# BAB II

# MATERI PENUNJANG

## 2.1 GRAPH TAK BERARAH

### 2.1.1 Pengertian

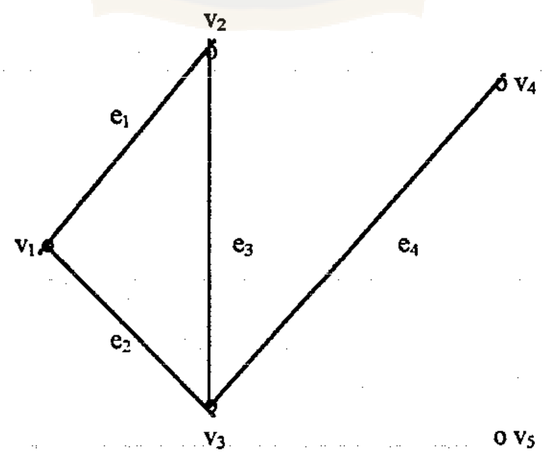
Definisi 2.1.1

Suatu graph G yang dinotasikan dengan G = (V, E) didefinisikan sebagai suatu himpunan titik-titik V dimana V = $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ adalah tidak kosong dan berhingga dan himpunan garis E dimana E = $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_m\}$.

Definisi 2.1.2

Suatu graph tak berarah adalah graph dimana semua garisnya tidak mempunyai arah.

Contoh 2.1.1:




Gb. 2.1.1 Graph tak berarah

Gambar 2.1.1 adalah suatu graph tak berarah dengan:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Definisi 2.1.3

Titik $v_i$ dan $v_j$ disebut titik ujung dari garis $e_r$ jika $e_r$ menghubungkan titik $v_i$ dan $v_j$.

Contoh 2.1.2:


Gb. 2.1.2

Pada Gb. 2.1.2 titik $v_1$ dan $v_2$ merupakan titik ujung dari garis $e_1$.

Definisi 2.1.4

Garis $e_j$ dikatakan incident dengan $v_i$ jika titik $v_i$ merupakan titik ujung dari beberapa garis $e_j$.

Contoh 2.1.3:

Pada Gb. 2.1.1 garis $e_1$ dan $e_2$ incident dengan titik $v_1$.

Definisi 2.1.5

Dua titik dikatakan adjacent jika dihubungkan oleh sebuah garis.

Contoh 2.1.4:

Pada Gb. 2.1.1 titik $v_3$ adjacent dengan $v_4$

Definisi 2.1.6

Dua garis dikatakan adjacent jika mereka incident pada titik yang sama.

Contoh 2.1.5:

Pada Gb. 2.1.1, garis $e_1$ adjacent dengan garis $e_2$.

Definisi 2.1.7

Suatu titik terisolasi adalah titik yang tidak incident terhadap semua garis.

Contoh 2.1.6:

Pada Gb. 2.1.1, titik $v_5$ merupakan titik terisolasi.

Definisi 2.1.8

Derajat (degree) dari titik $v_i$ dinotasikan $d(v_i)$ adalah banyaknya garis yang incident dengan titik $v_i$.

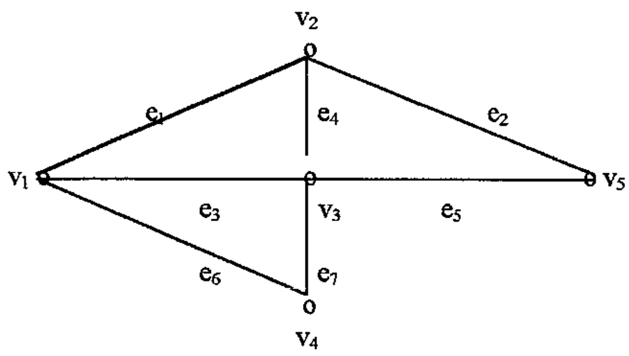
Contoh 2.1.7:

Pada Gb. 2.1.1 : $d(v_3) = 3$

$d(v_1) = d(v_2) = 2$

$d(v_4) = 1$ dan $d(v_5) = 0$

Suatu titik berkorespondensi ke asal dinamakan titik awal (titik initial) dan titik yang berkorespondensi ke tujuan dinamakan titik akhir (titik final).



Gb. 2.1.3

Contoh 2.1.8:

Pada Gb. 2.1.3 dengan titik initial $v_1$ dan titik final $v_5$ akan terdapat beberapa garis misalnya ($e_3$, $e_5$), ($e_3$, $e_4$, $e_2$), ($e_1$, $e_4$, $e_3$, $e_6$, $e_7$, $e_5$).

Definisi 2.1.9

Train garis adalah barisan garis yang mempunyai sifat sebagai berikut:

1. Untuk garis $e_u$, garis-garis dalam barisan selain garis pertama dan terakhir, satu titik akhir dari $e_u$ adalah titik akhir dari garis sebelumnya dan titik lain dari $e_u$ adalah titik akhir dari garis sesudahnya.
2. Satu titik akhir dari garis pertama adalah titik akhir dari garis sesudahnya dan titik akhir lain dari garis pertama adalah titik initial.
3. Satu titik akhir dari garis terakhir adalah titik akhir dari garis sebelumnya dan titik akhir lain dari garis terakhir adalah titik final.
4. Setiap garis muncul tepat satu kali.

Definisi 2.1.10

Suatu train garis disebut train garis terbuka (open) jika titik initial dan titik finalnya berbeda, sebaliknya jika titik initial dan titik finalnya sama disebut train garis tertutup (closed).

Contoh 2.1.10:

Pada Gb. 2.1.3 barisan ($e_3$, $e_4$, $e_2$, $e_5$, $e_7$) adalah train garis terbuka yang titik initialnya $v_1$ dan titik finalnya $v_4$.

Jika train garis terbuka mempunyai sifat bahwa derajat setiap titik kecuali titik initial dan titik final adalah dua dan derajat dari titik inital dan titik final adalah satu, maka himpunan semua garis dalam train garis disebut path antara titik initial dan titik final.

Definisi 2.1.11

Path antara titik $v_i$ dan $v_j$ adalah himpunan semua garis dalam train garis terbuka memenuhi sifat sebagai berikut:

1) Titik initial dan titik final adalah $v_i$ dan $v_j$.

2) Setiap titik selain $v_i$ dan $v_j$ berderajat 2 dan titik $v_i$ dan $v_j$ berderajat 1.

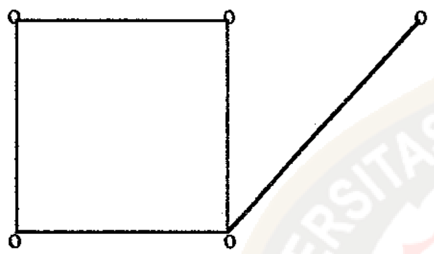
Contoh 2.1.11:

Himpunan semua garis dalam train garis ($e_1$, $e_4$, $e_5$) pada Gb. 2.1.3 merupakan path antara titik $v_1$ dan $v_5$.

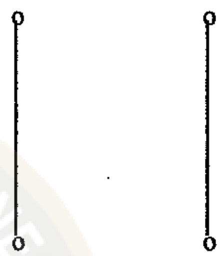
Definisi 2.1.12

Graph terhubung (connected graph) adalah graph dengan setiap pasang titik-titiknya dihubungkan oleh path. Dan sebaliknya, jika pasangan titik-titiknya tidak dihubungkan oleh path disebut graph tak terhubung (disconnected graph).

Contoh 2.1.12:



Gb. 2.1.4a.Graph terhubung



Gb. 2.1.4b Graph tak terhubung

Definisi 2.1.13

Sirkuit adalah graph terhubung yang setiap titiknya berderajat 2.

Dari definisi ini dapat dilihat bahwa himpunan semua garis dalam train garis tertutup akan menjadi sirkuit jika setiap derajat titiknya adalah 2.

Contoh 2.1.13:

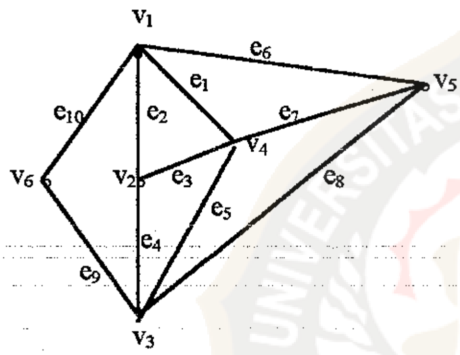
Himpunan garis dalam train garis tertutup ($e_1$, $e_3$, $e_4$) pada Gb. 2.1.3 merupakan sirkuit.

Definisi 2.1.14

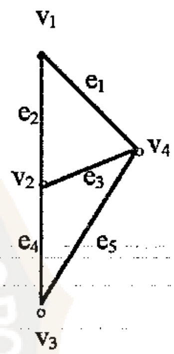
Suatu graph g dikatakan subgraph dari G jika seluruh titik dan garisnya berada dalam graph G.

