BAB II

TEORI DASAR GRAF UNTUK JARINGAN TELEKOMUNIKASI

2.1. Pengertian Dasar

Secara umum orang mengenal graf atau yang disebut gambar sebagai gabungan titik-titik dan garis-garis atau sebagai gambar yang terdiri dari titik-titik yang disambung oleh garis. Berikut ini akan disajikan definisi graf menurut matematika.

Definisi 1.

Konsep graf terdiri dari data dan aksioma

Data : Suatu graf terdiri dari

a. Himpunan $V = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots \}$

Yaitu unsur-unsur yang disebut simpul (vertex)

b. Himpunan $X = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots \}$

Yaitu unsur-unsur yang disebut busur (edge)

c. Setiap busur terletak diantara dua simpul

Simpul disajikan sebagai noktah atau titik.

Busur disajikan sebagai garis lurus atau lengkung.

Aksioma :

a. Himpunan V adalah himpunan berhingga yang tidak kosong.

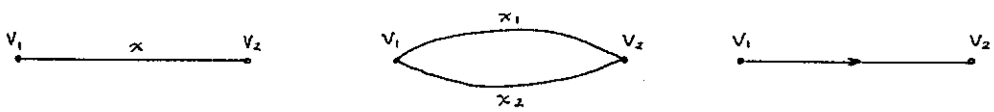
b. Himpunan X adalah himpunan berhingga yang boleh kosong.

Sebenarnya ada 2 macam graf menurut arahnya yaitu graf berarah dan graf tidak berarah. Dalam jaringan telekomunikasi nanti yang dipakai hanya graf tidak berarah sederhana (simple undirected graph)

Definisi 2.

Graf tak berarah sederhana adalah graf yang memenuhi :

a. Tiap pasang simpul hanya dihubungkan dengan satu busur saja



Gb. 2.1 (i) (ii) (iii)

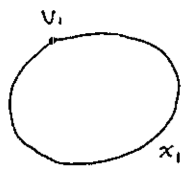
Gb. 2.1 (i) adalah graf tak berarah sederhana.

Gb. 2.1 (ii) adalah graf dengan garis ganda.

Gb. 2.1 (iii) adalah graf berarah.

b. Tidak ada gelung (loop).

Yang dimaksud gelung adalah suatu busur yang menghubungkan simpul dengan dirinya sendiri.

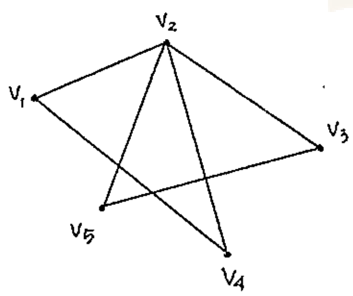


Gb. 2.2 Gelung x_1 pada simpul v_1

Definisi 3.

Keberbatasan (Adjacency)

Dua buah simpul v_1 dan v_2 dikatakan berbatasan apabila terdapat sebuah busur yang menghubungkan keduanya.



Dari Gb. 2.3 dapat dilihat

v_1 berbatasan dengan v_2

v_1 tidak berbatasan dengan v_2

Gb. 2.3

Definisi 4

Derajat (Valency atau Degree) :

adalah banyaknya busur yang menempel di v

Pada Gb. 2.3 deg $(v_2) = 4$

deg $(v_5) = 2$

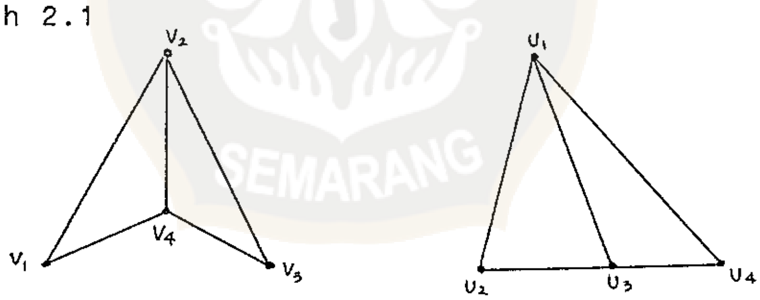
Definisi 5

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik apabila

a. Banyaknya simpul dalam G_1 dan G_2 sama banyak.

b. Dapat dibuat korespondensi satu-satu antara simpul di G_1 dan G_2 dengan tetap mempertahankan keberbatasannya

