BAB II

UKURAN LEBESGUE

Bila kita ingin mempelajari teori integrasi tentunya harus memiliki latar belakang konsep dasar tentang analisa riil yang cukup. Diantaranya kita harus mengerti teori himpunan, dasar-dasar bilangan riil, fungsi-fungsi kontinu, ruang topologi, dan lain-lain konsep dasar analisa riil.

Penguasaan materi tersebut akan sangat mendukung dan membantu kita dalam mempelajari teori ukuran antara lain seperti ukuran semiring, ukuran luar, fungsi-fungsi terukur, fungsi sederhana (simple), fungsi Tangga (step), ukuran Lebesgue, dan fungsi Atas.

DEFINISI 1.

Misal $\{X_n\}$ suatu barisan yang terbatas dari R maka limit Superior didefinisikan dengan :

$$\lim \text{Sup } X_n = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} X_k \right)$$

dan limit Inferior $\{X_n\}$ didefinisikan dengan :

$$\lim \text{Inf } X_n = \sup \left(\inf X_k \right)$$

Jika kita tulis $\text{Sup}_{k \geq n} X_k = \tilde{\bigvee}_{k=n} X_k$ dan $\inf_{k \geq n} X_k = \tilde{\bigwedge}_{k=n} X_k$

maka :

$$\lim \text{Sup } X_n = \tilde{\bigwedge}_{n=1} \left(\tilde{\bigvee}_{k=n} X_k \right) \text{ dan } \lim \inf X_n = \tilde{\bigvee}_{n=1} \left(\tilde{\bigwedge}_{k=n} X_k \right)$$

Selanjutnya jika $\{A_i : i \in I\}$ merupakan famili himpunan maka produk kartesian πA_i terdefinisi sebagai himpunan yang terdiri dari semua fungsi $f : I \longrightarrow \cup A_i$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap $i \in I$ berlaku $f(i) \in A_i$.

TEOREMA 1.

Untuk suatu famili $\{A_i : i \in I\}$ himpunan bagian-himpunan bagian suatu himpunan x maka berlaku :

1. $(\cup A_i)^c = \cap A_i^c$
2. $(\cap A_i)^c = \cup A_i^c$

Bukti :

1. Misal $x \in (\cup A_i)^c$ maka

$$\begin{aligned} x \in (\cup A_i)^c \Leftrightarrow x \notin \cup A_i &\Leftrightarrow x \notin A_i ,\ \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in A_i^c ,\ \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c \end{aligned}$$

$\therefore \quad (\cup A_i)^c = \cap A_i^c$

2. Misal $x \in (\cap A_i)^c$ maka

$$\begin{aligned} x \in (\cap A_i)^c \Leftrightarrow x \notin \cap A_i &\Leftrightarrow \exists\ i \in I \quad x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \in I \quad x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \cup A_i^c \end{aligned}$$

$\therefore (\cup A_i)^c = \cap A_i^c$

Terbukti !

Oleh karena itu :

1. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup f(A_i)$
2. $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$
3. $f^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$
4. $f^{-1}(\bigcap A_i) = \bigcap f^{-1}(A_i)$
5. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$; dimana B adalah himpunan Borel.

Sehingga Suatu famili himpunan $\{A_i : i \in I\}$ dikatakan saling asing jika $\forall$i, pasangan i dan j dari indeks yang berbeda berlaku $A_i \cap A_j = \phi$.

Kemudian kita misalkan suatu ruang fungsi L merupakan suatu ruang lingkup vektor fungsi yang berharga riil yang didefinisikan atas beberapa himpunan tidak kosong X sedemikian sehingga fungsi $f \vee g \in L$ dan $f \wedge g \in L$, maka $\forall$ $f,g \in L$ berlaku :

$$(f \vee g)(x) = \text{maks}\,\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\,\{f(x), g(x)\}$$

Sehingga $\forall$ $f \in L$ elemen-elemen f^+, f^- dan $|f|$ didefinisikan dengan :

$$f^+(x) = \text{maks}\,\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \text{maks}\,\{-f(x), 0\}$$

$$|f|(x) = |f(x)| \; ; \forall\, x \in X$$

2.1. SEMIRING

Dalam sub-bab ini akan kita pelajari tentang suatu semiring dari himpunan-himpunan. Suatu semiring dari himpunan-himpunan merupakan famili paling sederhana dari himpunan-himpunan dimana dapat dibentuk suatu teori ukuran.