Subgraph bisa dikatakan sebagai graph yang termuat atau merupakan bagian dari graph yang lain.

Contoh 2.1.14:




Gb. 2.1.5.a Graph tak berarah



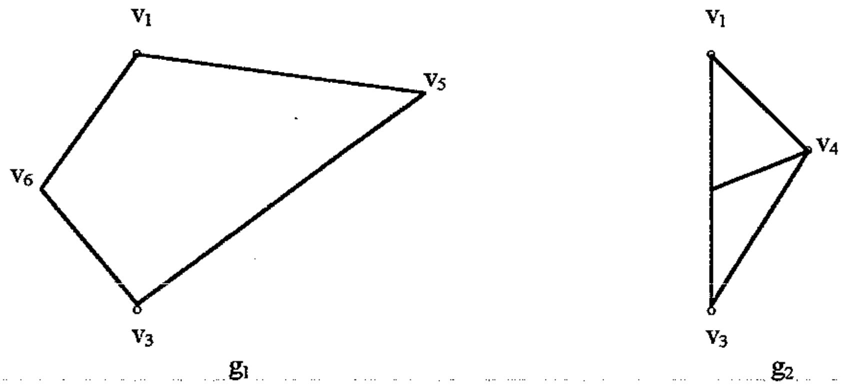

Gb. 2.1.5 Salah satu subgraph dari graph pada Gb. 2.1.5. a

Definisi 2.1.15

Dua subgraph $g_1$ dan $g_2$ dari graph G disebut garis terpisah (edge disjoint) jika $g_1$ dan $g_2$ tidak mempunyai garis bersama-sama.

Contoh 2.1.15:

$g_1$ dan $g_2$ pada Gb. 2.1.6 merupakan garis terpisah dari graph G pada Gb. 2.1.5 a.

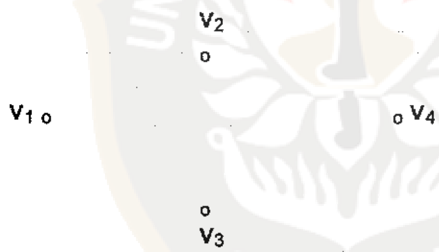



Gb. 2.1.6 Garis terpisah dari graph G pada Gb.2.1.5.a

Definisi 2.1.16

Suatu graph dikatakan null graph jika garis E kosong atau graph tersebut tidak mempunyai garis.

Contoh 2.1.16:




Gb.2.1.7 merupakan suatu null graph dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

## 2.1.2 BEBERAPA OPERASI DALAM GRAPH

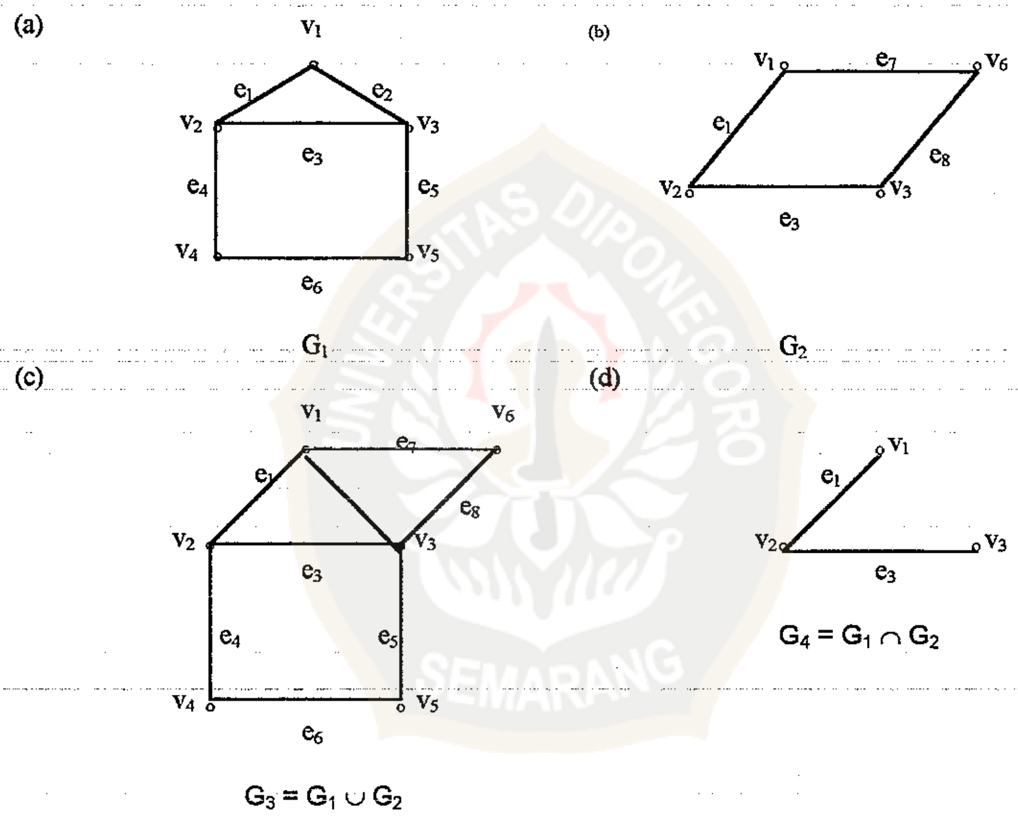
Definisi 2.1.17

Union (gabungan) dari dua graph $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah suatu graph lain $G_3$ yang ditulis sebagai $G_3 = G_1 \cup G_2$ dimana himpunan titiknya $V_3 = V_1 \cup V_2$ dan himpunan garisnya $E_3 = E_1 \cup E_2$.

Definisi 2.1.18

Irisan (Intersection) dari dua graph $G_1$ dan $G_2$ adalah suatu graph lain $G_4$ yang ditulis dengan $G_4 = G_1 \cap G_2$ dimana himpunan titiknya $V_4 = V_1 \cap V_2$ dan himpunan garisnya $E_4 = E_1 \cap E_2$.

Contoh 2.1.17:




Gb. 2.1.8 (a) Graph $G_1$; (b) Graph $G_2$; (c) $G_1 \cup G_2$; (d) $G_1 \cap G_2$

### 2.1.3 SIFAT-SIFAT OPERASI DALAM GRAPH

1. $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$
2. $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$
3. $G \cup G = G \cap G = G$

## 2.2 TREE

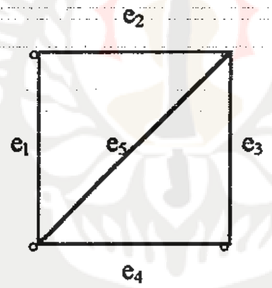
### 2.2.1 Pengertian Tree

Definisi 2.2.1

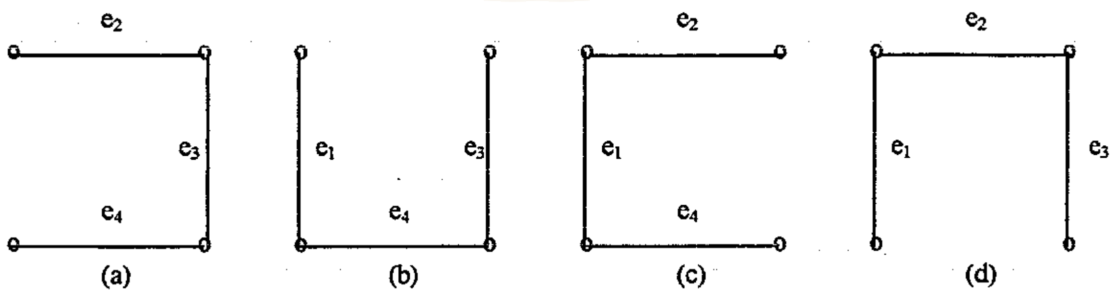
Suatu spanning subgraph dari suatu graph merupakan suatu tree bila dan hanya bila terhubung dan tidak mempunyai sirkuit. Garis dari suatu tree disebut cabang (branch).

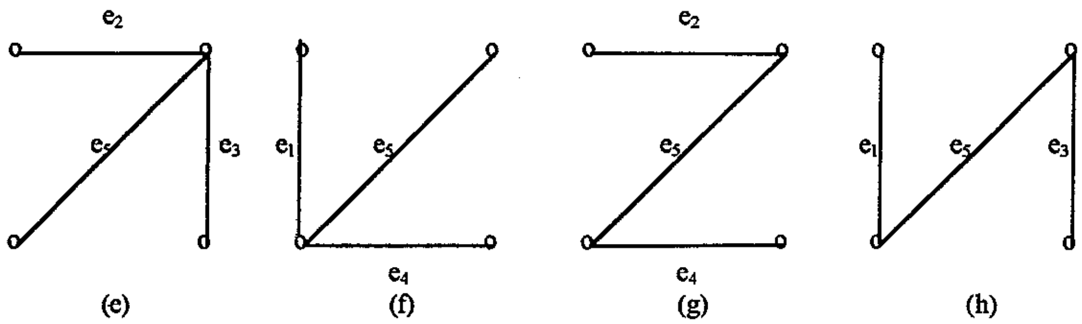
Contoh 2.2.1:

Pandang graph G dalam Gb. 2.2.1, semua tree dari graph G tersebut ditunjukkan dalam Gb. 2.2.2.




