BAB II
KONSEP DASAR

2.1. MATRIKS

Matriks adalah kumpulan unsur-unsur yang disusun menurut baris dan kolom (sehingga berbentuk persegi panjang) dan dibatasi oleh [ ] atau ( ). Dalam tugas akhir ini digunakan batas [ ].

DEFINISI 2.1.1

Matriks berukuran mxn adalah susunan berbentuk empat persegi dari skalar (bilangan real atau kompleks) yang disusun atas m baris dan n kolom yang dinotasikan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} i=1,\ldots\ldots,m \\ j=1,\ldots\ldots,n \end{matrix}$$

DEFINISI 2.1.2

Jika $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ dan $B_{nxp} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$, maka perkalian matriks **AB** adalah suatu matriks $C_{mxp} = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$, dengan

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{t=1}^{p} a_{it}b_{tj}$$

untuk setiap $i=1,2,\ldots\ldots,m$ dan $j=1,2,\ldots\ldots,n$.

DEFINISI 2.1.3

Jika $A_{mxn} = \left[a_{ij}\right]$ dan $B_{mxn} = \left[b_{ij}\right]$, maka penjumlahan matriks A+B adalah suatu matriks $C_{mxn} = \left[c_{ij}\right]$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,untuk setiap $i = 1,2,\ldots\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots\ldots,n$.

DEFINISI 2.1.4

Matriks bujursangkar (square matrix) adalah suatu matriks dimana banyaknya baris = banyaknya kolom.

DEFINISI 2.1.5

A' atau (A^T) disebut Transpose suatu matriks dari matriks A *apabila* setiap elemen baris ke-i pada matriks A menjadi kolom ke-i pada A' dan sebaliknya, maka $A = \left(a_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) = A'$.

2.2. SISTEM PERSAMAAN LINIER

Bentuk umum dari Sistem Persamaan Linier adalah :

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

dengan :

a_{ij} = skalar dan merupakan koefisien persamaan tersebut

b_i = skalar dan merupakan konstanta persamaan tersebut.

DEFINISI 2.2.1

Solusi atau jawab dari persamaan adalah sekumpulan harga $x_1=k_1$, $x_2=k_2,\ldots,x_n=k_n$ yang memenuhi sistem persamaan :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots\ldots+a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots\ldots+a_{2n}k_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\ldots\ldots+a_{mn}k_n = b_m \end{array}\right\} \quad (2)$$

Susunan Persamaan Linier, terdiri dari :

1. Susunan Persamaan Linier Homogen.

   Bentuk umum :

   $$AX = B\ ,\quad B=0. \quad (3)$$

   Bentuk ini selalu mempunyai jawab/solusi, dengan 2 macam bentuk yang terdiri dari :

   - jawab nol (Trivial), yaitu $r=n$.
   - jawab non trivial, yaitu $r<n$.

2. Susunan Persamaan Linier Non Homogen

   Bentuk umum :

   $$AX = B\ ,\quad B\neq 0\ . \quad (4)$$

Bentuk ini mempunyai 2 macam jawab/solusi, yaitu :

- Jika $r(a) \neq r(A,B)$, maka persamaan tersebut tidak punya jawab/solusi.
- Jika $r(A)=r(A,B)$, maka persamaan tersebut punya jawab/solusi yang terdiri dari 2 macam, yaitu :
  * jika $r=n$, maka memiliki jawab tunggal.
  * jika $r<n$, maka memiliki jawab banyak.

2.3. PROGRAM LINIER

Program Linier merupakan kelompok teknis analisis kuantitatif dari sebagian masalah riset operasi.

Untuk menyelesaikan masalah program linier dapat digunakan metode-metode berikut :

2.3.1. *Metode Grafis*

Metode ini digunakan untuk masalah program linier yang memiliki 2 atau 3 peubah.

Algoritmanya adalah :

* Mengubah masalah asli menjadi masalah program linier
* Melukis daerah penyelesaian ⟶ mencari sumbu-sumbu koordinat
* Menghitung nilai-nilai berikut :
  fungsi sasaran,optimal,peubah opttimal
* Mencari jawaban

2.3.2. *Metode Simplex*

Merupakan penyelesaian basis yang melangkah dari penyelesaian basis yang satu ke penyelesaian basis yang lain sambil mengoptimalkan nilai fungsi sasaran.