DEFINISI 2.

Misal X suatu himpunan yang tidak kosong. Suatu koleksi S dari himpunan-himpunan bagian X disebut suatu SEMIRING jika :

1. Himpunan kosong berada dalam S, $\phi \in S$.
2. Jika A, B $\in$ S maka $A \cap B \in S$
3. Himpunan A dan B yang dapat ditulis sebagai suatu union berhingga anggota-anggota S, $\forall$ A,B $\in$ S, $\exists\ C_1, \ldots, C_n \ni A \sim B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ dan $C_i \cap C_j = \phi$ untuk $i \neq j$.

Sekarang misalkan S suatu Semiring dari himpunan bagian-bagian A maka suatu himpunan bagian A dari X disebut Himpunan-σ jika terdapat satu barisan yang saling asing $\{A_n\}$ dari S $\ni A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dan jika $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dimana $A_1, \ldots, A_n \in S$ dan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$, maka A merupakan suatu himpunan-σ sehingga dengan Definisi 7 $A \sim B$ juga suatu himpunan-σ ; $\forall$ A,B $\in$ S.

TEOREMA 2.

Untuk suatu semiring S berlaku :

1. Jika $A \in S$ dan $A_1, \ldots, A_n \in S$, maka $A \sim \tilde{\bigcup}_{i=1} A_i$ dapat ditulis sebagai suatu union berhingga himpunan-himpunan S (atau himpunan σ).
2. Untuk setiap barisan $\{A_n\}$ dari S, himpunan $A = \tilde{\bigcup}_{i=1} A_i$ merupakan himpunan-himpunan σ.
3. Union-union terhitung dan interseksi-interseksi berhingga dari himpunan-himpunan σ adalah himpunan-himpunan σ.

Bukti :

1. Kita gunakan induksi matematika.

   Untuk n = 1 maka benar menurut definisi semiring (Definisi 2).

   Sekarang diasumsikan benar untuk beberapa n, maka akan dibuktikan benar untuk n + 1.

   Misal $A \in S$ dan $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \in S$, sehingga :

   $$\exists\ B_1, \ldots, B_k \in S \Rightarrow B = A \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
   $$= \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

   dan $B_i \cap B_j = \phi$ untuk $i \neq j$.

   Akibatnya $A \sim \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = B \sim A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (B_i \sim A_{n+1})$

   Hal ini berdasarkan definisi 2(3) bahwa

setiap $B_i \sim A_{n+1}$ dapat ditulis sebagai union tak terhingga dari himpunan-himpunan S.

Karena $B_i \cap B_j = \phi$ untuk $i \neq j$, maka $A \sim \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$

Dapat ditulis sebagai suatu union berhingga dari himpunan-himpunan saling asing S.

2. Misal $\{A_n\} \subseteq S$ dan $A = \tilde{\bigcup}_{n=1} A_n$

   Dan ditulis $A = \tilde{\bigcup}_{n=1} B_n$ dimana $B_1 = A_1$ dan $B_{n+1} = A_{n+1} \sim \tilde{\bigcup}_{i=1} A_i$ untuk $n \geq 1$. Hal ini mengakibatkan setiap B_i merupakan himpunan σ.

   Berarti A juga merupakan himpunan σ.

3. Untuk membuktikannya dapat kita lihat bukti teorema 2(2) dan definisi 2(2) bahwa union-union terhitung dan interseksi-interseksi berhingga dari himpunan-himpunan σ adalah himpunan σ.

$\therefore$ Terbukti !

DEFINISI 3.

Misal S suatu koleksi yang tidak kosong dari himpunan bagian-himpunan bagian suatu himpunan tidak kosong X. Koleksi S dikatakan sebagai suatu ALJABAR jika :

1. A, B $\in$ S maka $A \cap B \in S$.

2. $A \in S$ maka $A^c \in S$.

DEFINISI 4.

