BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1. ANALISIS RUNTUN WAKTU

Analisis runtun waktu (*time series analysis*) adalah suatu analisis terhadap pengamatan, pencatatan, dan penyusunan peristiwa yang diambil dari waktu kewaktu. Pada umumnya pengamatan dan pencatatan itu dilakukan dalam jangka waktu tertentu, dan menghasilkan data runtun waktu. Data runtun waktu sangat bervariasi, hal ini dipengaruhi adanya komponen trend, siklis, musiman dan komponen yang tidak teratur.

Data runtun waktu yang mempunyai pola stasioner berfluktuasi pada sekitar mean yang konstan (stasioner dalam mean), dapat ditulis :

$$Y_t = \beta + \varepsilon_t$$

dengan Y_t = data runtun waktu pada periode t

β = parameter yang tidak diketahui ($=E(Y_t)$)

ε_t = galat random periode t

Data runtun waktu dalam jangka waktu yang cukup panjang biasanya mempunyai gerakan yang cenderung naik atau cenderung turun. Pola data seperti itu disebut trend. Data yang memiliki pola trend dapat dibagi lagi, misalnya trend linier, trend polinomial, dan trend eksponensial. Hasil pengamatan periode t (data ke t) pada pola trend dapat ditulis :

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

dengan Y_t = data runtun waktu pada periode t

$f(t)$ = harga trend pada periode t

(trend polinomial $f(t)=\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_n t^n$)

ε_t = galat random periode t

Untuk memperoleh arah pola gerakan secara umum dapat digunakan metode antara lain **Penghalusan** (*smoothing*) dan **Rata-rata bergerak sederhana** (*simple moving average*).

2.1.1. Penghalusan

Penghalusan adalah penyajian harga tafsiran trend pada suatu titik t dengan menggunakan rata-rata tertimbang dari harga observasi disekitar t tersebut.

Definisi rata-rata tertimbang :

Jika diketahui suatu runtun waktu $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ maka rata-rata tertimbang ialah :

$$\sum_{s=1}^{T} c_s\, Y_{t+s}, \text{ dimana } t+s > 0 \text{ dan } \sum_{s=1}^{T} c_s = 1 \qquad (2.1)$$

Apabila Y_t adalah pola $Y_t = f(t) + \varepsilon_t$ dengan asumsi $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$ dan $\text{kov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k})=0$ untuk $k \neq 0$, maka tafsiran untuk $E(Y_t) = f(t)$ penghalusannya adalah :

$$\overset{*}{Y}_t = \sum_{s=-m}^{m} c_s\, Y_{t+s} \quad \text{dengan} \quad \sum_{s=-m}^{m} c_s = 1 \qquad (2.2)$$

Karena $Y_t = f(t) + \varepsilon_t$ untuk $t = 1, \ldots, T$ maka

$$\overset{*}{Y}_t = \sum_{s=-m}^{m} c_s \{f(t+s) + \varepsilon_{(t+s)}\}$$

$$= \sum_{s=-m}^{m} c_s\, f(t+s) + \sum_{s=-m}^{m} c_s\, \varepsilon_{(t+s)}$$

$$= \sum_{s=-m}^{m} c_s\, f(t+s) + \overset{*}{\varepsilon}_t \quad \text{dengan} \quad \overset{*}{\varepsilon}_t = \sum_{s=-m}^{m} c_s\, \varepsilon_{(t+s)} \qquad (2.3)$$

$\overset{*}{Y}_t$ disebut penghalus untuk Y_t.

Barisan $\overset{*}{Y}_{m+1}, \overset{*}{Y}_{m+2}, \ldots, \overset{*}{Y}_{T-m}$ disebut rata-rata bergerak (2m+1) periode untuk $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$. Banyaknya elemen rata-rata bergerak yang dapat dibuat adalah T-2m.

Untuk $c_s = c_{-s} = c$, dimana c adalah konstan, maka penghalusan $\overset{*}{Y}_t$ merupakan rata-rata hitung dari (2m+1) periode data observasi.

$$\sum_{s=-m}^{m} c_s = \sum_{s=-m}^{m} c = 1$$

$$= (2m+1)c, \quad \text{maka didapat } c = \frac{1}{(2m+1)}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\overset{*}{Y}_t = \frac{1}{(2m+1)} \sum_{s=-m}^{m} Y_{t+s} \tag{2.4}$$

2.1.2. Rata-rata Bergerak Sederhana

Pandang Y_t memiliki pola stasioner atau pola trend linier, maka penaksir tak bias untuk $E(Y_t)$ adalah :

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{(2m+1)} \sum_{s=-m}^{m} Y_{t+s}$$

Kemudian selanjutnya $\hat{Y}_t$ disebut rata-rata bergerak sederhana (2m+1) periode dan diberi simbol M_t sehingga

$$M_t = \frac{1}{(2m+1)} \sum_{s=-m}^{m} Y_{t+s} \tag{2.5}$$

Terlihat bahwa rata-rata bergerak (M_t) adalah sama dengan penghalusan $\overset{*}{Y}_t$ untuk $c_s = c_{-s}$.