Gb. 2.2.1 Suatu Graph G yang digunakan untuk mengilustrasikan bermacam-macam subgraph.






Gb. 2.2.2 Tree-tree dari graph G pada Gb. 2.2.1

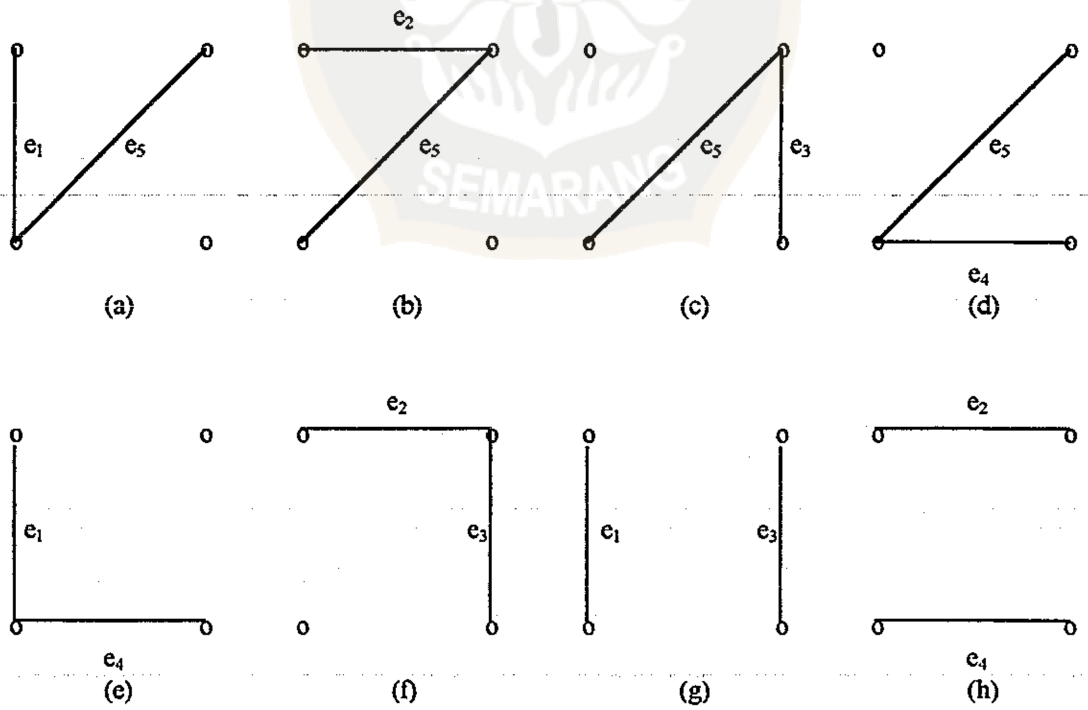
Definisi 2.2.2

Komplemen dari suatu tree dari suatu graph disebut cotree.

Garis dari suatu cotree disebut chord.

Contoh 2.2.2:

Dari Gb. 2.2.1, akan didapat cotree-cotree sebagai berikut:




Gb. 2.2.3 Cotree-cotree dari graph pada Gb 2.2.1

Teorema 2.2.1

Misalkan G adalah tree dengan sejumlah n ≥ 2 titik, maka G mempunyai paling sedikit satu titik ujung atau titik akhir.

Bukti:

Andaikan derajat tiap titik pada graph G paling sedikit dua. Mulai dari titik $x_1$, misalkan titik $x_2$ terhubung dengan $x_1$. Karena derajat $x_2$ minimum dua maka $x_2$ juga terhubung pada simpul lain yaitu $x_3$ yang tidak sama dengan $x_1$. Demikian juga $x_3$ terhubung pada $x_4$ yang tidak sama dengan $x_2$. Bila hal ini dilanjutkan maka pada akhirnya akan kembali pada salah satu titik yang telah disebutkan sebelumnya sehingga akan membentuk suatu sirkuit. Jadi graph G tersebut bukan merupakan tree, karena tree tidak mengandung suatu sirkuit. Terjadi kontradiksi karena diketahui G adalah suatu tree. Pengandaian salah, yang benar G mempunyai paling sedikit satu titik ujung atau titik akhir.

Teorema 2.2.2

Suatu tree dengan n titik akan mempunyai n - 1 cabang.

Bukti:

Hal ini akan dibuktikan dengan cara induksi matematik. Jelas bahwa teorema ini berlaku untuk n = 1. Untuk n > 1, misalkan graph G adalah tree dengan n titik. Menurut teorema 2.2.1 maka G pasti akan mempunyai satu titik akhir x dan e adalah cabang yang bertemu dengan x. Misalkan G' adalah graph baru yang diperoleh dari G dengan menghapus titik x dan cabang e. Jelas bahwa graph G' adalah graph terhubung. Karena G' tidak mempunyai sirkuit, dapat disimpulkan bahwa G' adalah suatu tree. Dan karena jumlah titik dari G' adalah n - 1 maka menurut langkah induksi G' mempunyai (n - 1) - 1 cabang atau n - 2 cabang. Jadi G akan mempunyai (n - 2) + 1 = n - 1 cabang.

Teorema 2.2.3

Untuk n titik dan e garis yang menghubungkan graph G, suatu tree berisi n - 1 cabang atau suatu cotree berisi e - n + 1 chord.

Bukti:

Dari teorema 2.2.2 telah dibuktikan bahwa untuk suatu tree dengan n titik akan berisi n - 1 cabang. Untuk bukti bahwa suatu cotree berisi e - n + 1 chord adalah sebagai berikut: Karena chord adalah garis yang tidak termasuk dalam cabang G, maka jumlah chord adalah jumlah garis e dalam graph G dikurangi cabang tree dalam graph G sehingga didapat e - (n - 1) = e - n + 1. Jadi cotree dalam graph G berisi e - n + 1 chord.

Dari sini ada suatu path tunggal (unique) terhubung antara suatu pasangan titik yang berada dalam suatu tree. Penambahan suatu chord untuk tree akan menghasilkan suatu sirkuit tunggal (unique) dalam graph hasil. Sirkuit ini disebut *sirkuit fundamental* atau *f-circuit*.

Pada Gb. 2.2.3 (a) chord $e_1$ dan $e_5$ membentuk f-circuit untuk tree t = $e_2e_3e_4$ pada Gb. 2.2.2 (a). f-circuit diberikan oleh $e_1e_2e_3e_4$ dan $e_3e_4e_5$ seperti yang ditunjukkan pada Gb. 2.2.4.


**Gb. 2.2.4 Circuit fundamental dalam graph pada Gb. 2.2.1 dari tree t = $e_2e_3e_4$**

Definisi 2.2.3

Suatu spanning subgraph dari suatu graph dikatakan suatu forest jika spanning subgraph tersebut tidak mempunyai sirkuit.

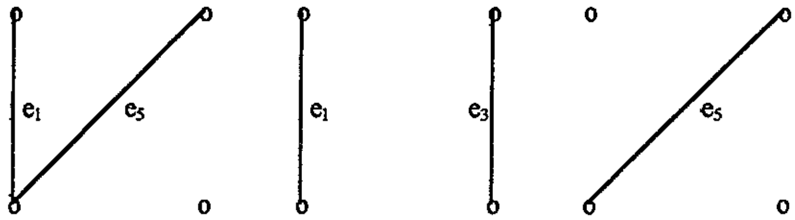
Satu atau beberapa komponennya mungkin terdapat suatu titik terisolasi.

Definisi 2.2.4

Subtree merupakan komponen suatu forest dari suatu graph G.

Contoh 2.2.3:

Subgraph-subgraph pada Gb.2.2.5 berikut ini adalah beberapa contoh forest dari graph pada Gb. 2.21




Gb. 2.2.5 Forest-forest dari graph G pada Gb. 2.2.1

Forest dalam Gb. 2.2.5 (a) dan Gb. 2.2.5 (b) masing-masing terdiri dari dua komponen sedangkan forest pada Gb. 2.2.5 (c) terdiri dari tiga komponen. Tiap-tiap komponen dari forest dalam Gb. 2.2.5 adalah suatu subtree. Maka suatu titik terisolasi dipandang sebagai suatu subtree.