Contoh 2.1



Gb.2.4 G_1 G_2

G_1 dan G_2 isomorfik karena

ada 4 simpul masing-masing di G_1 dan G_2

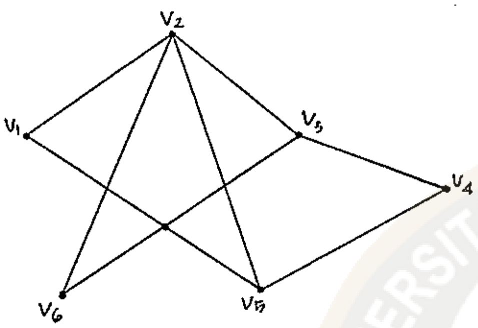
dapat dibuat korespondensi satu-satu dengan tidak mengabaikan keberbatasannya

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \\ u_2 & u_1 & u_4 & u_3 \end{array}$$

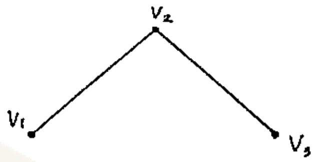
Definisi 6

Sub. graf adalah bagian dari graf G dimana untuk semua simpul yang digambar dan busurnya ada didalam graf G.

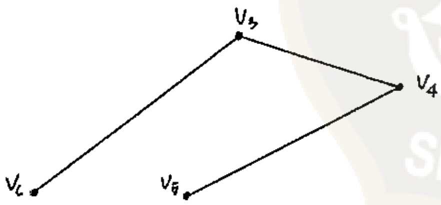
Contoh 2.2



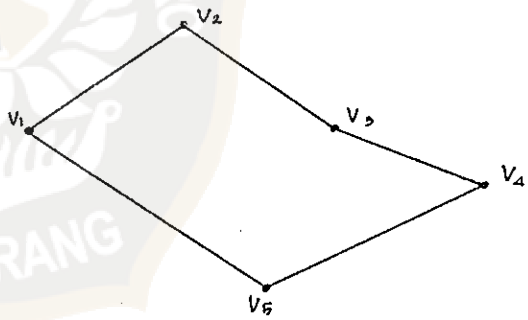
G (i)



G_1 (ii)



G_2 (iii)



G_4 (iv)

Gb. 2.5

G adalah graf induknya

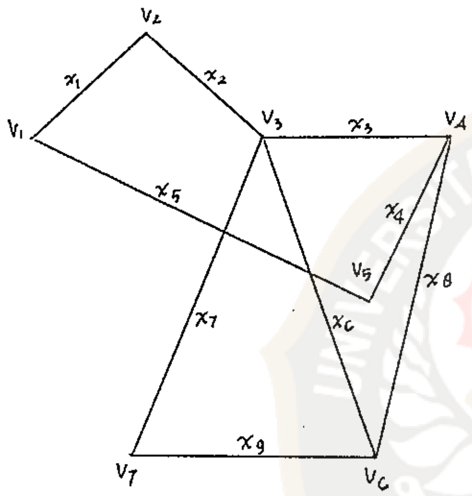
G_1, G_2, adalah sub graf G

G_3 bukan sub graf dan akan menjadi sub graf bila V_2 dan V_5 dihubungkan dengan satu busur

Definisi 7

Jalan (Walk) adalah deretan bergantian simpul dan busur, dimulai dan diakhiri oleh simpul, dengan simpul dan busur boleh diulang

Contoh 2.3



Gb. 2.6

Pada Gambar disamping yang merupakan salah satu Walk yang bisa dilihat adalah

$v_2\ x_2\ v_3\ x_3\ v_4\ x_3\ v_3\ x_6\ v_6$

atau disajikan sebagai

$v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6$

terdapat ulangan busur dan simpul yaitu pada

$v_3\ v_4\ v_3$

Definisi 8

Selusur (Trail) adalah Walk yang busurnya tidak boleh diulang akan tetapi untuk simpul masih boleh diulang. Untuk Gb. 2.6 yang merupakan selusur, salah satunya adalah $v_2\ x_2\ v_3\ x_7\ v_7\ x_9\ v_6\ x_6\ v_3\ x_3\ v_4$ atau $v_2\ v_3\ v_7\ v_6\ v_3\ v_4$ terdapat ulangan simpul v_3 tetapi tidak ada busur yang diulang.