2.2. TEORI PADA TRANSFORMASI FOURIER DISKRIT (TFD)

2.2.1. Definisi TFD

Pandang x(j), j = 0, 1, ..., N-1, adalah barisan dari N suku bilangan kompleks. Transformasi Fourier Diskrit (TFD) dari x(j) didefinisikan :

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\ W_N^{-nj}, \qquad (2.6)$$

$$(n = 0, 1, \ldots, N-1)$$

dimana $W_N = \exp(2\pi i/N)$ dengan $i = \sqrt{-1}$, dan

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\ W_N^{nj}, \qquad (2.7)$$

$$(j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

Deret x(j) dikatakan Invers Transformasi Fourier Diskrit (ITFD) dari a(n). Persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) adalah sepasang transformasi Fourier diskrit. Untuk membuktikan ITFD persamaan (2.7) dapat dilakukan subtitusi persamaan (2.7) kedalam persamaan (2.6) sehingga didapat :

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a(m)\ W_N^{mj} \right] W_N^{-nj}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a(m) \left[\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{mj}\ W_N^{-nj} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a(m) \left[\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{(m-n)j} \right] \qquad (2.8)$$

Menurut hubungan orthogonal dari fungsi eksponen W_N^{nj} :

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{mj}\ W_N^{-nj} = \begin{cases} N & \text{untuk } m = n \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \qquad (2.9)$$

Jadi ruas kanan persamaan (2.8) adalah berharga nol kecuali untuk m = n, maka hanya ada satu suku tidak sama dengan nol yang terjadi pada m = n dan nilainya adalah a(n). ∎

Fungsi eksponen W_N^{nj} sebagai fungsi dari n dan j adalah periodik dengan periode N sehingga :

$$W_N^{nj} = W_N^{n(j+N)} = W_N^{(n+N)j}$$

Akibat dari pernyataan ini terhadap barisan a(n) dan x(j) sebagai definisi transformasi, maka persamaan (2.6) dan (2.7) adalah periodik dengan periode N. Untuk x(j) : j = 0, ±1, ±2, ... ; a(n) : n = 0, ±1, ±2, ... diperoleh :

$$a(n) = a(kN + n), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x(j) = x(kN + j), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.10}$$

Perluasan persamaan (2.10) sebagai keadaaan khusus yaitu :

$$a(-n) = a(N - n),$$

$$x(-j) = x(N - j), \tag{2.11}$$

Dari persamaan (2.11) didapat diuraikan menjadi :

$$a(-n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, W_N^{nj} \quad , \tag{2.12}$$

$$x(-j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\, W_N^{-nj} \tag{2.13}$$

serta untuk bentuk konjugat dari persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) dinyatakan dengan :

$$\overset{*}{a}(n) = \sum_{j=0}^{N-1} \overset{*}{x}(j)\, W_N^{nj} \quad , \tag{2.14}$$

$$\overset{*}{x}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overset{*}{a}(n)\, W_N^{-nj} \tag{2.15}$$

2.2.2. Sifat-sifat dari TFD

Teorema 1 : Jika $x(j) \longleftrightarrow a(n)$ maka $x(-j) \longleftrightarrow a(-n)$

Bukti :

Dari ITFD persamaan (2.12) didapat :

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(-n)\ W_N^{-nj} ,$$

subtitusi untuk j = -j didapat :

$$x(-j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(-n)\ W_N^{nj} ,$$

$$x(-j) \longleftrightarrow a(-n) \blacksquare$$

Barisan x(j) didefinisikan fungsi genap bila $x(j) = x(-j)$ dan fungsi ganjil bila $x(j) = -x(-j)$.

Corollary 1.1 :

x(j) adalah fungsi genap jika dan hanya jika a(n) adalah fungsi genap. Dan x(j) adalah fungsi ganjil jika dan hanya jika a(n) adalah fungsi ganjil.

Bukti :

a. **Untuk fungsi genap**

($\longrightarrow$) : Jika $x_g(k)$ adalah fungsi genap berarti $x_g(k)$ = $x_g(-k)$, maka hasil transformasinya adalah fungsi genap dan real :

$$x_g(k) \longleftrightarrow R_g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_g(k) \cos\left[\frac{2\pi nk}{N}\right]$$

untuk bukti persamaan diatas, menggunakan definisi untuk hubungan :

$$a_g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_g(k)\ e^{-i2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_g(k) \cos\left[\frac{2\pi nk}{N}\right] + i \sum_{k=0}^{N-1} x_g(k) \sin\left[\frac{2\pi nk}{N}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_g(k) \cos\left[\frac{2\pi nk}{N}\right] = R_g(n)$$

Karena $x_g(k) \cos\left[\frac{2\pi nk}{N}\right] = x_g(k) \cos\left[\frac{2\pi(-n)k}{N}\right]$, maka $a_g(n)$ = $a_g(-n)$ dan fungsi frekwensinya adalah fungsi genap. $\blacksquare$