Teorema 2.2.4

Suatu subgraph G dengan n titik adalah suatu tree jika dan hanya jika satu dari beberapa sifat berikut adalah benar:

1. G terhubung dan tidak mempunyai sirkuit.
2. G mempunyai n - 1 garis dan tidak mempunyai sirkuit.
3. G terhubung dan mempunyai n - 1 garis.
4. G terhubung tetapi akan kehilangan sifat ini bila beberapa garis dihilangkan.
5. Terdapat suatu path tunggal (unique) diantara beberapa pasang titik tersebut.

Definisi 2.2.5

Jarak antara dua tree (distance between two trees) dari suatu graph G adalah jumlah dari garis-garis yang termuat dalam tree yang satu tetapi tidak termuat dalam tree yang lain.

Contoh 2.2.4:

Pandang tree $t_1 = e_2\ e_3\ e_4$, $t_2 = e_1\ e_3\ e_4$ dan $t_3 = e_2\ e_3\ e_5$ dari Gb. 2.2.2. Tree $t_1$ dan $t_2$ berjarak 1 karena $t_1$ hanya memuat satu garis $e_2$ yang tidak termuat dalam $t_2$ atau $t_2$ hanya memuat satu garis $e_1$ yang tidak termuat dalam $t_1$. Demikian juga untuk $t_1$ dan $t_3$ berjarak 1 karena $t_1$ hanya memuat satu garis $e_4$ yang tidak termuat dalam $t_3$ atau $t_3$ hanya memuat satu garis $e_5$ yang tidak termuat dalam $t_1$. Sedangkan $t_2$ dan $t_3$ berjarak 2 karena $t_2$ memuat dua garis $e_1$ dan $e_4$ yang tidak dimuat dalam $t_3$ atau $t_3$ memuat dua garis $e_2$ dan $e_5$ yang tidak dimuat dalam $t_2$.

Definisi 2.2.6

Transformasi tree elementary adalah suatu operasi $e_1 \cup t - e_2 = t^*$ dengan t suatu tree dari suatu graph G dan $e_1$ suatu garis pada G tetapi tidak berada dalam t, dan $t^*$ adalah suatu tree dari G dimana $e_2$ adalah garis pada t.

Teorema 2.2.5

Setiap tree dari graph terhubung dapat diperoleh salah satunya dengan urutan terbatas dari transformasi tree elementary.

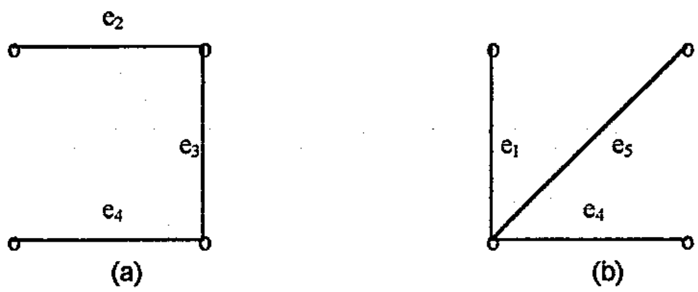
Bukti:

Misalkan $t_1$ dan $t_2$ adalah dua tree dari graph terhubung G. Jika $t_1 \neq t_2$ maka terdapat cabang (branch) $e_2$ dalam $t_2$ tetapi tidak berada dalam $t_1$. Dari sini tidak semua garis dari f-circuit L dalam $t_1 \cup e_2$, yang didefinisikan dengan chord $e_2$ dari $t_1$, dapat berada dalam $t_2$, terdapat suatu cabang $e_1$ dari $t_1$ dalam L tetapi tidak berada dalam $t_2$. Pandang tree $t^* = e_2 \cup t_1 - e_1$, dimana lebih dekat ke $t_2$ daripada ke $t_1$. Sehingga jika $t^* \neq t_2$ proses diulang. Karena $t_2$ berisi jumlah garis-garis terbatas, maka akan didapatkan $t_2$ dengan suatu urutan terbatas dari transformasi tree elementary.

Contoh 2.2.5

Diberikan dua tree $t_1$ dan $t_2$ dari Gb. 2.2.1 seperti pada Gb. 2.2.6.

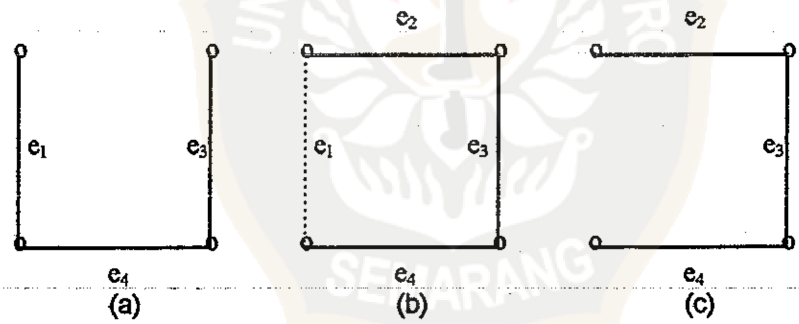
Akan ditunjukkan bahwa $t_2$ dapat diperoleh dari $t_1$ dengan dua transformasi tree elementary.



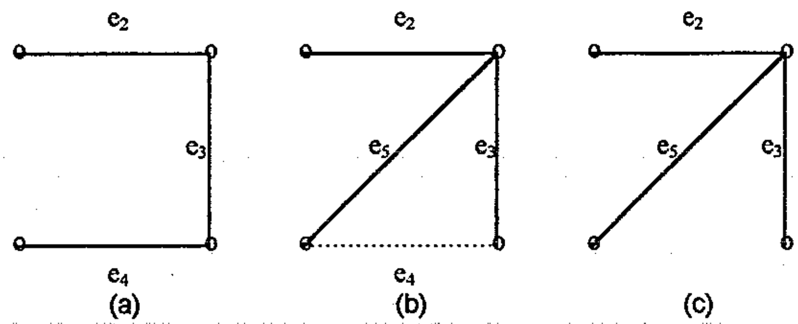

Gb. 2.2.6 Dua tree dari graph G pada Gb. 2.2.1; (a) $t_1$; (b) $t_2$

Garis $e_1$ dalam $t_2$ tetapi tidak dalam $t_1$. Transformasi tree elementarynya adalah $e_1 \cup t_1 - e_2 = e_1e_3e_4$, menghasilkan suatu tree $t^* = e_2e_3e_4$ dari G, yang berjarak 1 dari $t_2$ dan berjarak 2 dari $t_1$. Dengan demikian $t^*$ lebih dekat ke $t_2$ dari pada ke $t_1$. Dengan transformasi tree elementary $t_1$ diubah menjadi $t^*$, seperti ditunjukkan pada Gb. 2.2.7.

Sekarang misalkan $e_5$ adalah suatu garis dari $t_2$ yang tidak terdapat pada $t^*$. Transformasi tree elementary kedua adalah $e_5 \cup t^* - e_4 = e_2e_3e_5$ , menghasilkan tree $t_2$. Operasi transformasi tree elementary kedua digambarkan pada Gb. 2.2.8.




Gb. 2.2.7 Transformasi tree elementary yang mengkonversi $t_1$ ke $t^*$: (a) $t_1$; (b) $t_1 \cup e_2$; (c) $t^*$




Gb. 2.2.8 Transformasi tree elementary yang mengkonversi $t^*$ ke $t_2$: (a) $t^*$; (b) $t^* \cup t_5$; (c) $t_2$

### 2.2.2 Tree Maksimum

Suatu jaringan komunikasi tak berarah merupakan suatu graph tak berarah dengan himpunan titik V dan himpunan garis E. Setiap garis (i, j) $\in$ E dihubungkan dengan suatu bilangan real l(i, j) yang disebut *panjang* dari garis (i, j). Fungsi l dari himpunan garis E ke bilangan real tersebut merupakan fungsi panjang. Garis-garis yang tidak berada dalam E dianggap sebagai garis-garis dengan panjang tak terbatas (infinite) dalam jaringan tak berarah. Oleh karena itu, suatu jaringan tak berarah dapat ditulis sebagai G(V, E, l). Perlu diingat bahwa panjang garis dapat positif, negatif ataupun kosong dan karena G(V, E, l) adalah tak berarah, maka (i, j) = (j, i) dan fungsi panjang sama dengan l(i, j) = l(j, i) untuk semua (i, j) $\in$ E.

*Panjang* dari suatu tree t dari G(V, E, l) adalah penjumlahan dari panjang garis cabang-cabang.

$$l(t) = \sum_{(i,j)\in t} l(i,j) \qquad (2.2.1)$$

Diantara semua tree t dari G(V, E, l) ada satu yang terpanjang yang disebut *tree maksimum* dari G.

$$l(t_{\max}) = \max_t l(t) \qquad (2.2.2)$$

Demikian juga diantara semua tree t dari G(V, E, l) ada satu yang terpendek yang disebut *tree minimum* dari G.

$$l(t_{\min}) = \min_t l(t) \qquad (2.2.3)$$

Teorema 2.2.6

Suatu tree dari jaringan tak berarah G(V, E, l) adalah maksimum jika dan hanya jika pertidaksamaan

$$l(x_1, x_k) \leq \min \{l(x_1, x_2), l(x_2, x_3), l(x_3, x_4), \ldots, l(x_{k-1}, x_k)\} \qquad (2.2.4)$$

terpenuhi untuk setiap chord $(x_1, x_k)$ yang sesuai dengan tree, dimana $(x_1,x_2)$ $(x_2, x_3) \ldots (X_{k-1}, x_k)$ adalah path tunggal antara titik $x_1$ dan $x_k$ dalam tree.