Suatu aljabar S dari himpunan bagian-himpunan bagian X dikatakan sebagai suatu ALJABAR-σ jika untuk setiap union suatu koleksi terhitung anggota-anggota S terdapat suatu jumlahan aljabar yang ditulis $\tilde{\bigcup}_{n=1} A_n \in S$ untuk setiap barisan $\{A_n\}$ dari S.

Sehingga setiap aljabar σ dari himpunan-himpunan juga tertutup untuk interseksi-interseksi terhitung yaitu $\bigcap_{n=1} A_n = (\tilde{\bigcup}_{i=1} A_n^c)$

DEFINISI 5.

Himpunan BOREL suatu ruang topologi (x,γ) merupakan anggota-anggota dari aljabar σ yang dibangun oleh himpunan-himpunan terbuka. Dan aljabar σ semua himpunan Borel ditulis dengan $\mathcal{B}$.

2.2. UKURAN-UKURAN ATAS SEMIRING

Konsep ukuran sangat perlu untuk diketahui sehubungan dengan tujuan kita dalam mempelajari Integral Lebesgue.

Ukuran yang dimaksud disini sama seperti umumnya ukuran panjang dan luas.

DEFINISI 6.

Misalkan S suatu semiring himpunan bagian-bagian X. Suatu fungsi μ : s $\longrightarrow$ [0, ∞) disebut suatu ukuran atas S jika :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. Jika $\{A_n\}$ suatu barisan dari S dimana $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$

   maka :

   $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$; dengan μ suatu additive-σ

Sehingga suatu triple (X, S, μ) disebut ruang ukuran dimana :

X = himpunan yang tidak kosong.

S = Semiring himpunan bagian-bagian X

μ = ukuran atas S.

TEOREMA 3.

Suatu ruang ukuran (X, S, μ) berlaku :

1. Jika $A_1, \ldots, A_n \in S$ saling asing dan

   $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ maka $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

   dimana μ adalah additive berhingga.
2. Jika A,B $\in$ S dimana $A \subseteq B$ maka $\mu(A) \leq \mu(B)$ dan μ monoton.

<u>Bukti :</u>

1. Jika $A_1, \ldots, A_n \in S$ saling asing

sedemikian sehingga $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ dan $A_i = \phi$ untuk $i > n$, maka $\{A_i\}$ merupakan suatu barisan saling asing dari S yang memenuhi $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$.

Sehingga dengan additive σ kita peroleh :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

dimana persamaan terakhir terpenuhi karena $\mu(\phi)=0$.

(Berdasarkan Definisi 6)

2. Misal $A,B \in S$ dimana $A \subseteq B$.

   Pilih koleksi berhingga dari himpunan-himpunan saling asing C_n, ... , C_n sedemikian sehingga $B \sim A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, maka $B = A \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$ merupakan suatu union berhingga dari himpunan-hinpunan terpisah (saling asing) S (Definisi 2). Jadi dengan Bukti Teorema 3(1) :

   $\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + \ldots + \mu(C_n) \geq \mu(A)$.

   Sehingga $\mu(A) \leq \mu(A)$

$\therefore$ Terbukti !

TEOREMA 4.

Misal S merupakan suatu semiring dan $\mu : S \longrightarrow [\,0,\sim\ )$ adalah suatu fungsi himpunan, maka μ merupakan suatu ukuran atas S jika dan hanya jika μ memenuhi :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. jika $A \in S$ dan $A_1, \ldots, A_n \in S$ dimana $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ dan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$ maka $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$
3. jika $A \in S$ dan $\{A_n\} \subseteq S$ dimana $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\sim} A_n$ maka $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\sim} \mu(A_n)$ dengan μ suatu sub additive σ

Bukti :

* Akan dibuktikan bahwa jika $\mu : S \longrightarrow [0, \quad)$ adalah suatu fungsi dan μ suatu ukuran atas S maka berlaku (1) , (2) , dan (3).

