BAB III.

INTEGRAL RIEMANN

Misalkan $\mathscr{B}$ [a,b] adalah suatu himpunan semua fungsi yang berharga riil yang terdefinisi dan terbatas atas interval terbatas dan tertutup [a,b] .

Misal $f \in \mathscr{B}[a,b]$; $M = \sup f(x)$ dan $m = \inf f(x)$ dimana $x \in [a,b]$.

Suatu koleksi titik-titik $P = \{x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ dikatakan suatu PARTISI dari $[a,b]$ jika $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Dan setiap partisi $P = \{x_0 , x_1 , \ldots , x_n]$ membagi $[a,b]$ sampai n-sub interval tertutup $[x_0,x_1]$, $[x_1 , x_2]$, ... , $[x_{n-1},x_n]$
Sedangkan panjang sub-interval yang terbesar disebut MESH dari P dan ditulis $|P|$, dimana $|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots , n\}$
Suatu partisi P dikatakan FINER daripada Q jika $Q \subseteq P$. Jika P dan Q adalah partisi, maka $P \cup Q$ juga suatu partisi yang FINER daripada P dan Q.

Sekarang misal untuk suatu partisi $P = \{x_0 , x_1 , \ldots , x_n\}$ dari $[a,b]$ berlaku $m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}$ dan $M_i =$

$\sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ untuk $i = 1, \ldots, n\}$. Jadi $m \le m_i \le M_i \le M$; $\forall i$

DEFINISI 19.

Jumlahan Bawah (Lower Sum) $S_*(f,P)$ dari korespondensi f untuk partisi P didefinisikan dengan :

$$S_*(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \ \Delta x_i$$

Dan Jumlahan Atas (Upper Sum) $S^*(f,P)$ didefinisikan dengan :

$$S^*(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \ \Delta x_i$$

di mana $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$

Sehingga $S_*(f,P) \le S^*(f,P)$ berlaku untuk setiap partisi P dari $[a,b]$.

DEFINISI 20.

Integral Riemann Bawah (Lower Riemann Integral) f disefinisikan dengan :

$I_*(f) = \sup \{ S_*(f,P)$: P merupakan partisi dari $[a,b] \}$

sedangkan Integral Riemann Atas (Upper Riemann Integral) f didefinisikan dengan :

$I^*(f) = \inf \{ S^*(f,P)$: P merupakan partisi dari $[a,b] \}$.

Dengan demikian $S_*(f,P) \le I_*(f) \le I^*(f) \le$

$S^*(f,Q)$ berlaku untuk setiap partisi P dan Q dari [a,b] .

DEFINISI 21.

Suatu fungsi terbatas $f : [a,b] \longrightarrow R$ dikatakan terintegral Riemann jika $I_*(f) = I^*(f)$, dimana Integral Riemann f ditulis $\int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMA 25. (Riemann)

Suatu fungsi terbatas $f : [a,b] \longrightarrow R$ terintegral Riemann jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ P dari $[a,b] \ni S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$

Bukti :

* Akan dibuktikan jika $f : [a,b] \longrightarrow R$ terintegral Riemann maka $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P dari $[a,b] \ni S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$

Andaikan f terintegral Riemann dan $\varepsilon > 0$.

Misal $I = \int_a^b f(x)\,dx$; maka terdapat 2 partisi P_1 dan P_2 dari [a.b] sedemikian sehingga $I - S_*(f,P_1) < \varepsilon$ dan $S^*(f,P_2) - I < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh :

$$S^*(f,P) - S_*(f,P) \le S^*(f,P_2) - S_*(f,P_1)$$
$$= [\,S^*(f,P_2) - I\,] + [\,I$$

$- S_*(f,P_1)]$

$< \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$

dimana $P = P_1 \cup P_2$

* Sekarang akan dibuktikan jika $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ P$ dari $[a,b] \ni S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$, maka $f : [a,b] \longrightarrow R$ terintegral Riemann.

Misal $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P \ni S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$, maka $0 \le I^*(f) - I_*(f) \le S^*(f,P) - S_*(f,P)$ berlaku $\forall$ P. Dengan demikian diperoleh $0 \le I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$; $\forall\varepsilon > 0$.