Bukti:

Syarat perlu:

Ambil t yang merupakan tree maksimum dari G. Jika pertidaksamaan (2.2.4) tidak terpenuhi maka ada satu cabang $(x_i, x_{i+k})$, $1 \leq i \leq k - 1$. Dalam path tree tunggal terlihat bahwa:

$$l(x_1, x_k) > l(x_i, x_{i+1}) \qquad (2.2.5)$$

Maka transformasi tree elementary

$$(x_1, x_k) \cup t - (x_i, x_{i+1}) = t^* \qquad (2.2.6)$$

akan menghasilkan suatu tree $t^*$ yang lebih panjang dari t. Kontradiksi dengan asumsi bahwa t adalah tree maksimum. Sehingga pertidaksamaan (2.2.4) terpenuhi untuk setiap chord $(x_1, x_k)$ yang sesuai dengan tree t.

Syarat cukup:

Pertama ditunjukkan bahwa apabila $t_1$ dan $t_2$ adalah dua tree dari G yang masing-masing memenuhi pertidaksamaan (2.2.4) maka $t_1$ dan $t_2$ adalah tree dengan panjang sama. Kemudian $t_1$ dan $t_2$ dibagi dalam tiga kelas. Garis yang hanya dimiliki $t_1$ disebut garis $t_1$, garis yang hanya dimiliki oleh $t_2$ disebut garis $t_2$ dan untuk garis-garis yang dimiliki oleh $t_1$ dan $t_2$ disebut garis bersama (common edge). Andaikan $t_1$ dan $t_2$ berbeda, ambil $(x_1, x_k)$ suatu garis $t_2$ dan pandang f-circuit

$$(x_1, x_k)\,(x_1, x_2)\,(x_2, x_3)\ldots(x_{k-1}, x_k) \qquad (2.2.7)$$

dibentuk oleh chord $(x_1, x_k)$ dan path tree tunggal $P_{1k}(t_1) = (x_1, x_2)\,(x_2, x_3)\ldots(x_{k-1}, x_k)$ antara titik $x_1$ dan $x_k$ dalam $t_1$ tidak semua dapat menjadi garis bersama (common edge). Sebaliknya kondisi (2.2.7) akan menjadi sirkuit dari $t_2$ yang tidak mungkin untuk suatu tree. Sehingga ada garis-garis $t_1$ dalam $P_{1k}(t_1)$. Pertidaksamaan (2.2.4) menunjukkan bahwa setiap $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$ dari garis-garis $t_1$ ini mempunyai panjang terkecil $l(x_1, x_k)$. Andaikan bahwa setiap $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$ dari garis-garis $t_1$ ini mempunyai panjang yang lebih besar dari $l(x_1,x_k)$. Kemudian f-circuit dibentuk oleh chord $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$ dan path tree tunggal $P_{\alpha(\alpha+1)}(t_2)$ antara titik $x_\alpha$ dan $x_{\alpha+1}$ dalam $t_2$ tidak berisi garis $(x_1, x_k)$ pada saat $t_2$ memenuhi pertidaksamaan (2.2.4). Ini menunjukkan bahwa jika setiap $(x_\alpha,x_{\alpha+1})$, garis $t_1$ ditempatkan dalam (2.2.7) dengan path tunggal $P_{\alpha(\alpha+1)}(t_2)$ dalam $t_2$ dihasilkan suatu subgraph $t_2$ yang berisi suatu sirkuit. Terjadi kontradiksi. Sehingga paling sedikit ada satu garis dalam kondisi (2.2.7) yang mempunyai panjang yang sama dengan $l(x_1, x_k)$.

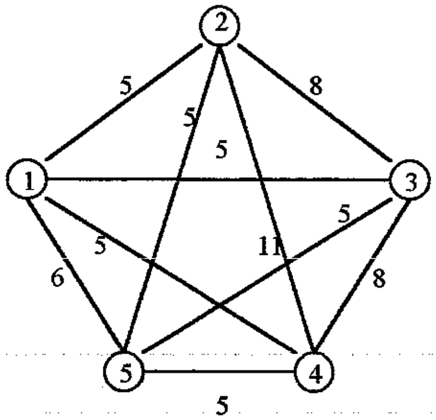
Ambil $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$ suatu garis $t_1$ dengan $l(x_\alpha, x_{\alpha+1}) = l(x_1, x_k)$. Maka transformasi tree elementarynya adalah

$$(x_1, x_k) \cup t - (x_\alpha, x_{\alpha+1}) = t^* \qquad (2.2.8)$$

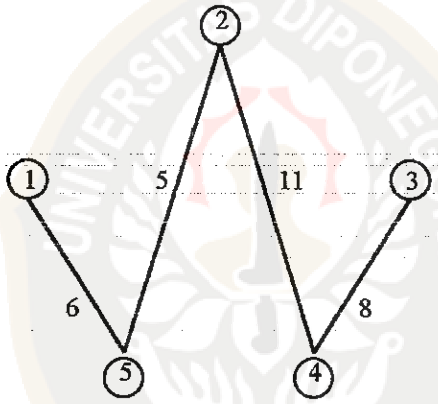
akan menghasilkan tree $t^*$ yang mempunyai panjang yang sama dengan $t_1$. Lebih jauh lagi jarak antara $t^*$ dan $t_2$ lebih pendek dari pada jarak antara $t_1$ dan $t_2$ dan hipotesa pertidaksamaan (2.2.4) terpenuhi untuk $t^*$. Kemudian argumen tersebut diulang dan menunjukkan bahwa $t_1$ dapat ditransformasi ke $t_2$ oleh suatu barisan terbatas dari transformasi tree elementary yang mempunyai panjang tree-tree yang sama, dimana hasil akhirnya adalah $t_2$. Hal ini menunjukkan bahwa $t_1$ dan $t_2$ memenuhi pertidaksamaan (2.2.4) dan $t_1$ dan $t_2$ mempunyai panjang yang sama. $t_2$ merupakan suatu tree maksimum sebab memenuhi pertidaksamaan (2.2.4). Hal ini secara tidak langsung menunjukkan bahwa setiap tree $t_1$ yang memenuhi pertidaksamaan (2.2.4) merupakan tree maksimum.

Contoh 2.2.6

Diberikan suatu jaringan komunikasi tak berarah G(V, E, l) dengan 5 titik dan panjang garis seperti ditunjukkan pada Gb. 2.2.9. Selidikilah apakah tree yang ditunjukkan pada Gb. 2.1.10 merupakan suatu tree maksimum ($t_{max}$).




Gb. 2.2.9 Graph lengkap berbobot




Gb. 2.2.10 Tree maksimum dari graph lengkap berbobot pada Gb. 2.2.9

Untuk membuktikannya sudah dijelaskan dalam Teorema 2.2.6 dengan mengaplikasikan kondisi (2.2.4) terhadap masing-masing chord dalam tree.

$$\bar{t}_{max} = (1, 2)(1, 3)(1, 4)(2, 3)(3, 5)(4, 5) \qquad (2.2.9)$$

Untuk chord (1, 2) pertidaksamaan (2.2.4) menjadi

$$l(1, 2) = 5 \leq \min [l(1, 5), l(5, 2)] \qquad (2.2.10)$$

$$= \min [6, 5] = 5$$

$l(1, 2) = 5 \leq \min [l(1, 5), l(5, 2), l(2, 4), l(4, 3)]$

$= \min [6, 5, 11, 8] = 5$

$l(1, 2) = 5 \leq \min [l(1, 5), l(5, 2), l(2, 4)]$

$= \min [6, 5, 11] = 5$

$l(2, 3) = 8 \leq \min [l(2, 4), l(4, 3)]$

$= \min [11, 8] = 8$

$l(3, 5) = 5 \leq \min [l(3, 4), l(4, 2), l(2, 5)]$

$= \min [8, 11, 5] = 5$

$l(4, 5) = 5 \leq \min [l(4, 2), l(2, 5)]$

$= \min [11, 5] = 5$

Sehingga kondisi (2.2.4) terpenuhi untuk setiap chord. Dengan demikian tree yang ditunjukkan pada Gb. 2.2.10 adalah suatu tree maksimum.

## 2.3 POTONGAN i - j (i - j CUT)

Definisi 2.3.1

Simbol $(X_p, X_q)$ menunjukkan himpunan semua garis yang dihubungkan dari titik anggota $X_p$ ke titik anggota $X_q$.

