_1\theta_2\ \sigma_a^2 + \dots + \theta_{q-1}\theta_q\ \sigma_a^2$$

nilai semua suku lainnya adalah nol karena $E(a_t a_{t+i})=0$ untuk $i \neq 0$, Secara umum untuk k=k , persamaannya menjadi:

$$\gamma_k = -\theta_k\sigma_a^2 + \theta_1\theta_{k+1}\sigma_a^2 + \dots + \theta_{q-k}\theta_q\sigma_a^2$$

$$\gamma_k = \sigma_a^2 (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q) \qquad \dots (2.10)$$

Bila persamaan (2.10) dibagi persamaan (2.9), maka :

$$\rho_{YY}(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma_a^2 (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q)}{\sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^q)} \qquad \dots (2.11)$$

Contoh 2.2.5:

misal q = 1 , maka persamaan (2.11) menjadi :

$$\rho_k = \frac{-\theta_k}{1 + \theta_1^2} \Longleftrightarrow \rho_k (1 + \theta_1^2) = -\theta_k$$

$$\Longleftrightarrow \rho_k + \rho_k\theta_1^2 + \theta_k = 0$$

$$\Longleftrightarrow \rho_k\theta_1^2 + \theta_k + \rho_k = 0$$

Karena seluruh suku termasuk indeks lebih besar dari satu, yang tidak terdapat pada model MA(1) , jadi :

$$\rho_1\theta_1^2 + \theta_1 + \rho_1 = 0$$

ρ_1 diganti oleh penaksirnya, r_1, sehingga akan diperoleh:

$$r_1\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_1 + r_1 = 0$$

Dengan mencari akar-akar kuadrat dari persamaan diatas akan diperoleh harga taksiran untuk θ_1.

2.3.3 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL CAMPURAN

Untuk memperoleh taksiran model-model ARMA , yaitu dengan mengkobinasikan persamaan fungsi kovarians model AR dan MA dan diambil nilai harapannya :

$$\gamma_k = \phi_1 E(Y_t Y_{t-k}) + \ldots + \phi_p E(Y_{t-p} Y_{t-k}) + E(a_t Y_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} Y_{t-k})$$
$$- \ldots + \theta_q E(a_{t-q} Y_{t-k}) \qquad \ldots (2.12)$$

apabila k>q , maka $E(a_t Y_{t-k})=0$, dan $E(a_{t-q} Y_{t-k})$ sehingga :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{t-p}$$

apabila k<q , kesalahan sebelumnya dan Y_{t+k} akan berkorelasi dan autokovarians akan dipengaruhi oleh bagian dari proses moving-averages, yang perlu diikutsertakan.

Varians dan autokovarians dari proses ARMA (1,1) diperoleh sebagai berikut :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} + \mu' \qquad \ldots (2.13)$$

dengan mengalikan kedua sisi dengan Y_{t-k} dan memasukan nilai harapannya diperoleh :

$$E(Y_{t-k} Y_t) = \phi_1 E(Y_{t-k} Y_{t-1}) + E(Y_{t-k} a_t) - \theta_1 E(Y_{t-k} a_{t-1}) + E(\mu' Y_{t-k})$$

karena $E(\mu' Y_{t-k}) = 0$, maka untuk k = 0 adalah:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + E[(\phi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} + \mu')a_t] - \theta_1 E[(\phi_1 Y_{t-1} +$$
$$a_t - \theta_1 a_{t-1} + \mu')a_{t-1}]$$

sehingga :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_a^2$$

sama halnya , apabila k=1

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2$$

pemecahan persamaan diatas untuk γ_0 dan γ_1 menghasilkan :

$$\gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

hasil bagi dari γ_1 dan γ_0 adalah :

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} \qquad \ldots (2.14)$$

Akhirnya, apabila k=2, fungsi autokorelasi pada model AR adalah :

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 \qquad \text{atau} \qquad \phi_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad \ldots (2.15)$$

dengan persamaan (2.14) dan (2.15) nilai-nilai penaksiran untuk parameter pada model ARMA dapat diperoleh.