1. Andaikan μ merupakan ukuran atas S maka dengan definisi 6. terbukti $\mu(\phi) = 0$.
2. Andaikan $A \in S$ dan $A_1, \ldots, A_n \in S$ saling asing yang memenuhi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$

   Dengan teorema 2 . terdapat himpunan saling asing $B_i, \ldots, B_m \in S$ sedemikian sehingga

   $A \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$

   Sekarang tetapkan $C_1 = A_1, \ldots, C_n = A_n$ dan $C_{n+1} = B_i$ untuk $1 \leq i \leq m$, maka himpunan $C_1, \ldots, C_{n+m}$ merupakan saling asing dan $A = \bigcup_{i=1}^{m+n} C_i$.

   Dengan teorema 3 diperoleh :

   $$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m+n} \mu(C_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i(A)$$

   Jadi $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$

3. Asumsikan $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dimana $A \in S$ dan $\{A_n\} \subseteq S$.

Ambil $B_1 = A_1$ dan $B_{n+1} = A_{n+1} \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ untuk $n \geq 1$. Maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $B_n \subseteq A_n$; $\forall n$.

Barisan $\{B_n\}$ saling asing dan dengan teorema 2 setiap B_n adalah himpunan σ.

Kemudian $\forall$ n pilih suatu barisan yang saling asing $\{C_i^n\} \subseteq S$ sedemikian sehingga $B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^n$.

Dan dengan Bukti (2) dan $\bigcup_{i=1}^{m} C_i^n \subseteq A_n$; $\forall$ m maka

$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i^n) \leq \mu(A_n)$.

Dengan demikian $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (C_i^n \cap A)$

merupakan suatu union saling asing

Dan dengan Definisi 6 dan Teorema 3 diperoleh :

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i^n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=}^{\infty} \mu(C_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (A_n).$$

* Sekarang akan dibuktikan bahwa jika μ memenuhi (1) , (2) dan (3) maka μ suatu ukuran.

Jika fungsi $\mu : S \longrightarrow [0, \infty]$ memenuhi 3 syarat diatas maka dengan menggabungkan (2) dan (3) μ merupakan suatu additive σ (Berdasarkan Definisi 6).

Jadi μ suatu ukuran.

$\therefore$ Terbukti !

DEFINISI 7.

Suatu himpunan fungsi $\mu : S \longrightarrow [\,0, \infty\,]$ dimana S merupakan semiring disebut suatu UKURAN JUMLAHAN BERHINGGA atas S jika :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. $A_1, \ldots, A_n \in S$ saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$ maka $\mu(\bigcup_{n=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Sehingga setiap ukuran jumlahan berhingga μ adalah monoton yaitu jika $A, B \in S$ dimana $A \subseteq B$, maka $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dengan demikian setiap ukuran adalah suatu ukuran jumlahan berhingga.

2.3. UKURAN LUAR

DEFINISII 8. (CARATHEODORY)

Suatu fungsi himpunan $\mu : \rho(x) \longrightarrow [\,0, \infty\,]$ disebut UKURAN LUAR jika :

1. $\mu(\phi) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ jika $A \subseteq B$ dimana μ monoton
3. $\mu\left[\tilde{\bigcup} A_n\right] \leq \tilde{\sum} \mu(A_n)$ terpenuhi $\forall \{A_n\}$

DEFINISI 9. (CARATHEODORY)

Suatu himpunan bagian $E \subseteq X$ dikatakan terukur jika

$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$; $\forall A \subseteq X$.

Dan koleksi semua himpunan terukur ditulis dengan $\wedge$ dimana :

$\wedge = \{E \subseteq X : \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$; $\forall A \subseteq X\}$

TEOREMA 5.

Misal $E_1, \ldots, E_n$ saling asing dan terukur, maka

$$\mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i) \; ; \; \forall A \subseteq X$$

<u>Bukti :</u>

Pembuktian menggunakan induksi matematika.

Untuk n = 1 maka pernyataan benar.

Sekarang andaikan benar untuk beberapa n , maka akan dibuktikan benar untuk n + 1.

Misal $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}$ saling asing dan terukur.

Jika $A \subseteq X$, maka $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \cap E_{n+1}\right) = A \cap E_{n+1}$

dan $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \right) \cap E_{n+1}^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)$

Sehingga :

$$\mu \left\{A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \right] \right\} = \mu \left\{A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \right] \cap E_{n+1} \right\} + \mu \left\{A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \right] \cap E_{n+1}^c \right\}$$

$$= \mu \left\{A \cap E_{n+1}\right\} + \mu \left\{A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mu \, (A \cap E_i)$$

(Berdasarkan Definisi 6)

∴ Terbukti !