Contoh 2.3.1:

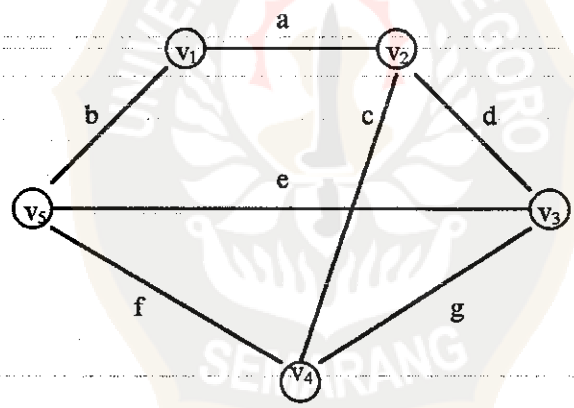
Diberikan suatu graph terhubung dengan V = {$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$} seperti pada Gb. 2.3.1 di bawah ini. Jika dipilih X = {$v_1$, $v_5$} dan $\bar{X}$ = {$v_2$, $v_3$, $v_4$} maka akan didapat:

(X, X) = {b}

($\bar{X}$, $\bar{X}$) = {c, d, g }

(X, $\bar{X}$) = {a, e, f}

Sehingga (V, V) = {a, b, c, d, e, f, g}




Gb. 2.3.1 Suatu graph terhubung

Pandang tiga subgraph (X, X), (X, $\bar{X}$) dan ($\bar{X}$, $\bar{X}$) dimana X = V - $\bar{X}$ dari suatu graph lengkap $G_c$. Ambil e suatu garis yang berada dalam dalam $G_c$ dengan titik akhir p dan q, maka:

1. Andaikan kedua titik p dan q anggota X maka garis e berada dalam subgraph (X, X) tetapi tidak berada dalam (X, $\bar{X}$) maupun berada dalam ($\bar{X},\bar{X}$).
2. Andaikan kedua titik p dan q anggota $\bar{X}$ maka garis e berada dalam ($\bar{X},\bar{X}$) dan tidak berada dalam kedua subgraph yang lain.
3. Andaikan titik p berada dalam X dan titik q berada dalam $\bar{X}$ maka garis e berada dalam (X, $\bar{X}$) tetapi tidak berada dalam kedua subgraph yang lain.

Sehingga dapat ditunjukkan bahwa setiap garis yang berada dalam $G_c$ adalah tepat berada dalam satu subgraph, yaitu (X, X) atau (X, $\bar{X}$) atau ($\bar{X},\bar{X}$).

Definisi 2.3.2

Untuk dua titik i dan j yang berbeda dari suatu graph G, suatu *potongan i - j* adalah himpunan garis (X, $\bar{X}$) dari G dengan i $\in$ X dan j $\in \bar{X}$, dimana X adalah subset dari V dan $\bar{X}$ = V - X.

Contoh 2.3.2:

Dari Gb. 2.3.1, potongan $v_1$ - $v_3$ adalah suatu himpunan garis $(X,\bar{X})$ = {a, e, f} dengan $v_1 \in X$ dan $v_3 \in \bar{X}$.

Himpunan garis {a, b}, {b, c, d}, {d, e, g}, {a, c, e, g} juga merupakan potongan $v_1$ - $v_3$.

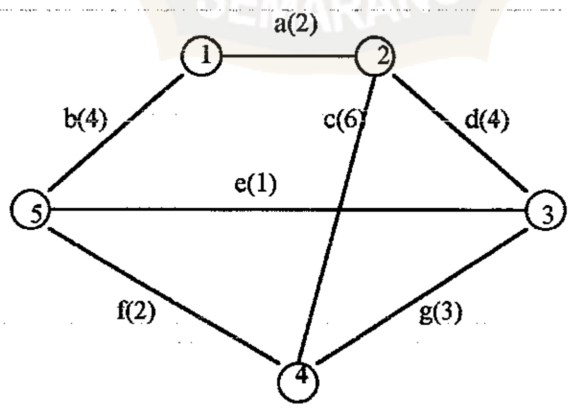
Definisi 2.3.3

Kapasitas (X, $\bar{X}$) yaitu kapasitas dari suatu potongan i - j dalam suatu jaringan komunikasi G(V, E, c, f) yang didefinisikan dengan :

$$c(X,\bar{X}) = \sum_{(x,y)\in(X,\bar{X})} c(x,y)$$

dengan c (x, y) adalah kapasitas garis (x, y).

Contoh 2.3.3:




**Gb. 2.3.2 Graph terhubung lengkap dengan kapasitas garis**

Dari Gb. 2.3.1, misalkan setiap garis diberi suatu kapasitas seperti pada Gb. 2.3.2 di atas, maka seperti pada contoh 2.3.2 himpunan garis-himpunan garis berikut merupakan potongan 1 - 3 dengan kapasitas:

- {a, b} dengan kapasitas c(1, 2) + c(1, 5) = 2 + 4 = 6
- {b, c, d} dengan kapasitas c(1, 5) + c(2, 4) + c(2, 3) = 4 + 6 + 4 = 14
- {d, e, g) dengan kapasitas c(2, 3) + c(5, 3) + c(3, 4) = 4 + 1 + 3 = 8.
- {a, e, f} dengan kapasitas c(1, 2) + c(5, 3) + c(5, 4) = 2 + 1 + 2 = 5.
- {a, c, e, g} mempunyai kapasitas c(1, 2) + c(2, 4) + c(5, 3) + c(3, 4) = 2 + 6 + 1 + 3 = 12

Definisi 2.3.4

Suatu potongan minimum i - j ($C_{min}$) adalah suatu potongan i - j dengan kapasitas minimum diantara semua potongan i - j, didefinisikan dengan :

$$c(C_{\min}) = \min_{i}\{c(X_i, \bar{X}_i)\}$$

dimana $(X_i, \bar{X}_i)$ adalah potongan i - j dalam G.

Contoh 2.3.4:

Dari contoh 2.3.3:

potongan minimum 1 - 3 = min [c{a, b}, c{a, e, f}, c{b, c, d}, c{d, e, g},

c{a, c, e, g}]

= min [6, 14, 8, 5, 12]

= 5

Pandang suatu subset murni tidak kosong terpisah $X_a$, $X_b$, $X_c$ dan $X_d$ dari suatu himpunan titik dalam graph G.

Ditentukan $X_A = X_a \cup X_b$

$X_B = X_c \cup X_d$

maka $(X_A, X_B) = (X_a \cup X_b , X_c \cup X_d)$

$(X_a \cup X_b , X_c \cup X_d)$ dapat dipisahkan dalam empat himpunan sebagai berikut:

1. Himpunan $(X_a, X_c)$ terdiri dari semua garis terhubung antara titik anggota $X_a$ dan titik anggota $X_c$.
2. Himpunan $(X_a, X_d)$ terdiri dari semua garis terhubung antara titik anggota $X_a$ dan titik anggota $X_d$.
3. Himpunan $(X_b, X_c)$ terdiri dari semua garis terhubung antara titik anggota $X_b$ dan titik anggota $X_c$.
4. Himpunan $(X_b, X_d)$ terdiri dari semua garis terhubung antara titik anggota $X_b$ dan titik anggota $X_d$.

Atau $(X_a \cup X_b , X_c \cup X_d)$ dapat dinyatakan sebagai:

$(X_a \cup X_b , X_c \cup X_d) = (X_a, X_c) \cup (X_a, X_d) \cup (X_b, X_c) \cup (X_b, X_d)$

Sedangkan kapasitas dari $(X_a \cup X_b , X_c \cup X_d)$ dinyatakan sebagai:

$c\,(X_a \cup X_b , X_c \cup X_d) = c\,(X_a, X_c) + c\,(X_a, X_d) + c\,(X_b, X_c) + c\,(X_b, X_d)$

## 2.4 MATRIKS KAPASITAS TERMINAL

### 2.4.1 Membentuk Matriks Kapasitas Terminal

Definisi 2.4.1

Diberikan pasangan titik i dan j dari suatu jaringan komunikasi G(V, E, c, f). Harga minimum potongan i - j adalah suatu potongan i - j dengan kapasitas minimum diantara semua potongan i- j, yang tidak lain adalah merupakan kapasitas terminal $\tau_{ij}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\tau_{ij} = \min_{p}[c(X_p, \bar{X}_p)]$$

dimana $(X_p, \bar{X}_p)$ adalah potongan i- j dari G.

Untuk jaringan komunikasi tak berarah $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Contoh 2.4.1:

Pandang jaringan komunikasi tak berarah G(V, E, c, f) seperti pada Gb. 2.3.2.

Dari contoh 2.3.3, harga dari potongan $(X, \bar{X})$ yang merupakan potongan minimum 1 - 3 adalah 5, dimana harga tersebut merupakan elemen $\tau_{13}$.