($\longleftarrow$) : Dari pembuktian diatas didapat invers fungsi real dan genap, adalah fungsi genap.■

b. untuk fungsi ganjil

($\longrightarrow$) : Jika $x_o(k)$ adalah fungsi ganjil berati $x_o(k) = -x_o(-k)$, maka hasil transformasinya adalah fungsi ganjil dan imajiner :

$$x_o(k) \longleftrightarrow i\, I_o(n) = -i \sum_{k=o}^{N-1} x_o(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

Analog dengan fungsi genap, digunakan hubungan :

$$a_o(n) = \sum_{k=o}^{N-1} x_o(k)\, e^{-i2\pi nk/N}$$

$$= \sum_{k=o}^{N-1} x_o(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - i \sum_{k=o}^{N-1} x_o(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= -i \sum_{k=o}^{N-1} x_o(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = iI_o(n)$$

Karena $x_o(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = -x_o(k) \sin\left(\frac{2\pi(-n)k}{N}\right)$, maka $a_o(n) = -a_o(-n)$ dan fungsi frekwensi adalah fungsi ganjil. ■

($\longleftarrow$) : Invers fungsi imajiner dan ganjil adalah fungsi ganjil. ■

Teorema 2 : Jika $x(j) \longleftrightarrow a(n)$, maka

(i) $\overset{*}{x}(-j) \longleftrightarrow \overset{*}{a}(n)$

(ii) $\overset{*}{x}(j) \longleftrightarrow \overset{*}{a}(-n)$

Bukti :

(i) : Dari persamaan (2.15), subtitusi untuk $j = -j$ didapat :

$$\overset{*}{x}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{n=o}^{N-1} \overset{*}{a}(n)\, W_N^{nj} \quad ■$$

(ii) : Dari persamaan (2.14), subtitusi untuk $n = -n$ didapat :

$$\overset{*}{a}(-n) = \sum_{j=o}^{N-1} \overset{*}{x}(j)\, W_N^{-nj} ,$$

dan ITFD dari $\overset{*}{a}(-n)$ adalah : $\overset{*}{x}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \overset{*}{a}(-n)\, W_N^{nj}$ ∎

2.2.3. Konvolusi dan Korelasi

Ambil $x_1(j)$ dan $x_2(j)$ dua barisan dengan TFD $a_1(n)$ dan $a_2(n)$. Konvolusi dari $x_1(j)$ dan $x_2(j)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$x_1(j) * x_2(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\, x_2(j-k)$$

Dalam konvolusi berlaku hukum komutatif, yaitu :

$$x_1(j) * x_2(j) = x_2(j) * x_1(j)$$

Teorima 3 : jika $x_1(j) \longleftrightarrow a_1(n)$ dan

$x_2(j) \longleftrightarrow a_2(n)$

maka

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\, x_2(j-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(j-k)\, x_2(k) \longleftrightarrow a_1(n)\, a_2(n) \tag{2.16}$$

dan

$$x_1(j)\, x_2(j) \longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_1(m)\, a_2(n-m) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_1(n-m)\, a_2(m) \tag{2.17}$$

Bukti :

Untuk persamaan (2.16), subtitusi secara langsung dari persamaan (2.7) sehingga didapat :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\, x_2(j-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) W_N^{nk} \quad \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_2(m) W_N^{m(j-k)} \right\}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_1(n) a_2(m)\, W_N^{mj} \quad \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} \right\}$$

Dengan menggunakan hubungan orthogonal (2.9), untuk m = n, diperoleh :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\ x_2(j-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) a_2(n) W_N^{nj} \quad \blacksquare$$

untuk persamaan (2.17), dibuktikan dengan cara yang sama seperti diatas, yaitu subtitusi dari persamaan (2.6) :

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_1(m)\ a_2(n-m)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} x_1(j) W_N^{-mj} \quad \sum_{k=0}^{N-1} x_2(k) W_N^{-(n-m)k} \right\}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_1(j)\ x_2(k)\ W_N^{-nk} \quad \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-(j-k)m} \right\}$$

Dari hubungan orthogonal untuk k = j, diperoleh :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_1(m)\ a_2(n-m) = \sum_{j=0}^{N-1} x_1(j)\ x_2(j)\ W_N^{-nj} \quad \blacksquare$$

Konvolusi diatas disebut **wrap around** bila batas dari barisan ditentukan hanya pada 0,1, ..., N-1.