Definisi 9

Lintasan (Path) adalah selusur yang simpulnya tidak boleh diulang, kecuali untuk lintasan tertutup yang diakhiri oleh simpul awal. Atau bisa dikatakan lintasan adalah walk yang busur dan simpulnya saling asing.

Untuk Gb. 2.6 yang merupakan lintasan adalah $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ $v_1\ v_3\ v_6\ v_4$

Definisi 10

Cycle adalah lintasan tertutup atau lintasan yang diakhiri dengan simpul awal untuk Gb. 2.6 yang disebut cycle adalah $v_3\ v_6\ v_7\ v_3$, $v_4\ v_3\ v_7\ v_6\ v_4$,...

Definisi 11

Jarak (distance) antara simpul u dan v dalam graf G adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua simpul tersebut dan dilambangkan sebagai d (u,v).

Yang dimaksud dengan panjang suatu jalan, selusur atau lintasan adalah banyaknya busur yang tampak pada jalan, selusur atau lintasan tersebut.

Jarak pada graf G mempunyai sifat :

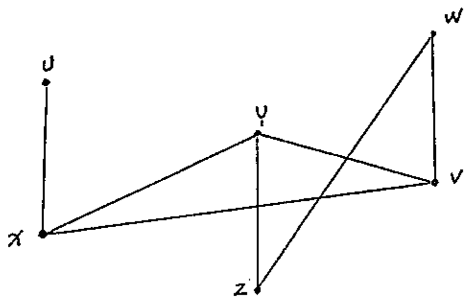
a. $d\ (x,v) \geq 0$

   $d\ (x,v) = 0$ bhb $x=v$

b. $d\ (x,v) = d\ (v,x)$

c. $d\ (v,y) + d\ (x,y) \geq d\ (x,v)$

Contoh 2.4



untuk Gb. 2.7 d (u,v) = 2

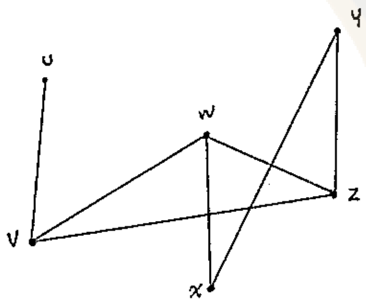
d (v,w) = 3

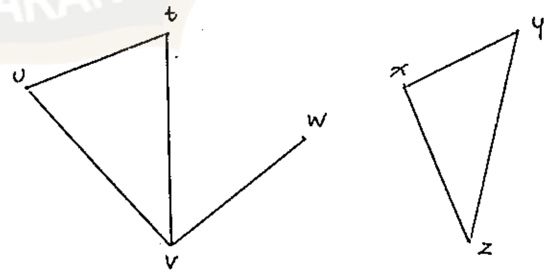
Gb. 2.7

Definisi 12

Sebuah graf dikatakan terhubung bila setiap dua simpul yang berlainan dalam G dihubungkan sekurang-kurangnya satu lintasan (path).

Apabila tidak demikian maka disebut tidak terhubung (disconected graph) jelasnya lihat Gb. 2.8





Gb. 2.8 (i) (ii)

Gb. 2.8 (i) adalah graf terhubung karena walaupun u dan y tidak berbatasan tetapi u dan y dihubung kan dengan lintasan uvwzy

Gb. 2.8 (ii) adalah graf tidak terhubung

2.2 Bentuk - Bentuk Graf

Berikut ini akan dikenalkan macam-macam bentuk graf yang akan dipakai dalam pembicaraan selanjutnya.

2.2.1 Graf Biasa (reguler Graph)

Definisi 13

Graf biasa adalah graf dengan derajat tiap simpulnya sama.

Contoh 2.5

Gb. 2.9 (i) (ii) (iii)

Gb. 2.9 (i) adalah graf biasa berderajat nol

Gb. 2.9 (ii) adalah graf biasa berderajat satu

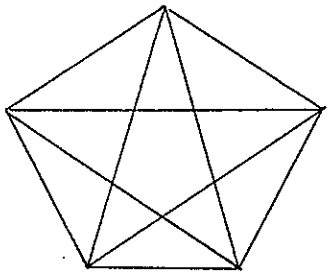
Gb. 2.9 (iii) adalah graf biasa berderajat tiga

2.2.2 Graf Lengkap (Complete Graph)

Definisi 14

Graf lengkap adalah graf dengan tiap simpulnya berbatasan dengan semua simpul lain dalam graf tersebut. Dilambangkan dengan K_n dengan n adalah jumlah simpul dalam graf.