TEOREMA 6.

Misal μ ukuran luar atas X, maka $(X, \wedge, \mu)$ suatu ruang ukuran dimana μ additive σ atas $\wedge$.

<u>Bukti :</u>

Misal $\{E_n\}$ barisan yang saling asing dari $\wedge$ dan

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dengan sub additive σ diperoleh

$\mu(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Dengan Teorema 5.

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(E_n) = \mu \left\{E \cap \left[\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right] \right\} \le \mu(E) \; : \; \forall \; k$$

sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu(E)$ dan $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

∴ Terbukti

TEOREMA 7.

Misal A dan B himpunan yang terukur sedemikian sehingga $A \subseteq B$ dimana $\mu(B) < \infty$ maka $\mu(B \sim A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Bukti :

Karena $B = A \cup (B \sim A)$ dan dengan definisi 6 maka $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \sim A)$.

Karena $\mu(B) < \infty$ maka $\mu(B \sim A) = \mu(B) - \mu(A)$.

∴ Terbukti !

Sekarang suatu ukuran akan diperluas menjadi ukuran luar μ^* sehingga aljabar σ semua himpunan bagian terukur $\mu^* \subseteq X$ beranggotakan semiring S.

Hal ini menunjukkan bahwa semiring adalah kumpulan-kumpulan terkecil dari himpunan-himpunan atas suatu ukuran.

DEFINISI 10.

Misal (X,S,μ) suatu ruang ukuran, maka $\forall A \subseteq X$ didefinisikan :

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A) : \{A_n\} \text{ suatu barisan} \ni A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$

Sehingga jika tidak ada barisan $\{A_n\} \subseteq S \ni A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ maka $\mu^*(A) = \infty$ dimana $\inf \phi = \infty$.

TEOREMA 8.

Jika $A \in S$ maka $\mu^*(A) = \mu(A)$.

<u>Bukti :</u>

Misal $A \in S$.

Tetapkan $A_1 = A$ dan $A_n = \phi$ untuk $n \geq 2$, maka $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Sekarang misal $\{A_n\} \subseteq S$ dimana $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Dengan Teorema 2 . $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Sehingga $\mu(A) \leq \mu^*(A)$

Jadi $\mu(A) = \mu^*(A)$

∴ Terbukti !

TEOREMA 9.

Misal (X,S,μ) suatu ruang ukuran dan $\{E_n\}$ barisan himpunan terukur, maka berlaku :

1. Jika $E_n \uparrow E$ maka $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$.
2. Jika $E_n \downarrow E$ dan $\mu^*(E_k) < \infty$ untuk beberapa k, maka $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$.

Bukti :

1. Misalkan $B_1 = E_1$ dan $B_n = E_n \sim E_{n-1}$ untuk $n \geq 2$.

   maka $\forall B_n$ terukur dan $B_i \cap B_j = \phi$ jika $i \neq j$.

   Berarti $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ dan $E = \bigcup_{i=1}^{\sim} B_i$

   Sehingga dengan Teorema 6 . diperoleh

   $$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\sim} \mu^* (B_i)$$
   $$= \lim_{n \to \sim} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^* (B\ )$$

   Dilain pihak $\mu^*(E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i)$

   Jadi $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$.

2. Andaikan $\mu^*(E_1) < \sim$.

   Berarti $E_1 \sim E \uparrow E_1 \sim E_n$, sehingga dengan Bukti Teorema 9(1) diperoleh $\lim \mu^*(E_1 \sim E_n) = \mu^*(E_1 \sim E)$.

   Berdasarkan Teorema 7 .

   $\lim \left[\mu^*(E_1) - \mu^*(E_n)\right] = \mu^*(E_1) - \mu^*(E)$

   Jadi $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$.

   $\therefore$ Terbukti !