Ambil operasi korelasi diskrit atau hasil lag dari dua barisan yaitu perkalian transformasi dengan transformasi lainnya yang negatip. Untuk mudahnya sebagai berikut :

Corollary 3.1 : Jika $x_1(j) \longleftrightarrow a_1(n)$

$x_2(j) \longleftrightarrow a_2(n)$, maka

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k+j)\ x_2(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\ x_2(k-j) \longleftrightarrow a_1(n)\ a_2(-n) \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\ x_2(k+j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k-j)\ x_2(k) \longleftrightarrow a_1(-n)\ a_2(n) \tag{2.19}$$

dan,

$$x_1(j)x_2(-j) \longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_1(m+n)\, a_2(m) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_1(m)\, a_2(m-n) \quad (2.20)$$

$$x_1(-j)x_2(j) \longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_1(m)\, a_2(m+n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_1(m-n)\, a_2(m) \quad (2.21)$$

Bukti :

Dengan mengambil ITFD persamaan (2.12) untuk $x(k)$, maka didapat :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k+j)\, x_2(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) W_N^{n(k+j)} \; \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_2(-m) W_N^{-mk} \right\}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_1(n) a_2(-m) W_N^{nj} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} \right\}$$

Dari hubungan orthogonal untuk $m = n$, diperoleh :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k+j)\, x_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) a_2(-n) W_N^{nj} \quad \blacksquare$$

Untuk persamaan (2.19) dapat dibuktikan dengan cara seperti diatas.

Sedang persamaan (2.20) dibuktikan dengan menggunakan cara pada pembuktian persamaan (2.17). Dan pembuktian persamaan (2.21) analog dengan pembuktian persamaan (2.20).

Corollary 3.2 (Teorema Parseval) :

Jika $x(j) \longleftrightarrow a(n)$, maka

$$\sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a(n)|^2 \quad (2.22)$$

Bukti :

Ambil $x_1(j) = x(j)$

$x_2(j) = \overset{*}{x}(j)$

Dengan menggunakan persamaan (2.18) **corollary 3.1**, dan persamaan (2.15) didapat :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k+j)\ \overset{*}{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\ \overset{*}{a}(n) W_N^{nj}$$

dan untuk j = 0, maka **teorima parseval** terbukti.█

2.3. TOTAL OPERASI PERHITUNGAN TFD

Pandang bahwa terdapat suatu barisan x(j) dengan panjang N dan diinginkan menghitung TFD dari persamaan (2.6) secara langsung yaitu dengan menjalankan n dan j dari 0 sampai N-1. Sehingga persamaan (2.6) mempunyai perhitungan dengan N persamaan. Sebagai contoh apabila terdapat jumlah data masukkan sebesar N = 4, maka persamaan (2.6) dapat ditulis :

$$\begin{aligned} a(0) &= x(0).W_N^{0} + x(1).W_N^{0} + x(2).W_N^{0} + x(3).W_N^{0} \\ a(1) &= x(0).W_N^{0} + x(1).W_N^{-1} + x(2).W_N^{-2} + x(3).W_N^{-3} \\ a(2) &= x(0).W_N^{0} + x(1).W_N^{-2} + x(2).W_N^{-4} + x(3).W_N^{-6} \\ a(3) &= x(0).W_N^{0} + x(1).W_N^{-3} + x(2).W_N^{-6} + x(3).W_N^{-9} \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Semua operasi pada persamaan (2.23) dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$a(n) = W_N^{-nj}\ x(j)$$

dimana $a(n) = [a(0), a(1), a(2), a(3)]^T$

$x(j) = [x(0), x(1), x(2), x(3)]^T$

W_N^{-nj} = faktor putaran dengan masukkan n dan j

Sehingga persamaan (2.23) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ a(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & W_N^{-3} \\ W_N^0 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & W_N^{-6} \\ W_N^0 & W_N^{-3} & W_N^{-6} & W_N^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

Pada persamaan (2.6) terdapat N persamaan, dengan n = 0, 1, ..., N-1. Apabila diambil satu persamaan dan indeks j dijalankan dari 0 sampai N-1 pada persamaan (2.6) akan diperoleh :

$$a(0) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\ W_N^{-nj} \quad \text{(diambil contoh n = 0)}$$

$$a(0) = x(0).W_N^{0} + x(1).W_N^{0} + x(2).W_N^{0} + \ldots + x(N-1)\ W_N^{0}$$

Sehingga tampak bahwa setiap persamaan akan mempunyai operasi matematik sebesar N perkalian kompleks dan N-1 penjumlahan kompleks. Untuk n = 0,1,...,N-1 maka total operasi perkalian kompleks sebesar N^2 dan untuk penjumlahan kompleks N(N-1).

2.4. ALGORITMA TRANSFORMASI FOURIER CEPAT (TFC)

Untuk menjelaskan TFC dipilih bilangan data masukkan yang memenuhi hubungan $N = 2^r$, dimana r adalah integer. Dengan mengambil persamaan (2.6) dalam bentuk :

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x_0(j)\ W^{nj} \qquad (2.25)$$

dimana $W = e^{-2\pi i/N}$ dan n = 0, 1, ..., N-1

Dari sini terlihat $W = W_N^{-1} = e^{-2\pi i/N}$. Dengan meninjau kembali persamaan (2.24), maka TFC dapat diuraikan sebagai berikut :

Langkah Pertama : Pada pengembangan TFC adalah menurunkan persamaan (2.24) dengan menggunakan hubungan $W^{jn} = W^{jn \bmod N}$