Contoh 2.6



Gb. 2.10 adalah graf lengkap dengan simbol K_5 dimaksudkan sebagai graf lengkap dengan 5 simpul dan berderajat 4,(n−1) tiap simpulnya

Gb. 2.10 Graf lengkap K_5

2.2.3 Graf Bipartit (Bipartite Graph)

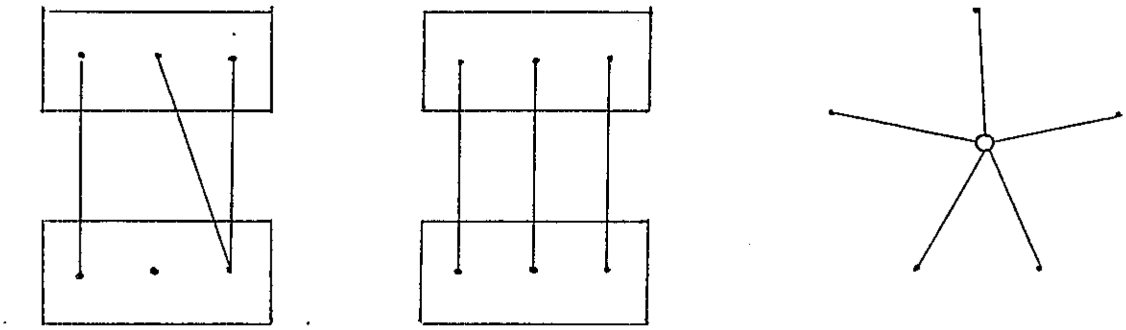
Definisi 15

Graf bipartit adalah graf yang memenuhi :

a. Himpunan simpul dalam G bisa digolongkan menjadi dua golongan yang saling asing.
   Himpuhnan v_1 dan v_2 saling asing ($v_1 \quad v_2 = \emptyset$)

b. Setiap busur dalam G menghubungkan simpul di v_1 dan simpul di v_2 sehingga tidak ada simpul di v_1 yang dihubungkan satu sama lain demikian pula di v_2

Contoh 2.7 Beberapa graf bipartit



(i) (ii) (iii)

Gb.2.11

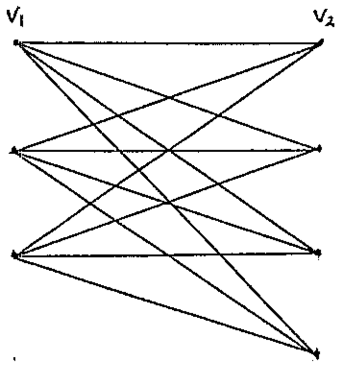
Definisi 16

Graf bipartit lengkap adalah graf bipartit yang tiap simpul di v_1 berbatasan dengan tiap simpul di v_2

Jika v_1 punya m simpul dan v_2 punya simpul n simpul maka busur yang tampak adalah sebanyak m.n.Simpul pada v_1 berderajat sama yaitu n dan tiap simpul pada v_2 berderajat sama yaitu sebesar m.

Graf bipartit lengkap dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dengan m adalah banyaknya simpul di v_1 dan n adalah jumlah simpul di v_2.

Contoh 2.8

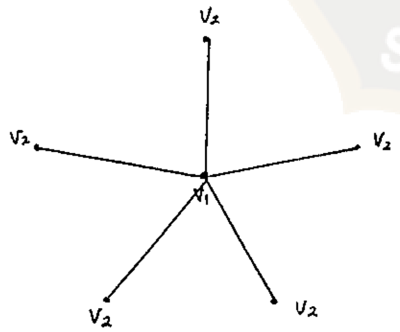


Gb. 2.12 Graf bipartit lengkap $K_{3,4}$

Definisi 17

Graf star adalah graf bipartit lengkap dengan v_1 berisi satu simpul, v_2 punya n simpul dan busur sebanyak n Dilambangkan dengan $K_{1,n}$