Demikian juga untuk elemen $\tau_{23}$, potongan minimum 2 - 3 adalah:

$\tau_{23} = c(Y, \bar{Y})$ = c({1, 2, 4, 5}, 3)

= c(2, 3) + c(3, 5) + c(3, 4) = 4 + 1 + 3 = 8

Dalam suatu sistem komunikasi, kapasitas terminal $\tau_{ij}$ mewakili kapasitas yang tersedia untuk komunikasi dari i ke j. Kemampuan komunikasi antara semua pasangan titik dalam G dapat disajikan sebagai suatu matriks yang disebut sebagai *matriks kapasitas terminal.*

Definisi 2.4.2

Matriks kapasitas terminal $T = [\tau_{ij}]$ dari suatu jaringan komunikasi G(V, E, c, f) merupakan suatu matriks bujur sangkar berderajat n, dimana:

- Elemen $\tau_{ij}$ (elemen baris ke-i, kolom ke-j, $i \neq j$) adalah kapasitas terminal dari i ke j.
- Elemen-elemen diagonal $\tau_{ij}$ didefinisikan infinite.

Bentuk dari matriks kapasitas terminal adalah sebagai berikut:

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ . \\ n \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \infty & \dots & \tau_{2n} \\ . & . & & . \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Langkah-langkah membentuk matriks kapasitas terminal adalah sebagai berikut:

1. Menentukan kapasitas terminal $\tau_{ij}$ dari semua pasangan titik-titiknya.
2. Membentuk suatu matriks bujur sangkar berderajat n dan memasukkan kapasitas terminal $\tau_{ij}$ sebagai elemen-elemen matriks tersebut sesuai dengan baris dan kolomnya dan diagonal utamanya $\infty$.

### 2.4.2 Jaringan Ekuivalen Tree

Apakah kondisi yang perlu dan cukup untuk suatu matriks yang diberikan dengan elemen-elemen real non negatif dan infinite sepanjang diagonal utamanya agar merupakan suatu matriks kapasitas terminal?

Hal tersebut akan dijelaskan dengan teorema sebagai berikut:

Teorema 2.4.1

Suatu matriks real simetri $T = [\tau_{ij}]$ dengan elemen-elemen non negatif dan infinite sepanjang diagonal utamanya adalah merupakan matriks kapasitas terminal dari suatu jaringan komunikasi tak berarah bila dan hanya bila untuk setiap i , j dan k berlaku:

$$\tau_{ij} \geq \min [\tau_{ik}, \tau_{kj}] \qquad (2.4.1)$$

Bukti:

Syarat perlu:

Ambil G(V, E, c, f) jaringan komunikasi tak berarah. $(X,\bar{X})$ adalah potongan minimum i - j dari G, maka $\tau_{ij} = c(X,\bar{X})$.

Jika titik k $\in$ X maka $(X,\bar{X})$ juga suatu potongan k - j dan

$$\tau_{ij} = c(X,\bar{X}) \geq \tau_{kj} \qquad (2.4.2)$$

dan pertidaksamaan (2.4.1) terpenuhi.

Jika titik k $\in \bar{X}$ maka $(X,\bar{X})$ juga suatu potongan i - k dan

$$\tau_{ij} = c(X,\bar{X}) \geq \tau_{ik} \qquad (2.4.3)$$

dan pertidaksamaan (2.4.1) terpenuhi.

Syarat Cukup:

Susun graph lengkap tak berarah G(V, E) yang mempunyai n titik dan pada setiap garis i - j diberikan harga $\tau_{ij}$ yang merupakan panjang garis tersebut. Ambil $t_{max}$ suatu tree maksimum dalam jaringan hasil G(V, E, l) dengan l(i, j) = $\tau_{ij}$. Dari Teorema 2.2.6 bahwa apabila (i, $x_1$) ($x_1$, $x_2$) . . . ($x_{u-1}$, $x_u$) ($x_u$, j) adalah path khusus antara titik i dan j dalam $t_{max}$ maka:

$$l(i, j) \leq \min[l(i, x_1), l(x_1, x_2), \ldots, l(x_u, j)] \qquad (2.4.4)$$

atau

$$\tau_{ij} \leq \min [\tau_{ix1}, \tau_{x1x2}, \tau_{x2x3}, \ldots, \tau_{xu-1xu}, \tau_{xuj}] \tag{2.4.5}$$

Dengan asumsi (2.4.1) terpenuhi untuk semua i, j dan k $\in$ V, maka:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &\geq \min [\tau_{ix1}, \tau_{x1j}] \\ &\geq \min [\tau_{ix1}, \tau_{x1x2}, \tau_{x2j}] \\ &\geq \min [\tau_{ix1}, \tau_{x1x2}, \tau_{x2x3}, \tau_{x3j}] \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\geq \min [\tau_{ix1}, \tau_{x1x2}, \tau_{x2x3}, \ldots, \tau_{xu-1xu}, \tau_{xuj}] \qquad (2.4.6) \end{aligned}$$

Kombinasi dari (2.4.5) dan (2.4.6) menunjukkan bahwa

$$\tau_{ij} = \min [\tau_{ix1}, \tau_{x1x2}, \tau_{x2x3}, \ldots, \tau_{xu-1xu}, \tau_{xuj}] \tag{2.4.7}$$

Oleh karena itu jika setiap cabang (x, y) dari $t_{max}$ ditetapkan sebagai kapasitas :

$$c(x, y) = l(x, y)$$

dan jika setiap chord dari cotree $t_{max}$ dihilangkan dari G, maka akan diperoleh suatu jaringan komunikasi tak berarah $t_{max}(V, E_t, c)$, dimana panjang setiap cabangnya merupakan kapasitas terminal dari T.

Suatu konsekuensi penting dari pembuktian ini adalah T dapat diperoleh dengan suatu tree. Karena tree dengan n titik terdiri dari n - 1 cabang, matriks T mempunyai paling banyak n - 1 elemen bilangan yang berbeda.

Definisi 2.4.3

Dua jaringan komunikasi n titik merupakan aliran ekuivalen, atau tepatnya ekuivalen jika mempunyai matriks kapasitas terminal yang sama.

Akibat 2.4.1

Setiap jaringan komunikasi tak berarah adalah ekuivalen terhadap suatu tree dan terdapat paling banyak n - 1 bilangan kapasitas terminal yang berbeda.

Dilihat kembali kondisi (2.4.1) yang merupakan suatu pertidaksamaan segitiga dan menentukan pembatas sederhana pada elemen-elemen dari matriks kapasitas terminal. Sebagai contoh dengan menggunakan pertidaksamaan (2.4.1) untuk tiap-tiap sisi dari segitiga sebenarnya membuktikan bahwa diantara kapasitas terminal yang tampak dalam pertidaksamaan (2.4.1), dua diantaranya harus sama dan yang ketiga harus tidak lebih kecil dari harga yang sama. Sebagai konsekuensi, ada paling banyak n - 1 bilangan yang berbeda. Ilustrasi di atas dapat dijelaskan dalam contoh berikut:

Contoh 2.4.2

Diketahui Matriks kapasitas terminal T dari jaringan komunikasi G(V, E, c, f) sebagai berikut:

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & \infty & 8 & 11 & 5 \\ 5 & 8 & \infty & 8 & 5 \\ 5 & 11 & 8 & \infty & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Tunjukkan kapasitas terminal yang tampak pada pertidaksamaan (2.4.1) dua diantaranya sama dan yang ketiga tidak lebih kecil dari harga yang sama.

Penyelesaian:

Untuk i = 1, j = 2 dan k = 3 akan didapat pertidaksamaan :

$\tau_{12} = 5 \geq \min[\tau_{13}, \tau_{23}] = \min[5, 8] = 5$

Untuk i = 2, j = 3 dan k = 4 akan didapat pertidaksamaan

$\tau_{23} = 8 \geq \min[\tau_{24}, \tau_{43}] = \min[11, 8] = 8$

Analog untuk membuktikan pertidaksamaan dari semua nilai i, j dan k yang lain.

### 2.4.3 Partisi Utama (Principal Partitions)

Definisi 2.4.4

Partisi Utama (Principal Partitions)

Suatu matriks real simetri T dikatakan menjadi partisi utama jika setelah pemindahan baris dan penyesuaian kolom yang mungkin dapat dipartisi menjadi bentuk:

$$T = \begin{bmatrix} T_a & T_c \\ T_c' & T_b \end{bmatrix} \qquad (2.4.8)$$

dimana:

1) Setiap elemen dalam $T_c$ adalah identik dan merupakan bilangan terkecil dari T.
2) $T_a$ dan $T_b$ adalah sub matriks yang simetri
3) Setiap elemen diagonal dalam T adalah ∞. $T_a$ dan $T_b$ ditunjukkan sebagai hasil sub matriks utama dari suatu partisi utama.