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah :

1. Soal yang ada diubah ke bentuk kanonik, yaitu dari bentuk pertidaksamaan diubah ke bentuk persamaan dengan menambah atau mengurangi dengan peubah slack $\{s_k\}$.
   Cos koefisien pada peubah slack = 0.
2. Penelitian terhadap ada atau tidaknya matriks identitas pada matriks A.
   a. Jika tidak ada matriks identitas maka ditambahkan peubah semu $\{v_k\}$ secukupnya sehingga timbul matriks identitas.
      Cos oefisien untuk peubah semu pada fungsi sasaran = -M untuk kasus maximal dan M untuk kasus minimal. (M merupakan bilangan positip yang besar).
   b. Jika terdapat matriks identitas, maka dapat disusun tabel Simplex dengan bentuk sebagai berikut :

	c_j		b_i	R_i
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i$ x_j			
		A		
	z_j			
	$z_j - c_j$			

Baris c_j diisi dengan cos koefisien

Baris x_j diisi dengan nama-nama peubah

Kolom $\bar{x}_i$ diisi dengan nama-nama peubah pengimbang basis yaitu nama-nama peubah pembentuk matriks identitas.

Kolom $\bar{c}_i$ diisi dengan cos koefisien peubah basis yang sesuai.

Baris z_j diisi dengan $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\bar{c}_i$.

3. Diadakan penelitian terhadap nilai $z_j - c_j$

   Proses dihentikan jika $z_j - c_j \geq 0$ untuk kasus maximal atau jika $z_j - c_j < 0$ untuk kasus minimal.

   a. Jika syarat tersebut tidak dipenuhi, maka diadakan langkah menyusun tabel baru.

      1. Menentukan kolom kunci

         Untuk kasus maximal ditentukan kolom ke-k sedemikian hingga $z_k - c_k$ terkecil, sedang untuk kasus minimal ditentukan kolom ke-k sedemikian hingga $z_k - c_k$ terbesar.

2. Diadakan pengamatan pada kolom ke-k.

   Jika semua $a_{ik} \le 0$, maka penyelesaiannya unbounded.

   Jika terdapat $a_{ik} > 0$, proses dapat dilanjutkan.

3. Untuk $a_{ik} > 0$, dihitung kolom R_i.

$$R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

   Selanjutnya pilih yang terkecil, sebut R_b

   Dan baris ke-b dinamakan baris kunci.

4. Menyusun tabel baru sebagai berikut :

   a_{bk} disebut elemen kunci.

   $\bar{x}_b$ diganti x_k

   $\bar{c}_b$ diganti c_k

$$\text{Baris b baru} = \frac{\text{baris b lama}}{a_{bk}}$$

   Untuk $i \ne b$, maka :

   Baris i baru = baris i lama − (a_{ik}-baris b baru)

   Kemudian proses diulang untuk meneliti nilai $z_j - c_j$.

b. Diadakan penelitian terhadap υ_k.

   Jika terdapat υ_k positip maka soal asli tidak fisibel.

Jika tidak terdapat v_k positip, akan diperoleh penyelesaian optimal.

TEOREMA 2.1

Jika ada penyelesaian fisibel maka penyelesaian fisibel tersebut merupakan penyelesaian fisibel basis.

Bukti

Misal $X = x_1, x_2, \ldots, x_m$ suatu penyelesaian fisibel yang memiliki p buah peubah positip, maka tentu $p \leq m$.

Jika peubah-peubah positip dikumpulkan dimuka, maka $X = x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots, 0$.

Penyelesaian X diatas merupakan penyelesaian fisibel, jadi memenuhi $x \geq 0$ (4)

dan $AX = B$. (5)

Penyajian secara vektoris karena memenuhi (4) adalah :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = B \quad . \qquad (6)$$

Diadakan pengamatan terhadap A_j yang merupakan kolom ke-j pada matriks A.

I. A_j independent linier.

Kemungkinan hubungan antara p dan m sebagai berikut :

- Jika p=m, pasti ada penyelesaian fisibel basis.

- Jika $p<m$, pasti dapat ditemukan $m-p$ vektor lainnya yang bersama-sama dengan p vektor yang sudah ada akan menyusun basis dalam ruang dimensi n : E^n.

  Ini berarti diperoleh penyelesaian fisibel basis yang merosot, sebab $m-p$ peubah bernilai nol.
- Jika $p>m$, tidak mungkin.

II. A_j dependent linier

Jika A_j dependent linier, dapat ditemukan salah satu elemen a_j sedemikian hingga $\sum_{j=1}^{p} a_j A_j = 0$, sehingga untuk membuktikan teorema ini harus ditunjukkan bagaimana cara memilih vektor-vektor A_j sedemikian hingga B dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari mereka, tetapi dengan koefisien tak negatif.