Sehingga $I^*(f) - I_*(f) = 0$.

Berarti $I^*(f) = I_*(f)$

Jadi menurut Definisi 21 f terintegral Riemann.

$\therefore$ Terbukti !

Sekarang misalkan $P = \{x_0 , x_1 , \ldots , x_n\}$ suatu partisi dari $[a,b]$. Koleksi titik-titik $T = \{t_0 , t_1 , \ldots , t_n\}$ dikatakan menjadi titik terpilih untuk P jika $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ berlaku untu $i = 1,2 \ldots , n$.

Sehingga dapat ditulis

$$S_f(P,T) = \sum^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$$

TEOREMA 26.

Misal $f : [a,b] \longrightarrow R$ terintegral Riemann dan misal $\{P_n\}$ suatu barisan partisi dari $[a,b]$ sedemikian sehingga $\lim |P_n| = 0$. Maka $\lim S_*(f,P_n) = \lim S^*(f,P_n)$

$$= \int_a^b f(x)\ dx.$$

Dan jika $\forall n$, T_n suatu titik terpilih untuk suatu partisi P_n dimana $\lim |P_n| = 0$, maka

$$\lim S_f(P_n, T_n) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Bukti :

Pilih suatu konstanta $c > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| < c$ terpenuhi $\forall x \in [a,b]$.

Misal $\varepsilon > 0$ dan dengan Teorema 25. maka $\exists$ partisi $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ dari $[a,b] \ni S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$.

Pilih n_o sedemikian sehingga $|P_n| < \varepsilon/(2cm)$ dan $|P_n| < \min\{x_j - x_{j-1};\ j = 1,2,\ldots,m\}$; $\forall\ n \geq n_o$.

Untuk $n \geq n_o$ dimisalkan $P_n = \{t_o, t_1, \ldots, t_k\}$ Tetapkan :

$M_j^P = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$

untuk $j = 1, \ldots, m$

$M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

untuk $i = 1, \ldots, k$

$m_j^P = \inf \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$

untuk $j = 1, \ldots, m$

$m_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

untuk $i = 1, \ldots, k$

maka,

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx - S_*(f,P_n) \le S^*(f,P_n)$$

$$- S_*(f,P_n) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= V + W$$

dimana V adalah jumlahan suku $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ yang mana $[t_{i-1}, t_i]$ terhampar dalam sub-interval partisi P. Dan W adalah jumlahan suku sisanya.

* Untuk V

Misal $V = \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_m$ dimana $\forall\ \Sigma_j$ adalah jumlahan suku $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ untuk $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [x_{j-1}, x_j]$.

Tapi jika $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [x_{j-1}, x_j]$ maka $M_i - m_i \le M_i^P - m_i^P$ dan julahan panjang sub-interval partisi P yang terhampar di $[x_{j-1}, x_j]$ tidak akan melampaui $x_j - x_{j-1}$.

Jadi $\Sigma_j \le (M_j^P - m_j^P)(x_j - x_{j-1})$

sehingga $V \le \sum_{j=1}^{m} (M_j^P - m_j^P)(x_j - x_{j-1})$

$$= S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon .$$

* Untuk W

Misal $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ suatu suku jumlahan W. Karena $|P| < \min\{x_j - x_{j-1}) : j = 1, \ldots, m\}$ maka $\exists\,!\ (1 \le j \le m) \ni$

$x_{j-1} < t_{i-1} < x_j < t_i < x_{j+1}$

Jadi jumlahan W maksimal mempunyai m suku.

Sehingga $(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \le 2c\,|P_n| < 2c\,\dfrac{\varepsilon}{2cm} = \dfrac{\varepsilon}{m}$

Terlihat bahwa $W < m\,(\varepsilon/m) = \varepsilon$.

Jadi $0 \le \int_a^b f(x)\,dx - S_*(f,P_n) \le V + W < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$, $\forall n \ge n_0$.

Yang berarti $\lim S_*(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$

Dengan cara yang sama,

$0 \le S^*(f,P_n) - \int_a^b f(x)\,dx \le V + W < 2\,\varepsilon$; $\forall n \ge n_0$ sehingga $\lim S^*(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$

Jadi $\lim S_f(P_n,T_n) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\therefore$ Terbukti !