Teorema 2.4.2

Suatu matriks real simetri dengan elemen-elemen nonnegatif dan ∞ sepanjang diagonal utama adalah matriks kapasitas terminal dari jaringan komunikasi tak berarah bila dan hanya bila matriks dan submatriks utamanya dapat dipartisi utama sampai semua hasil submatriks utama berderajat satu.

Bukti:

Syarat perlu:

Ambil T adalah matriks kapasitas terminal dari suatu jaringan komunikasi G(V, E, c, f) dengan n titik. Dari akibat 2.4.1, terdapat tree t dengan n titik yang merupakan aliran yang ekuivalen dengan G. Ambil cabang-cabang $(x_i, x_{i+1})$ (i = 1, 2, . . ., n - 1) dari t dan disusun tanpa menurunkan derajat dengan kapasitas:

$$c(x_1, x_2) \le c(x_2, x_3) \le \ldots \le c(x_{n-1}, x_n) \qquad (2.4.9)$$

Karena T juga merupakan matriks kapasitas terminal dari t, penghapusan cabang $(x_1, x_2)$ dari t membagi himpunan titik V ke dalam subset X dan $\bar{X}$ = V - X. Melalui pemindahan baris dan penyesuaian kolom, jika diperlukan, matriks T akan dipartisi menjadi:

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X & \bar{X} \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ \bar{X} \end{array} & \begin{bmatrix} T_a & T_c \\ T_c' & T_b \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.4.10)$$

Karena $(X, \bar{X}) = (x_1, x_2)$ adalah potongan minimum i - j untuk semua i $\in$ X dan j $\in$ $\bar{X}$, setiap elemen dalam $T_c$ adalah identikdan merupakan bilangan terkecil dalam T. $T_a$ dan $T_b$ adalah simetri dan elemen diagonal dari keduanya adalah $\infty$. Bukti syarat perlu ini dilengkapi dengan cara induksi matematik dengan menghilangkan cabang-cabang dari tree t. Asumsikan bahwa proses partisi di atas adalah benar untuk semua hasil submatriks utama $T_k$ setelah menghilangkan cabang ke-k, yaitu cabang $(x_k, x_{k+1})$ dengan $1 \leq k < n - 1$. Akan ditunjukkan bahwa sisa pembagian tersebut adalah benar setelah menghapus cabang ke-k+1 yaitu cabang $(x_{k+1}, x_{k+2})$

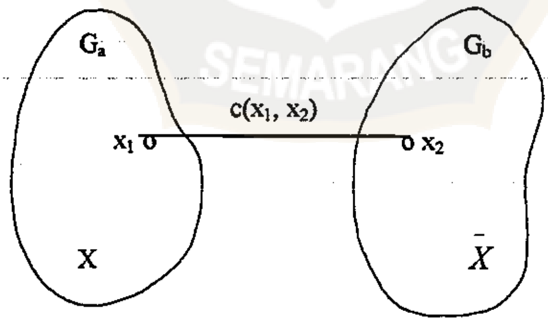
Dengan menyelidiki bahwa setelah menghapus cabang $(x_k, x_{k+1})$ dari t, subgraph yang dihasilkan adalah suatu forest yang berisi k + 1 subtree, beberapa diantaranya mungkin hanya terdiri dari suatu titik terisolasi. Misalkan $t_k$ adalah subtree yang bersesuaian terhadap submatriks $T_k$ dan misalkan $(x_{k+1}, x_{k+2})$ adalah cabang dari $t_k$. Apabila $V_k$ adalah himpunan titik dari $t_k$, kemudian penghapusan $(x_{k+1}, x_{k+2})$ dari $t_k$ membagi himpunan titik $V_k$ menjadi dua subhimpunan yang terpisah menjadi $X_k$ dan $\bar{X}_k = V_k - X_k$ sedemikian sehingga $c(X_k, \bar{X}_k) = c(x_{k+1}, x_{k+2})$. Diantara semua kapasitas potongan yang tersisa $c(X_u, \bar{X}_u) = c(x_{u+1}, x_{u+2})$, u = k, k +1, . . ., n - 2. Setelah pemindahan baris dan penyesuaian kolom yang mungkin, submatriks $T_k$ lebih jauh lagi dapat dibagi sesuai dengan himpunan titik $X_k$ dan $\bar{X}_k$ sebagai berikut:

$$T_k = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X_k & \bar{X}_k \end{array} \\ \begin{array}{c} X_k \\ \bar{X}_k \end{array} & \begin{bmatrix} T_{k_a} & T_{k_c} \\ T_{k_c}' & T_{k_b} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.4.11)$$

dimana setiap elemen dalam $T_{kc}$ adalah identik dan merupakan bilangan terkecil dalam $T_k$. $T_{ka}$ dan $T_{kb}$ simetri dan semua elemen diagonal utama adalah $\infty$. Dengan demikian partisi utama dapat diaplikasikan untuk T dan semua hasil submatriks utama.

Syarat cukup:

Andaikan matriks T dapat dipartisi utama seperti dalam (2.4.10) dimana setiap elemen $T_c$ adalah identik dan merupakan bilangan terkecil dalam T. Tentukan $G_a$ dan $G_b$ adalah dua jaringan yang disusun dari himpunan titik X dan $\bar{X}$. Ambil suatu garis $(x_1, x_2)$ yang menghubungkan jaringan $G_a$ dan $G_b$ dengan $x_1$ anggota $G_a$ dan $x_2$ anggota $G_b$. Kapasitas garis $c(x_1, x_2)$ sama dengan harga elemen pada $T_c$, seperti Gb.2.4.1.

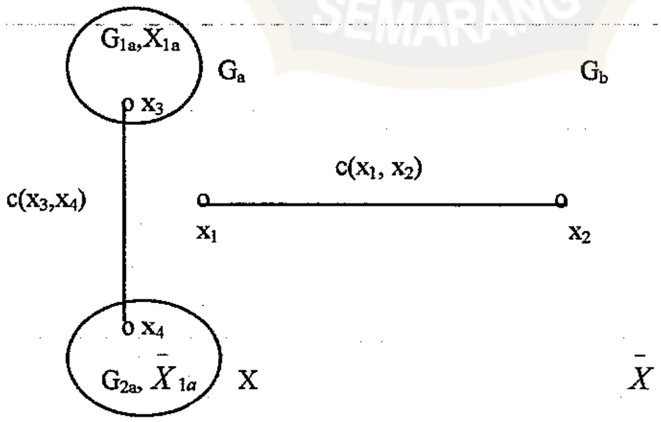



Gb. 2.4.1

Dengan hipotesa, hasil submatriks utama $T_a$ dan $T_b$ dapat lebih jauh lagi dipartisi utama dan untuk tujuan ini yang dipertimbangkan hanya $T_a$ dan ditulis :

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X_{1a} & \bar{X}_{1a} \end{array} \\ T_a = \begin{array}{c} X_{1a} \\ \bar{X}_{1a} \end{array} & \begin{bmatrix} T_{1_a} & T_{1_c} \\ T'_{1_c} & T_{1_b} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.4.12)
$$

dimana setiap elemen dalam $T_{1c}$ adalah identik dan merupakan bilangan terkecil dalam $T_a$. Tentukan himpunan titik X dari $G_a$ yang dibagi menjadi himpunan titik $X_{1a}$ dan $\bar{X}_{1a}$ dan misalkan sub himpunan yang dihasilkan dinotasikan dengan $G_{1a}$ dan $G_{2a}$. Selanjutnya hubungkan suatu garis ($x_3$, $x_4$) antara $G_{1a}$ dan $G_{2a}$, dengan $x_3$ anggota $G_{1a}$ dan $x_4$ anggota $G_{2a}$ dan kapasitas garis c($x_3$, $x_4$) sama dengan harga elemen yang berada dalam $T_{1c}$, seperti ditunjukkan pada Gb. 2.4.2. Proses ini dapat dilanjutkan sampai setiap hasil submatriks utama disusun hanya dari satu elemen ∞. Jaringan yang dihasilkan adalah suatu tree, kapasitas cabang adalah kapasitas terminal dari T.




Gb. 2.4.2 Suatu bangunan subjaringan $G_{1a}$ dan $G_{2a}$

Contoh 2.4.3

Misalkan diberikan matriks real simetri

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & \infty & 8 & 11 & 5 \\ 5 & 8 & \infty & 8 & 5 \\ 5 & 11 & 8 & \infty & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah pemindahan baris dan penyesuaian kolom, matriks T dapat dipartisi utama menjadi:

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} \infty & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & \infty & 5 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & \infty & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & \infty & 11 \\ 5 & 5 & 8 & 11 & \infty \end{array}\right] \end{array}$$

Dengan demikian, menurut teorema 2.4.2, matriks T dapat dicapai karena partisi utama dapat diaplikasikan pada T dan semua hasil submatriks utama.