Di dalam $\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = B$ dengan $x_j > 0$, beberapa x_j dapat dijadikan nol dengan melakukan penggantian basis.

Andaikan A_r masuk menggantikaan basis, maka

$$A_r = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{p} \frac{a_j}{a_r} A_j \qquad (7)$$

Dengan demikian persamaannya akan berubah yaitu dari: $\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = B \longrightarrow$ menjadi

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{p} \left(x_j - x_r \frac{a_j}{a_r} \right) A_j = B \qquad (8)$$

Supaya peubah baru tidak negatif, maka A_j dikalikan dengan $x_j - x_r \frac{a_j}{a_r} \geq 0$.

Selanjutnya, jika $A_j = 0$ maka pengali dari A_j adalah x_j yang positip, berarti syarat tak negatif terpenuhi.

Jika $A_j > 0$, berarti $\frac{x_j}{a_j} - \frac{x_r}{a_r} \geq 0$.

Jika $A_j < 0$, maka harus $\frac{x_j}{a_j} - \frac{x_r}{a_r} \leq 0$.

Dengan demikian, untuk menentukan r akan digunakan pedoman berikut:

$$\text{Pilih} \quad \frac{x_r}{a_r} = \min_j \left\{ \frac{x_j}{a_j} \;,\; a_j > 0 \right\} \qquad (9)$$

Dengan jalan demikian $x_r = 0$, sehingga B dapat disajikan kombinasi linier dari p-1 buah a_j dengan koefisien positip. Proses diulang terus menerus, sehingga vektor-vektor koefisien akan independent.

2.4. GAME/PERMAINAN

2.4.1. PERMAINAN 2 ORANG

Permainan 2 orang dapat dibedakan menjadi 2 jenis, yaitu :

a. **Permainan Jumlah Nol**

Suatu permainan dengan jumlah perolehan kedua belah pihak sama dengan nol.

Hal ini berarti jumlah perolehan yang diterima oleh pihak yang menang sama dengan jumlah perolehan yang dibayarkan oleh pihak yang kalah.

Dalam hal ini, kemenangan pihak yang satu merupakan kekalahan/kehilangan pihak lainnya.

b. **Permainan Jumlah Tidak Nol**

Suatu permainan dengan jumlah perolehan masing-masing pihak pada akhir permainan tidak sama dengan nol.

Dalam permainan berjumllah tidak nol ini, para pemain tidak sepenuhnya bermusuhan satu sama lain karena pemain yang kalah tidak menderita kerugian (keuntungan = 0).

2.4.2. STRATEGI PERMAINAN

Strategi Permainan adalah rangkaian kegiatan menyeluruh dari salah satu pihak sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pihak lain yang menjadi lawannya.

Permainan dengan Strategi Murni adalah permainan dengan posisi terbaiknya yang dicapai dengan memilih satu strategi saja bagi setiap pihak.

Strategi Campuran adalah strategi dimana ada lebih dari satu strategi yang harus dipilih.

Strategi Optimal adalah rangkaian kegiatan yang menyeluruh yang menyebabkan salah satu pihak yang bermain berada dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan lawan-lawannya.

Harga Permainan adalah harga yang diperoleh pihak I sehingga pihak I harus memaksimalkan kemenangan dan pihak II harus meminimalkan kekalahan atau sebaliknya.

Secara umum, untuk permainan dimana pihak I mempunyai m strategi murni, strategi campuran x dapat diwakili dengan m-tuple $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dimana x_i = peluang menggunakan strategi ke-i,

$$x_i \geq 0 \ , \ i=1,2,\ldots,m \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Demikian pula untuk permainan dimana pihak II mempunyai n strategi murni, strategi campuran y dapat diwakili dengan n-tuple $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

dimana y_j = peluang menggunakan strategi ke-j,

$x_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,n$ dan $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$,

maka perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah :

$$xAy^T = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j \qquad (10)$$

dengan $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

dimana a_{ij} = elemen-elemen matriks.

2.4.3. KRITERIA MAXIMIN dan MINIMAX

Untuk mencapai strategi optimal terlebih dahulu digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut :

1. Setiap pihak mempunyai kepandaian yang sama.
2. Setiap pihak telah mengetahui strategi dari pihak lain.
3. Setiap pihak telah mengetahui perolehan pihaknya dan mengetahui pula kehilangan pihak lain.
4. Setiap pihak harus memilih strategi.