Jika suatu fungsi $f:[a,\infty) \longrightarrow R$ dimana $a \in R$ terintegral Riemann atas setiap sub interval tertutup $[a,\infty)$ maka Improper Integral Riemann didefinisikan oleh :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_a^r f(x)\,dx$$

dan limit atas tersebut berada dalam R

Atau dengan kata lain Improper Integral Riemann $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ada.

Oleh karena itu, jika $f : [-\infty, a] \longrightarrow R$ terintegral Riemann atas setiap sub-interval tertutup $(-\infty, a]$, maka

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_r^a f(x)\,dx$$

Jadi jika $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ada maka $\int_b^{\infty} f(x)\,dx$ juga ada $\forall\ b > a$ dan $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$

Berikut ini akan diberikan beberapa teorema yang berkaitan dengan pengaplikasian Integral Lebesgue, yang tentu saja ada relevansinya dengan Integral Riemann (Improper Integral Riemann).

TEOREMA 27.

Andaikan $f : [a,\infty) \longrightarrow R$ terintegral Riemann atas setiap sub-interval tertutup $[a,\infty)$, maka $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ada jika dan hanya jika $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ (tergantung

Bukti :

* Akan dibuktikan bahwa jika $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ada maka

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ (tergantung ε) $\ni \left| \int_s^t f(x)\,dx \right|$

$< \varepsilon$, $\forall$ s,t $\geq$ M.

Andaikan $I = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ada

Pilih $M > 0 \ni\ I - \int_a^r f(x)\,dx| < \varepsilon$ terpenuhi $\forall\ r \geq M$

Jika s,t $\geq$ M, maka

$$\left| \int_s^t f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^t f(x)\,dx - \int_a^s f(x)\,dx \right|$$

$$\leq \left| I - \int_a^t f(x)\,dx \right| + \left| I - \int_a^s f(x)\,dx \right|$$

$$< 2\,\varepsilon$$

* Sekarang akan dibuktikan jika

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ (tergantung ε) $\ni \left| \int_s^t f(x)\,dx \right|$

$< \varepsilon$, $\forall$ s,t $\geq$ M maka $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ada.

Jika $\{a_n\}$ suatu barisan $[\,a, \infty\,) \ni \lim a_n = \infty$ maka

barisan $\{ \int_a^{a_n} f(x)\,dx \}$ merupakan berisan Cauchy.

Jadi, $A = \lim\limits_{a_n \to \infty} \int_a^{a_n} f(x)\,dx$ ada

Sekarang misal $\{b_n\}$ adalah barisan lain dari $[\,a, \infty\,)$

dengan $\lim b_n = \infty$. Tetapkan $B = \lim \int_a^{b_n} f(x)\,dx$.

Karena $|\ A - B\ | \leq \left|\ A - \int_a^{a_n} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx \right|$

$+ \left| B - \int_a^{b_n} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$ terpenuhi $\forall\ \varepsilon > 0$.

Jadi $A = B$ sehingga $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ ada.

$\therefore$ Terbukti

Dari teorema 27. terlihat bahwa pertidaksamaan

$\left| \int_s^t f(x)\, dx \right| \le \int_s^t \left| f(x) \right| dx$ untuk $s < t$.

Sekarang jika suatu fungsi $f : [\, a, \infty\,) \longrightarrow R$ terintegral Riemann atas sub-interval tertutup $[\, a, \infty\,)$ dan $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$, maka $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ juga ada.

Tapi hal tersebut tidak berlaku sebaliknya yaitu terdapat fungsi-fungsi f yang merupakan Improper Integral Riemann $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ ada, namun $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ tidak ada.

Contoh :

Fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $f(0) = 1$ atas $[\, 0, \infty\,)$.

Oleh karena itu $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}\, dx = \dfrac{\pi}{2}$ tapi $\int_0^{\infty} \dfrac{|\sin x|}{x}\, dx$ tidak ada.

Dan juga $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \ge \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{k\pi}$;

; $\forall$ k sehingga :

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \ge \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

dimana $\int_0^{\infty} \dfrac{|\sin x|}{x}\, dx$ tidak ada dalam R.