2.4. FUNGSI-FUNGSI TERUKUR (MEASURABLE FUNCTIONS)

Jika μ adalah suatu fungsi ukuran luar dari X, maka suatu relasi yang membawa elemen-elemen X disebut ALMOST EVERYMHERE (disingkat a.e.) yang berlaku untuk semua X bila himpunan A yang terdiri dari semua titik untuk relasi yang tidak sesuai merupakan suatu himpunan kosong ($\mu(A) = 0$).

Kemudian diasumsikan bahwa (X,S,μ) adalah suatu ruang ukuran dan f, g dinotasikan sebagai fungsi-fungsi berharga riil yang didefinisikan atas X, maka :

1. $f = g$ a.e. jika $\mu^*\left[\{ x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right] = 0$
2. $f \geq g$ a.e. jika $\mu^*\left[\{x \in X : f(x) < g(x)\}\right] = 0$
3. $f_n \longrightarrow f$a.e jika $\mu^*\left[\{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}\right] = 0$
4. $f_n \uparrow f$ a.e. jika $f_n \leq f_{n+1}$ a.e. $\forall n$ dan $f_n \longrightarrow f$ a.e.
5. $f_n \downarrow f$ a.e. jika $f_n \geq f_{n+1}$ a.e. $\forall n$ dan $f_n \longrightarrow f$ a.e.

DEFINISI 11.

Misal $f : X \longrightarrow R$ suatu fungsi.
Jika $f^{-1}(\theta)$ suatu himpunan terukur untuk setiap himpunan bagian terbuka θ dari R, maka f dikatakan suatu fungsi terukur.

Jadi setiap fungsi konstan adalah terukur sehingga jika $f(x) = c$ untuk $\forall\ x \in X$ dan θ suatu hinpunan bagian terbuka dari R maka $f^{-1}(\theta) = \phi$ jika $c \notin \theta$ dan $f^{-1}(\theta) = x$ jika $c \in \theta$.

TEOREMA 10.

Untuk suatu fungsi $f : X \longrightarrow R$ berlaku statemen-statemen yang ekuivalen :

1. f terukur.
2. $f^{-1}\left[(a,b)\right]$ terukur untuk setiap interval terbuka yang terbatas (a,b) dari R.
3. $f^{-1}(C)$ terukur untuk setiap himpunan bagian tertutup C dari R.
4. $f^{-1}\left[[a,\infty)\right]$ terukur untuk setiap $a \in R$.
5. $f^{-1}\left[[-\infty,a)\right]$ terukur untuk setiap $a \in R$.
6. $f^{-1}(B)$ terukur untuk setiap himpunan bagian Borel B dari R.

Bukti :

(1) $\Rightarrow$ (2) Dari definisi 11 jelas terbukti.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dengan relasi $f^{-1}(c) = \left[f^{-1}(c)^{c}\right]^{C}$ sehingga C^{c} dapat ditulis sebagai suatu union terhitung dari interval-interval terbuka yang terbatas.

(3) $\Rightarrow$ (4) Misal $C = [a,c]$ untuk $a < c$ sehingga $[a,\infty)$ $= [a,c]$ dimana $c > a$, dengan demikian :

$f^{-1}\left[[a,\infty]\right] = f^{-1}\left[\cup [a,c]\right] = \cup f^{-1}\left[\cup [a,c]\right]$

Jadi $f^{-1}\left[[a,\infty]\right]$ terukur $\forall a \in R$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Karena $f^{-1}\left[(-\infty,a]\right] = \left[f^{-1}\left[[a,\infty)\right]\right]^{C}$ maka

$f^{-1}\left[(-\infty,a]\right]$ terukur untuk $\forall \in R$.

Dengan demikian $f^{-1}\left[(-\infty,a]\right]$ dapat ditulis sebagai interseksi terhitung dari

$f^{-1}\left[(-\infty,a+\frac{1}{n}]\right]$ yang berarti $f^{-1}\left[(-\infty,a]\right]$

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[(-\infty,a+\frac{1}{n}]\right]$

Jadi $f^{-1}\left[(-\infty,a]\right]$ terukur.