Kriteria Maximin

Pihak I akan menentukan nilai minimum untuk setiap baris pada matriks perolehan, selanjutnya menentukan nilai tertinggi diantara nilai-nilai minimum tersebut

atau dengan kata lain :

Pihak I memilih yang terbaik diantara kemungkinan-kemungkinan terburuk, maka :

$$MAXIMIN = a_o = \max_i \left\{ \min_j \left[a_{ij} \right] \right\} \quad (11)$$

i=1,2,.....,m dan j=1,2,.....,m

Kriteria Minimax

Sebaliknya, pihak II menentukan nilai maximum untuk tiap-tiap kolom pada matrix perolehan, selanjutnya menentukan nilai terendah diantara nilai-nilai minimum tersebut

atau dengan kata lain :

Pihak II memilih kerugian terkecil diantara sejumlah derita terbesar, maka :

$$MINIMAX = a^o = \min_j \left\{ \max_i \left[a_{ij} \right] \right\} \quad (12)$$

i=1,2,.....,m dan j=1,2,.....,n

2.4.4. TITIK KESETIMBANGAN

Titik Kesetimbangan adalah titik yang menyatakan setiap pemain akan memperoleh keuntungan yang maximal dengan menggunakan strategi yang optimal pula.

DEFINISI 2.4.1

Suatu pasangan strategi optimal pihak I dan pihak II $x^{*} \in X$, $y^{*} \in Y$ dinyatakan $\left(x^{*}, y^{*}\right)$ adalah pasangan kesetimbangan *jika hanya jika* untuk setiap $x \in X$, $y \in Y$ berlaku :

$$xAy^{*} \le x^{*}Ay^{*} \le x^{*}Ay \quad (13)$$

Jika pihak I menggunakan strategi x dan pihak II menggunakan strategi y^{*}, maka keuntungan pihak I adalah xAy^{*}. Sebaliknya jika pihak II menggunakan strategi X^{*} dan pihak I menggunakan strategi y, maka keuntungan pihak II adalah $x^{*}Ay$ sehingga berlaku :

i. $xAy^{*} \le x^{*}Ay^{*}$ (14)

ii. $x^{*}Ay \le x^{*}Ay^{*}$ (15)

2.4.5. REDUKSI KE BENTUK KANONIK

Suatu cara alternatif dari reduksi program linier ke bentuk kanonikal dimulai dengan menambahkan suatu konstanta a ke setiap elemen a_{ij} sedemikian hingga tanda dari harga $a^{*}+a$ dari permainan dengan perolehan $a_{ij}+a$ dapat membuat semua $a_{ij}+a > 0$.

Posisi dari pivot diberikan oleh persamaan berikut :

- Jika $m \le n$, maka $a_{kl} = a^{o} = \min_j \max_i a_{ij}$
- Jika $m > n$, maka $a_{kl} = a_{o} = \max_i \min_j a_{ij}$

dan tanda-tandanya selalu bersepakat dengan $a^{*} + a$ dan berlawanan dengan $b_i = c_j = \pm 1$

Adapun cara-caranya adalah sebagai berikut :

a). Dimulai dengan menghitung :

- $a^{o} = \min_j \max_i a_{ij}$, jika $m \le n$
- $a_{o} = \max_i \min_j a_{ij}$, jika $m > n$

Jika a^{o} adalah elemen terkecil pada baris atau a_{o} adalah elemen terbesar pada kolom, suatu titik saddle/titik pelana telah ditemukan. Proses dapat dihentikan.

b). Tentukan a=0 jika A memiliki suatu baris positip atau kolom negatip. Suatu kondisi dimana a^{o} dan a_{o} memiliki tanda yang sama, sehingga a^{*} juga memiliki tanda tersebut.

Pada kasus ini,dapat dilakukan pivot pada a^{o} jika $m \le n$, pada a_{o} jika $m > n$, dan pada $\min\{|a^{o}|, |a_{o}|\}$ jika $m = n$.

c). Prosedur umumnya adalah sebagai berikut :

c.1. Jika $m \le n$, ambil $a = -1 - a^{o}$, $b_i = c_j = 1$ dan pivot pada $a^{o} + a = -1$ pada posisi dari a^{o}. Tabelnya berubah dari fisibel dual ke fisibel primal.

c.2. jika $m>n$, ambil $a = 1-a$, $b_o=c_{\bar{i}}-1_j$ dan pivot pada $a+a=1$ pada posisi dari a_o. Tabelnya berubah dari fisibel primal ke fisibel dual.