Kemudian dinyatakan kembali sebagai nj mod N, yaitu sisa dari pembagian nj oleh N. Pada persamaan diatas N = 4. Jika diambil n = 2 dan j = 3 maka :

$$W^{jn} = W^{3.2} = W^{6} = W^{2}, \text{ karena}$$

$$W^{jn} = W^{6} = \exp\,[(-2\pi i/4)\ (6)] = \exp\,[-3\pi i]$$

$$= W^{2} = W^{jn \bmod N}$$

Sehingga persamaan (2.24) dapat ditulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ a(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^{1} & W^{2} & W^{3} \\ 1 & W^{2} & W^{0} & W^{2} \\ 1 & W^{3} & W^{2} & W^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(0) \\ x_o(1) \\ x_o(2) \\ x_o(3) \end{bmatrix} \qquad (2.26)$$

Langkah Kedua : Pada pengembangan faktor matriks jarang (sparse matriks yaitu matriks yang mempunyai elemen nol banyak, pada baris dan pada kolom), pada persamaan (2.26). Dan melakukan penukaran baris kedua kedalam baris ketiga, sehingga menjadi bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} a(0) \\ a(2) \\ a(1) \\ a(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^{0} & 0 & 0 \\ 1 & W^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^{1} \\ 0 & 0 & 1 & W^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^{0} \\ 1 & 0 & W^{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(0) \\ x_o(1) \\ x_o(2) \\ x_o(3) \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Faktorisasi matriks merupakan kunci daripada efisiensi TFC. Untuk menghitung persamaan (2.27), pertama ambil persamaan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^{0} \\ 1 & 0 & W^{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(0) \\ x_o(1) \\ x_o(2) \\ x_o(3) \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

yaitu vektor kolom $x_1(j)$ sama dengan hasil dua buah matriks ruas kanan persamaan (2.27). Sehingga elemen $x_1(j)$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) memerlukan satu perkalian kompleks dan satu penjumlahan kompleks.

$$x_1(1) = x_0(1) + W^0 x_0(3) \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) memerlukan satu perkalian kompleks dan satu penjumlahan kompleks.

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2) \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) memerlukan satu penjumlahan kompleks, karena $W^0 = -W^2$ dan perkalian kompleks $W^0 x_0(2)$ telah dihitung pada persamaan (2.29), ketika menentukan $x_1(0)$.

$$x_1(3) = x_0(1) + W^2 x_0(3) = x_0(1) - W^0 x_0(3) \tag{2.32}$$

Persamaan (2.32) memerlukan satu penjumlahan kompleks, karena $W^0 = -W^2$ dan perkalian kompleks $W^0 x_0(3)$ telah dihitung pada persamaan (2.30), ketika menentukan $x_1(1)$.

Sehingga secara keseluruhan vektor $x_1(j)$ memerlukan operasi sebesar 4 penjumlahan kompleks dan 2 perkalian kompleks. Kemudian seterusnya dengan menghitung sepenuhnya persamaan (2.27).

Didefinisikan vektor $x_2(j)$ merupakan hasil pergandaan dua buah matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a(0) \\ a(2) \\ a(1) \\ a(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Maka diperoleh :

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) menghasilkan satu perkalian kompleks dan satu penjumlahan kompleks.

Dengan cara analog didapat $x_2(1)$ memerlukan satu penjumlahan kompleks. Untuk $x_2(2)$ memerlukan satu perkalian kompleks dan satu penjumlahan kompleks. Dan $x_2(3)$ membutuhkan satu penjumlahan kompleks saja.

Maka persamaan (2.27) membutuhkan total 4 perkalian kompleks dan 8 penjumlahan kompleks.

Untuk N adalah pangkat dari 2 yaitu $N = 2^r$ dimana r adalah integer, TFC adalah algoritma untuk faktorisasi matriks NxN. Setiap faktorisasi mempuyai sifat khusus untuk meminimkan perkalian dan penjumlahan kompleks.

Dari contoh diatas, bahwasannya TFC memerlukan opersai $Nr/2 = (N \log_2 N)/2 = 4.2/2 = 4$ perkalian kompleks dan $Nr = N \log_2 N = 4.2 = 8$ penjumlahan kompleks.

Seperti telah dijelaskan dimuka bahwa operasi perhitungan langsung TFD memerlukan N^2 perkalian kompleks dan N(N-1) penjumlahan kompleks. Kemudian TFC merupakan algoritma cepat untuk menghitung efisiensi dari TFD (perhitungan tak langsung). Hasil dari perhitungan TFC akan memerlukan operasi sebesar $(N \log_2 N)/2$ perkalian kompleks (KK) dan $N \log_2 N$ penjumlahan kompleks (JK).