(5) → (6) Misal $\mathcal{A} = \{A \subseteq R : f^{-1}(A) \text{ terukur}\}$

Berdasarkan definisi 4 dan Definisi 5 $\mathcal{A}$ suatu aljabar σ dari himpunan bagian - himpunan bangian dari R sedemikian sehingga$(-\infty,a)$ berada dalam $\mathcal{A}$ untuk $\forall$ a $\in$ R. Karena mengandung himpunan-himpunan Borel maka $f^{-1}(B)$ terukur untuk setiap himpunan bagian Borel dari R.

(6) → (1) Karena himpunan Borel mempunyai anggota dari aljabar σ yang dibangun oleh himpunan-himpunan terbuka maka f(B) terukur untuk setiap himpunan bagian Borel dari R.Hal ini didasarkan atas definisi 5

TEOREMA 11.

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi terukur, maka :

1. $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$
2. $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$
3. $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$

Semuanya terukur.

Bukti :

a. Misal diberikan suatu bilangan rasional R $r_1, r_2, \ldots\ldots$ maka :

$\{x \in X : f(x) > g(x)\} =$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\{x \in X : f(x) > r_n\} \cap \{x \in X : g(x) < r_n\}\right]$$

terukur. Jadi $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ merupakan union terhitung dari himpunan-himpunan terukur.

b. Karena $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X : f(x) < g(x)\}^c$

Maka dengan bukti a. $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ adalah terukur.

c. Karena $\{x \in X : f(x) = g(x)\} =$

$\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) \geq f(x)\}$

Maka dengan bukti b. berarti $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ terukur.

TEOREMA 12.

Untuk fungsi-fungsi terukur f dan g berlaku :

1. $f + g$ suatu fungsi terukur
2. $f.g$ suatu fungsi terukur
3. $|f|$, f^+, dan f^- fungsi-fungsi yang terukur
4. $f \vee g$ dan $f \wedge g$ funsi-fungsi terukur

Bukti :

1. Misal diberikan suatu konstanta c sehingga c−g adalah suatu fungsi terukur ; karena $a \in R$ maka

   $\{x \in X : c-g\ (x) \geq a\}$

   $= \{x \in X ; g(x) \leq c-a\}$ adalah suatu himpunan terukur.

Sekarang jika $a \in R$ maka

$(f+g)^{-1}([a,\infty]) = \{x \in X : f(x) + g(x) \geq a\} =$

$\{x \in X : f(x) \geq a - g(x)\}$ terukur berdasarkan Teorema 11. dan dengan Teorema 10. $f + g$ suatu fungsi terukur.

2. Pertama akan diperlihatkan bahwa f^2 suatu fungsi terukur. Jika $a \in R$ maka $\{x \in X : f^2(x) \leq a\} = \phi$ untuk $a < 0$ dan $\{x \in X : f^2(x) \leq a\} = f^{-1}([-\sqrt{a}, \sqrt{a}])$ untuk $a \geq 0$.

   Jadi f^2 suatu fungsi terukur berdasarkan Teorema 10. Kemudian diberikan suatu konstanta c maka cf terukur. Karena jika $A = \{x \in X : cf(x) \leq a\}$ maka $A = \{x \in X : f(x) \geq a/c\}$ untuk $c > 0$ dan $A = \{x \in X : f(x) \leq a/c\}$ untuk $c < 0$.

   Dengan demikian $fg = 1/2\,[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ adalah terukur.

3. Untuk ketukuran $|f|$ mengikuti relasi $\{x \in X : |f(x) < a\} = 0$ jika $a < 0$ dan $\{x \in X : |f(x)| \geq a\} = \{x \in X : f(x) \leq a\} \cap \{x \in X : f(x) \geq a\}$ jika $a \geq 0$ sehingga $|f|$ terukur.

   Kemudian untuk f^+ dan f^- mengikuti relasi :

   $f = f^+ - f^-$ dan $|f| = f^+ + f^-$ sehingga diperoleh $f^+ = 1/2\,(|f| + f)$ dan $f^- = 1/2\,(|f| - f)$

   Karena $|f|$ terukur dan f juga terukur maka f^+ dan f^- terukur.

4. Karena $f \vee g = \text{maks}\{f, g\}$ dapat ditulis dengan $f \vee g = 1/2\,(f + g + |f - g|)$

dan $f \wedge g = \min\{f,g\}$ dapat ditulis $f \wedge g = 1/2 (f + g - |f - g|)$.