Contoh 2.9



Gb. 2.13 Graf star $K_{1,4}$

Definisi 18

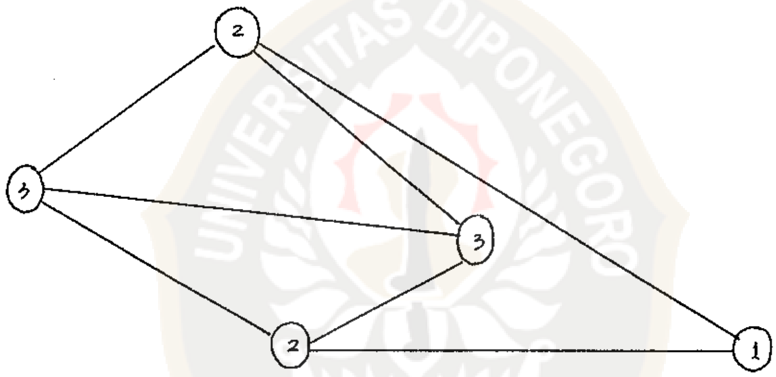
Graf berbobot adalah graf yang diberi bobot pada simpul dan atau pada busurnya.

Jarak antara dua simpul graf berbobot akan dihitung dengan jalan :

a. Mencari lintasan-lintasan yang mungkin antara kedua simpul.

b. Tiap lintasan dihitung jumlah bobot busur yang menyusunnya.

c. Nilai terkecil dari jumlah bobot disebut jarak.



Gb. 2.14 Graf berbobot

2.3. Keterhubungan (Conectivity)

Sebenarnya ada dua macam keterhubungan yang sudah dikenal yaitu keterhubungan simpul atau hanya dikenal sebagai keterhubungan dan keterhubungan busur.

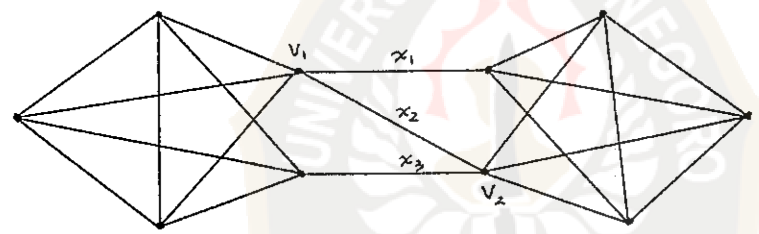
2.3.1 Keterhubungan Simpul

Definisi 19

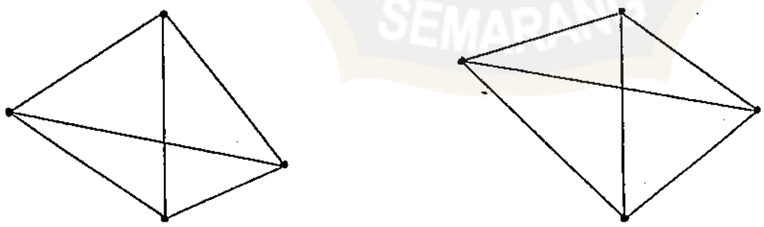
Keterhubungan Simpul adalah jumlah minimum simpul yang harus dihilangkan untuk membuat graf G yang tadinya terhubung menjadi tidak terhubung (disconected) atau trivial (terdiri dari satu simpul).

Keterhubungan ini dilambangkan dengan K = K (G)

Contoh 2.10 Keterhubungan simpul



(i) G



Gb. 2.15 (ii) G

Gambar diatas menunjukan bagaimana Graf G yang tadinya terhubung menjadi tidak terhubung dengan hanya menghilangkan 2 simpul v_1 dan v_2

Jadi nilai keterhubungan G sebesar 2 atau ditulis sebagai K=2

2.3.2 Keterhubungan Busur

Definisi 20

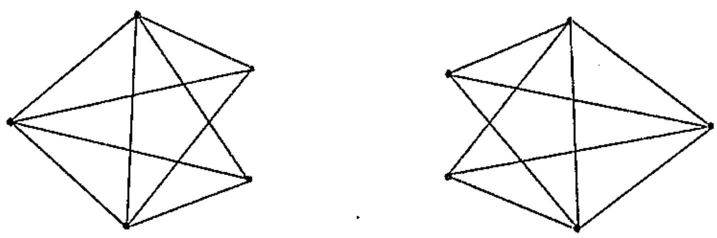
Keterhubungan busur adalah jumlah minimal busur yang dapat dihilangkan untuk membuat graf G yang tadinya terhubung menjad tidak terhubung atau trivial

Nilai keterhubungan ini dilambangkan dengan $\lambda = \lambda(G)$

Contoh 2.11

G pada Gb. 2.15 tadi akan menjadi disconected dengan menghilangkan 3 busurnya.