2.4.1. Bentuk Notasi TFC dengan Formulasi Cooley-Tukey

Tinjau kembali persamaan (2.25), untuk $N = 4 = 2^2$ maka r = 2 dan indeks n dan j dapat digambarkan sebagai bilangan biner dua bit yaitu :

$j = 0,1,2,3$ atau $j=(j_0,j_1)=00,01,10,11$

$n = 0,1,2,3$ atau $n=(n_0,n_1)=00,01,10,11$

Metode keseluruhan dari penulisan j dan n adalah :

$$j=2j_1+j_0 \quad \text{dan} \quad n=2n_1+n_0 \tag{2.35}$$

dimana j_1, j_0, n_1, dan n_0 dapat mengambil harga hanya 0 dan 1. Persamaan (2.35) adalah metode sederhana penulisan bilangan biner (radix-2) yang ekivalen dengan bilangan basis 10. Sehingga dengan menggunakan persamaan (2.35) kemudian disubtitusi ke persamaan (2.25) akan diperoleh :

$$a(n_1,n_0)=\sum_{j_0=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1} x_0(j_1,j_0)\, W^{(2n_1+n_0)(2j_1+j_0)} \tag{2.36}$$

Sekarang ditinjau untuk bagian faktor putaran pada persamaan (2.36).

Karena $W^{a1+a2} = W^{a1}\, W^{a2}$, maka

$$W^{(2n_1+n_0)(2j_1+j_0)} = W^{(2n_1+n_0)2j_1}\, W^{(2n_1+n_0)j_0}$$

$$= [W^{4n_1j_1}]\, W^{2n_0j_1}\, W^{(2n_1+n_0)j_0} \tag{2.37}$$

Tulisan dalam kurung tegak pada persamaan (2.37) adalah sama dengan unit, karena :

$$[W^{4n_1j_1}] = e^{-j2\pi 4n_1j_1/4} = [e^{-j2\pi}]^{n_1j_1}$$

$$= [\cos 2\pi - j\sin 2\pi]^{n_1j_1} = [1]^{n_1j_1} = 1$$

Dengan demikian persamaan (2.37) menjadi :

$$W^{(2n_1+n_0)(2j_1+j_0)} = W^{2n_0j_1}\, W^{(2n_1+n_0)j_0} \tag{2.38}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (2.38) ke dalam persamaan (2.36) maka akan diperoleh :

$$a(n_1,n_0) = \sum_{j_0=0}^{1}\left[\sum_{j_1=0}^{1} x_0(j_1,j_0)\, W^{2n_0j_1}\right] W^{(2n_1+n_0)j_0} \tag{2.39}$$

Persamaan (2.39) ini menggambarkan TFC dengan Formulasi

Cooley-Tukey. Dari persamaan (2.39) diambil :

$$x_1(n_0,j_0) = \sum_{j_1=0}^{1} x_0(j_1,j_0)\ W^{2n_0j_1} \tag{2.40}$$

Perhitungan dari persamaan (2.40) ini akan menghasilkan :

$$\begin{aligned} x_1(0,0) &= x_0(0,0) + x_0(1,0)\ W^0 \\ x_1(0,1) &= x_0(0,1) + x_0(1,1)\ W^0 \\ x_1(1,0) &= x_0(0,0) + x_0(1,0)\ W^2 \\ x_1(1,1) &= x_0(0,1) + x_0(1,1)\ W^2 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Apabila persamaan (2.41) ditulis dalam bentuk matriks didapat :

$$\begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Persamaan (2.42) merupakan persamaan matriks yang telah difaktorisasikan pada persamaan (2.28) dengan indek j ditulis sebagai bilangan biner.

Dengan cara analog, jika ditulis penjumlahan terluar persamaan (2.39) sebagai :

$$x_2(n_0,n_1) = \sum_{j_0=0}^{1} x_1(n_0,j_0)\ W^{(2n_1+n_0)j_0} \tag{2.43}$$

Perhitungan persamaan (2.43) ini akan menghasilkan :

$$\begin{aligned} x_2(0,0) &= x_1(0,0) + x_1(0,1)\ W^0 \\ x_2(0,1) &= x_1(0,0) + x_1(0,1)\ W^2 \\ x_2(1,0) &= x_1(1,0) + x_1(1,1)\ W^1 \\ x_2(1,1) &= x_1(1,0) + x_1(1,1)\ W^3 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Apabila persamaan (2.44) ditulis dalam bentuk matriks didapat :

$$\begin{bmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} \qquad (2.45)$$

Merupakan bentuk matriks yang sama dengan persamaan (2.33), sehingga penjumlahan terluar dari persamaan (2.39) menentukan matriks faktorisasi, sebagai contoh **subbab 2.4.** Dari persamaan (2.39) dan persamaan (2.43) diperoleh :

$$a(n_1,n_0) = x_2(n_0,n_1) \qquad (2.46)$$

Kemudian apabila dikombinasikan antara persamaan (2.40), persamaan (2.43) dan persamaan (2.46) akan diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} x_1(n_0,j_0) &= \sum_{j_1=0}^{1} x_0(j_1,j_0)\, W^{2n_0 j_1} \\ x_2(n_0,n_1) &= \sum_{j_0=0}^{1} x_1(n_0,j_0)\, W^{(2n_1+n_0)j_0} \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

$$a(n_1,n_0) = x_2(n_0,n_1)$$

Himpunan persamaan (2.47) menggambarkan Algoritma TFC dengan Formulasi Cooley-Tukey untuk $N = 2^2 = 4$.