2.5. BIMATRIX GAME dan TITIK EQUILIBRIUM

DEFINISI 2.5.1

Bimatrix game adalah game dengan matriks perolehan 2 matriks mxn $A = \left[a_{ij}\right]$ dan $B = \left[b_{ij}\right]$ yang masing-masing merupakan matriks perolehan pihak I dan pihak II.

Dengan $i = 1, \ldots\ldots, m$ dan $j = 1, \ldots\ldots, n$.

Contoh 2.1.

Dua orang menawar barang yang berupa seperangkat komputer yang terdiri dari keyboard, monitor dan CPU. Masing-masing pihak mengajukan penawaran sebanyak 2 kali untuk tiap jenis barang.

Pada penawaran pertama, pihak I menawar sebesar Rp.175.000 untuk keyboard, Rp.400.000 untuk monitor dan Rp.400.000 untuk CPU. Sedangkan pihak II menawar sebesar Rp.75.000 untuk keyboard, Rp.150.000 untuk monitor dan Rp.450.000 untuk CPU.

Pada penawaran kedua, pihak I menawar sebesar Rp.75.000 untuk keyboard, Rp.250.000 untuk monitor dan Rp.550.000 untuk CPU. Sedang pihak II menawar sebesar Rp.225.000 untuk keyboard, Rp.225.000 untuk monitor dan Rp.350.000 untuk CPU.

Bila diberikan harga standar untuk masing-masing jenis barang sebagai berikut :

1. Keyboard seharga Rp. 200.000

2. Monitor seharga Rp.300.000

3. CPU seharga Rp.500.000

bisa dibuat tabel sebagai berikut :

- Untuk Pihak I

Penawaran I

	standar	penawaran	untung	rugi	A_1
keyboard	200.000	175.000	25.000	——	1
monitor	300.000	400.000	——	100.000	-4
CPU	500.000	400.000	100.000	——	4

A_1 = elemen baris ke-1 matriks A (dalam skala 25.000)

Penawaran II

	standar	penawaran	untung	rugi	A_2
keyboard	200.000	75.000	125.000	——	5
monitor	300.000	250.000	50.000	——	2
CPU	500.000	550.000	——	50.000	-2

A_2 = elemen baris ke-2 matriks A (dalam skala 25.000)

- Untuk Pihak II

Penawaran I

	standar	penawaran	untung	rugi	B_1
keyboard	200.000	75.000	125.000	——	5
monitor	300.000	150.000	150.000	——	6
CPU	500.000	450.000	50.000	——	2

B_1 = elemen baris ke-1 matriks B (dalam skala 25.000)

Penawaran II

	standar	penawaran	untung	rugi	B2
keyboard	200.000	225.000	———	25.000	-1
monitor	300.000	225.000	75.000	———	3
CPU	500.000	350.000	150.000	———	6

B2 = elemen baris ke-2 matriks B (dalam skala 25.000)

Sehingga didapat :

Matriks perolehan pihak I adalah $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Matriks perolehan pihak II adalah $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Maka bisa dibuat suatu bimatrix game sebagai berikut :

Pihak II

	strategi	y_1	y_2	y_3
Pihak I	x_1	(1, 5)	(-4, 6)	(4, 2)
	x_2	(5,-1)	(2, 3)	(-2, 6)

DEFINISI 2.5.2

Perolehan untuk pihak I dan pihak II masing-masing adalah :

$$\alpha = XAY^T \quad \text{dan} \quad \beta = XBY^T$$

dan selanjutnya titik (α,β) disebut **Titik Fisibel**, dengan :

$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$ adalah strategi pihak I

$Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ adalah strategi pihak II

$A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks perolehan pihak I dan pihak II.

Sebagai contoh, sesuai dengan matriks perolehan dalam contoh 2.1.