Jadi nilai keterhubungan G sebesar 3 atau ditulis sebagai $\lambda = 3$



Gb. 2.16

2.4 Penyajian Graf dalam Matrik

Sebelum mengenal penyajian Graf dalam matriks sebaiknya dibicarakan dulu tentang matriks dan perkalian matrik yang akan dipakai dalam pembicaraan selanjutnya.

2.4.1 Matriks

Definisi 21

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Para skalar itu disebut elemen matriks. Ukuran (ordo) matriks dinyatakan sebagai m x n dengan m adalah jumlah baris dan n adalah jumlah kolom.

Secara lengkap ditulis sebagai $A=[a_{ij}]$ artinya a matriks A berelemen a_{ij} dimana i menyatakan baris dan j menyatakan kolom.

Contoh 2.12

Akan disajikan matriks A dengan ukuran 2 x 3 dimana elemen-elemennya adalah :

$$a_{11} = 2,\ a_{12} = 3,\ a_{13} = 4$$

$$a_{21} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{23} = 4$$

maka matriks A disajikan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.4.2 Perkalian Matriks

Pada umumnya matriks tidak komulatif dalam operasi perkalian jadi akan diperhatikan urutan matriknya yang berarti harus dibedakan matriks I dan matriks II

Syarat perkalian matriks

Jumlah kolom matriks I = jumlah baris matriks II

Definisi 22

Pandang $A = [a_{ij}]$ berukuran (pxq) dan $B = [b_{ij}]$ berukuran (qxr). AB adalah matriks $C = [c_{ij}]$ berukuran (pxr) dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj})$ untuk tiap $i = 1, 2, \ldots, p$ dan $j = 1, 2, \ldots, r$

Contoh 2.13

Misal $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3.3 + 2.1 + 2.0 \\ 1.3 + 2.1 + 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

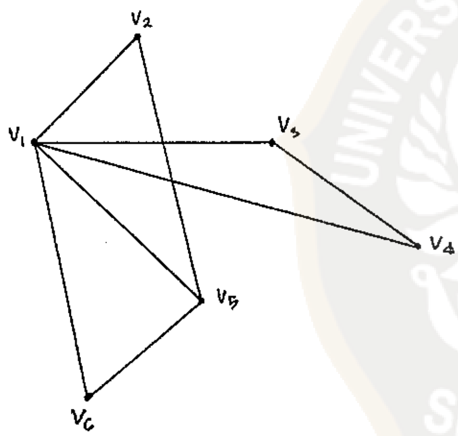
2.4.3 Matrik Keberbatasan (Adjacency Matrik)

Matrik keberbatasan merupakan matrik bujur sangkar A=[aij] dengan n banyaknya simpul pada graf G

Dinyatakan sebagai :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } v_i \text{ berbatasan dengan } v_j \\ 0 & \text{jika } v_i \text{ tidak berbatasan dengan } v_j \end{cases}$$

dengan v_i dan v_j adalah simpul-simpul pada graf G



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

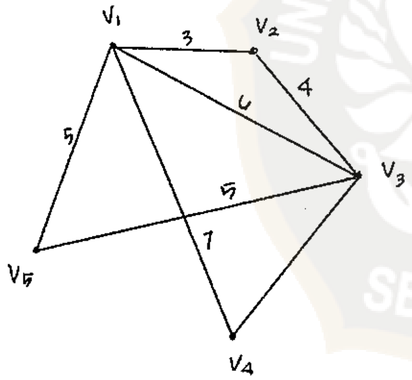
Gb. 2.17

2.4.4 Matrik Jarak (distance matrik)

Matrik jarak dinyatakan sebagai matrik bujur sangkar berorder n dengan n = jumlah simpul.

Dilambangkan sebagai $D = [d_{ij}]$

$$d_{ij} = \begin{cases} d\,(v_i, v_j) & ;\ i,j=1,2,\ldots\ldots n \text{ dan } i=j \\ d\,(v_i, v_j)=0 & ;\ i,j=1,2,\ldots\ldots n \text{ dan } i=j \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 7 \\ 5 & 8 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gb. 2.18