2.4.2 Penurunan TFC Dengan Formulasi Cooley-Tukey Untuk $N = 2^r$

Tinjau kembali persamaan (2.25) untuk $N = 2^r$, maka n dan j dapat digambarkan sebagai bilangan biner yaitu :

$$n = 2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \dots + n_0$$

$$j = 2^{r-1} j_{r-1} + 2^{r-2} j_{r-2} + \dots + j_0 \qquad (2.48)$$

dengan menggunakan persamaan (2.48), persamaan (2.25) dapat ditulis sebagai :

$a(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_0)$

$$= \sum_{j_0=0}^{1} \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{1} x_0(j_{r-1}, j_{r-2}, \ldots, j_0)\, W^{p} \qquad (2.49)$$

dimana

$$p = (2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \ldots + n_0)$$
$$(2^{r-1} j_{r-1} + 2^{r-2} j_{r-2} + \ldots + j_0) \qquad (2.50)$$

karena $W^{a1+a2} = W^{a1} W^{a2}$, maka W^{p} dapat ditulis kembali sebagai :

$$W^{p} = W^{(2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \ldots + n_0)(2^{r-1} j_{r-1})}$$
$$W^{(2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \ldots + n_0)(2^{r-2} j_{r-2})}$$
$$\ldots\ W^{(2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \ldots + n_0)\, j_0} \qquad (2.51)$$

Sekarang pandang bagian pertama dari persamaan (2.51)

$$W^{(2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \ldots + n_0)(2^{r-1} j_{r-1})}$$
$$= \left[W^{(2^{r-1} n_{r-1})(2^{r-1} j_{r-1})}\right] \left[W^{(2^{r-2} n_{r-2})(2^{r-1} j_{r-1})}\right]$$
$$\ldots \left[W^{(2^{1} n_1)(2^{r-1} j_{r-1})}\right] \left[W^{(2^{0} n_0)(2^{r-1} j_{r-1})}\right]$$
$$= \left[W^{2^{r}(2^{r-2} n_{r-1} j_{r-1})}\right] \left[W^{2^{r}(2^{r-3} n_{r-2} j_{r-1})}\right]$$
$$\ldots \left[W^{2^{r}(n_1 j_{r-1})}\right] \left[W^{2^{r-1}(n_0 j_{r-1})}\right] \qquad (2.52)$$

Karena $W^{2^{r}} = W^{N} = e^{-i2\pi N/N} = e^{-i2\pi}$

$$= \cos(2\pi) - i \sin(2\pi) = 1$$

Maka persamaan (2.52) menjadi

$$W^{(2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \ldots + n_0)(2^{r-1} j_{r-1})}$$
$$= W^{2^{r-1}(n_0 j_{r-1})} \qquad (2.53)$$

Dengan cara yang sama, bagian kedua sampai segmen yang terakhir dari persamaan (2.52) dan mengingat sifat periodik dari faktor putaran hingga segmen yang terakhir, maka persamaan (2.49) akan menjadi :

$$a(n_{r-1},\ n_{r-2},\ \dots\ ,\ n_0)$$

$$= \sum_{j_0=0}^{1} \sum_{j_1=0}^{1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{1} x_0(j_{r-1},\ j_{r-2},\ \dots,\ j_0)$$

$$W^{2^{r-1}(n_0\ j_{r-1})}\ W^{(2n_1+\ n_0)2^{r-2}\ j_{r-2}}$$

$$\dots\ W^{(2^{r-1}\ n_{r-1}\ +\ 2^{r-2}\ n_{r-2}\ +\ \dots\ +\ n_0)\ j_0} \qquad (2.54)$$

Membentuk setiap penjumlahan secara terpisah dan memberi nama hasilnya akan diperoleh :

$$x_1(n_0,\ j_{r-2},\ \dots\ ,\ j_0)$$

$$= \sum_{j_{r-1}=0}^{1} x_0(j_{r-1},\ j_{r-2},\ \dots\ ,\ j_0)\ W^{2^{r-1}(n_0\ j_{r-1})}$$

$$x_2(n_0,\ n_1,\ j_{r-3},\ \dots,\ j_0)$$

$$= \sum_{j_{r-2}=0}^{1} x_1(n_0,\ j_{r-2},\ \dots,\ j_0)\ W_N^{(2n_1+\ n_0)(2^{r-2}\ j_{r-2})}$$

$$\vdots \qquad (2.55)$$

$$x_r(n_0,n_1,\ \dots,\ n_{r-1})$$

$$= \sum_{j_0=0}^{1} x_{r-1}(n_0,n_1,\ \dots,\ k_0)$$

$$W^{(2^{r-1}\ n_{r-1}+2^{r-2}\ n_{r-2}+\ \dots+\ n_0)\ j_0}$$

$$a(n_{r-1},\ n_{r-2},\ \dots,\ n_0) = x_r(n_0,\ n_1,\ \dots,\ n_{r-1})$$

Himpunan dari persamaan (2.55) menggambarkan TFC dengan formulasi Cooley-Tukey untuk N adalah pangkat dari dua (*power of two*) atau disebut juga algoritma radix dua.