Menurut definisi 2.5.2 ,

jika pihak I memilih strategi murni $X = (x_1, x_2) = (0,1)$

dan pihak II memilih strategi murni $Y = (y_1, y_2, y_3)$

$= (0,1,0)$,

maka :

Pihak I mendapat keuntungan (perolehan)

$$\alpha = XAY^T = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [5 \;\; 2 \;\; -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \text{ unit.}$$

$$\beta = XBY^T = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [-1 \;\; 3 \;\; 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

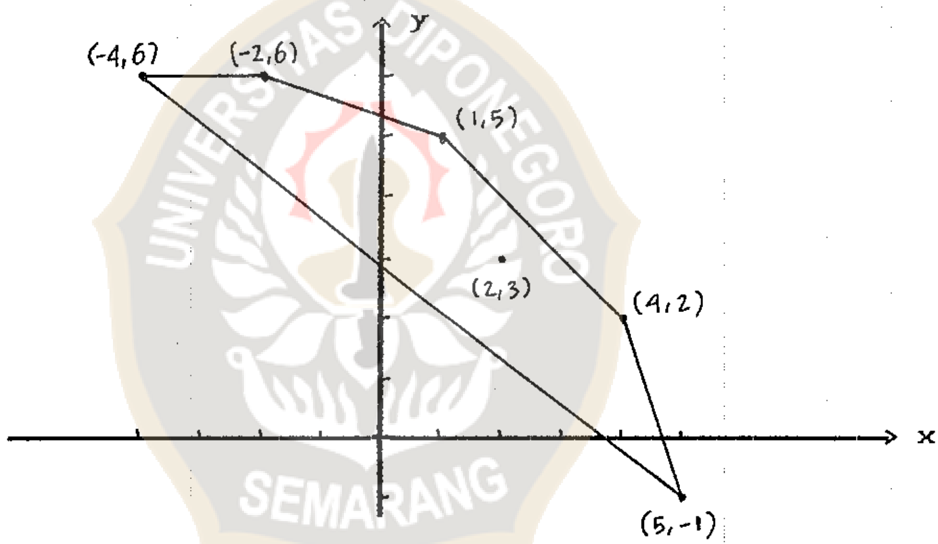
$$= 3 \text{ unit.}$$

Jadi, titik (2,3) merupakan titik feasible untuk game tersebut.

DEFINISI 2.5.3

Daerah feasible S untuk bimatrix game (A, B) adalah himpunan yang beranggotakan semua titik feasible yang juga merupakan bidang tertutup yang dibatasi oleh ruas garis-ruas garis terluar yang menghubungkan 2 titik perolehan (α,β).

Sebagai contoh, daerah feasible untuk matriks permainan diatas adalah:



DEFINISI 2.5.4

Sepasang strategi optimal $\left(X^*, Y^*\right)$ masing-masing untuk pihak I dan pihak II adalah suatu strategi dimana masing-masing pihak tidak dapat memperbesar perolehannya atau memperkecil perolehan lawan atau merubah strateginya.

Bimatrix game juga memiliki titik yang disebut **Titik Equilibrium** yang didefinisikan sebagai berikut :

DEFINISI 2.5.5

Titik equilibrium didefinisikan sebagai suatu nilai optimal yang diperoleh dengan menggunakan strategi yang optimal pula sedemikian hingga jika ada salah satu pihak yang merubah strateginya maka pihak tersebut tidak akan mendapatkan keuntungan/perolehan yang lebih besar.

AKIBAT 2.5.1

Titik equilibrium untuk 2 pihak dengan strategi campuran x^* dan y^* didefinisikan sebagai :

$\alpha^* = x^*Ay^* \geq xAy^*$ untuk semua strategi x

$\beta^* = x^*By^* \geq x^*By$ untuk semua strategi y

AKIBAT 2.5.2

Titik equilibrium untuk strategi murni k dan l adalah :

$$a_{kl} = \max_i a_{il} \qquad\qquad b_{kl} = \max_j b_{kj}$$

Akibat 2.5.1 adalah berhubungan dengan akibat 2.5.2., karena itu a_{kl} haruslah nilai yang terbesar pada kolom l dari matriks **A** dan b_{kl} haruslah nilai yang terbesar pula pada baris k dari matriks **B**.

Untuk contohnya, diberikan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} (52,50) & (44,44) & (44,41) \\ (42,42) & (46,49) & (39,43) \end{bmatrix}$$

Dengan matriks perolehan untuk pihak I adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 52 & 44 & 44 \\ 42 & 46 & 39 \end{bmatrix}$$

dan matriks perolehan untuk pihak II adalah :

$$B = \begin{bmatrix} 50 & 44 & 41 \\ 42 & 49 & 43 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan akibat 2.5.2, maka titik equilibrium untuk contoh diatas adalah $k=l=1$, karena masing-masing pihak memiliki strategi pertama yang merupakan nilai optimal. Sedangkan $k=l=2$ merupakan titik equilibrium yang lain yang bisa digunakan.