Tabel Total Operasi Antara TFD Dan TFC

	TFD		TFC	
N	KK	JK	KK	JK
2	4	2	1	2
4	16	12	4	8
8	64	56	12	24
16	256	240	32	64
32	1024	992	80	160
64	4096	4032	192	384
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	N^2	N(N-1)	$N/2 \log_2 N$	$N \log_2 N$

Contoh 2.1.

Fungsi periodik x(j) mempunyai N = 4 dan didefinisikan sebagai berikut :

$$x(j) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } j=4k \\ 1 & \text{untuk } j=4k+1 \text{ dan } j=4k+3 \\ 2 & \text{untuk } j=4k+2 \end{cases}$$

dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

i) Hitung secara langsung TFD dari x(j)

ii) Hitung secara tak langsung (algoritma TFC), TFD dari x(j)

Penyelesaian :

i) $$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\ e^{-2\pi inj/N} = \sum_{j=0}^{3} x(j)\ e^{-2\pi inj/4}$$

$$a(0)=0\ e^{-2\pi i00/4} + 1\ e^{-2\pi i01/4} + 2\ e^{-2\pi i02/4} + 1\ e^{-2\pi i03/4}$$

$$=0 + 1\ e^{0} + 2\ e^{0} + 1\ e^{0} = 4$$

$a(1)=0\ e^{-2\pi i10/4} + 1\ e^{-2\pi i11/4} + 2\ e^{-2\pi i12/4} + 1\ e^{-2\pi i13/4}$

$=0 + 1\ e^{-\pi i/2} + 2\ e^{-\pi i} + 1\ e^{-3\pi i/2}$

$=0 + \cos(\pi/2)-i\ \sin(\pi/2) + 2\ \cos(\pi)-2i\ \sin(\pi) +$

$\cos(3\pi/2)-i\ \sin(3\pi/2)$

$=0 + 0 - i - 2 - 0 + 0 + i = -2$

$a(2)=0\ e^{-2\pi i20/4} + 1\ e^{-2\pi i21/4} + 2\ e^{-2\pi i22/4} + 1\ e^{-2\pi i23/4}$

$=0 + 1\ e^{-\pi i} + 2\ e^{-2\pi i} + 1\ e^{-3\pi i}$

$=0 + \cos(\pi)-i\ \sin(\pi) + 2\ \cos(2\pi)-2i\ \sin(2\pi) + \cos(3\pi)$

$-i\ \sin(3\pi)$

$=0 - 1 - 0 + 2 - 0 + 1 - 0 = 0$

$a(3)=0\ e^{-2\pi i30/4} + 1\ e^{-2\pi i31/4} + 2\ e^{-2\pi i32/4} + 1\ e^{-2\pi i33/4}$

$=0 + 1\ e^{-3\pi i/2} + 2\ e^{-3\pi i} + 1\ e^{-9\pi i/2}$

$=0 + \cos(3\pi/2)-i\ \sin(3\pi/2) + 2\ \cos(3\pi)-2i\ \sin(3\pi) +$

$\cos(9\pi/2)\ -i\ \sin(9\pi/2)$

$=0 + 0 + i - 2 - 0 + 0 - i = -2$

Jadi perhitungan secara langsung TFD dari $x(j)$ yaitu $a(n)$ untuk $N = 4$ diperoleh $a(0)=4$, $a(1)=-2$, $a(2)=0$, $a(3)=-2$.

ii) Untuk metode tak langsung (algoritma TFC), yaitu menghitung persamaan (2.26), dengan jalan menghitung persamaan (2.28) dan persamaan (2.33).

Dimana $x_0(0)=0$, $x_0(1)=1$, $x_0(2)=2$, $x_0(3)=1$

Dari persamaan (2.28) diperoleh :

$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) = 0 + 2 = 2$

$x_1(1) = x_0(1) + W^0 x_0(3) = 1 + 1 = 2$

$x_1(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2) = 0 - 2 = -2$

$x_1(3) = x_0(1) - W^0 x_0(3) = 1 - 1 = 0$

dan dari persamaan (2.33) diperoleh :

$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) = 2 + 2 = 4$

$x_2(1) = x_1(0) - W^0 x_1(1) = 2 - 2 = 0$

$x_2(2) = x_1(2) + W^1 x_1(3) = -2 + 0 = -2$

$x_2(3) = x_1(2) - W^1 x_1(3) = -2 - 0 = -2$

didapat :

$a(0) = x_2(0) = 4$, $a(1) = x_2(2) = -2$,

$a(2) = x_2(1) = 0$, $a(3) = x_2(3) = -2$

Terlihat untuk perhitungan lewat algoritma TFC lebih efisien karena hanya memerlukan 4 perkalian kompleks dan 8 penjumlahan kompleks.

Untuk perhitungan algoritma TFC menggunakan Formulasi Cooey-Tukey, analog dengan cara diatas.