Karena f, g dan $|f - g|$ terukur maka $f \vee g$ dan $f \wedge g$ juga terukur.

∴ Terbukti !

TEOREMA 13.

Misal $\{f_n\}$ suatu barisan dari fungsi-fungsi terukur maka :

1. Jika $f_n \longrightarrow f$ a.e. maka f suatu fungsi terukur.
2. Jika $\{f_n(x)\}$ suatu barisan yang terbatas $\forall x$, maka $\lim\sup f_n$ dan $\lim\inf f_n$ terukur.

Bukti :

(1) Misal $A = \{x \in X : \lim f_n(x) = f(x)\}$.

Karena $f_n \longrightarrow f$ a.e. maka $\mu^*(A^c) = 0$.

Jadi A^c dan A merupakan himpunan terukur sekarang misal $a \in R$, maka

$$A \cap f^{-1}((a,\sim)) = A \cap \left[\bigcap_{n=1}^{\sim} \bigcup_{i=n}^{\sim} f_i^{-1}\left[(a + 1/n, \sim)\right]\right]$$

Karena setiap f_i terukur maka $A \cap f^{-1}((a,\sim))$ juga terukur. Dengan demikian $A^c \cap f^{-1}((a,\sim))$ terukur karena $\mu(A^c \cap f^{-1}((a,\sim)) = 0$.

Jadi $f^{-1}((a,\infty)) = \left[A \cap f^{-1}((a,\infty))\right] \cup \left[\ A^c \ \cap \right.$ $\left. f^{-1}((a,\infty))\right]$ adalah suatu himpunan yang terukur.

Berdasarkan Teorema 10. f suatu fungsi terukur.

(2) Misal $\{f_n(x)\}$ terbatas $\forall x$.

Akan dipelihatkan bahwa lim sup f_n suatu fungsi terukur.

Dan keterukuran lim inf f_n mengikuti identitas bahwa lim inf f_n = − lim sup $(-f_n)$.

Misal lim sup $f_n = \overset{\sim}{\bigwedge_{n=1}} \overset{\sim}{\bigvee_{m=n}} f_m$ dimana m suatu bilangan asli.

Maka fungsi $h_n = f_{m+1} \vee \ldots \vee f_{m+n}$ terukur $\forall n$ (berdasarkan Teorema 12.(4))

Karena $h_n \uparrow \overset{\sim}{\bigvee_{i=m}} f_i = g_m$ a.e dan berdasarkan bukti Teorema 13.(1), maka setiap g_m suatu fungsi terukur.

Dan karena $g_m \downarrow$ lim sup f_n a.e. dan dengan Bukti teorema 13.(1) maka lim sup f_n suatu fungsi terukur.

∴ Terbukti !

2.5. FUNGSI-FUNGSI SEDERHANA (SIMPLE) DAN FUNGSI-FUNGSI TANGGA (STEP).

Misal A suatu himpunan bagian dari himpunan X maka fungsi karakteristik χ_A merupakan fungsi berharga real yang didefinisikan atas x dengan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Sedangkan untuk himpunan bagian-bagian A dan B dari suatu himpunan x berlaku :

1. $\chi_\phi = 0$ dan $\chi_x = 1$
2. Jika $A \subseteq B$ maka $\chi_A \leq \chi_B$
3. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A \wedge \chi_B$
4. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A \vee \chi_B$
5. $\chi_{A \sim B} = \chi_A - \chi_{B\cap A}$
6. Jika $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\{A_n\}$ suatu barisan yang saling asing dari himpunan bagian-bagian x maka

   $$\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$$
7. $\chi_{A\times B} = \chi_A \cdot \chi_B$

   (dimana himpunan B dapat merupakan suatu himpunan bagian dari beberapa himpunan Y yang lain).

DEFINISI 12.

Jika suatu fungsi terukur $Q : x \longrightarrow R$ dengan mengasumsikan hanya ada satu bilangan berhingga maka Q dikatakan sebagai suatu FUNGSI SIMPLE (Sederhana).

Contoh :

Diberikan $x = [0,1]$ maka $Q(x) = \{ 0 ; x \in [0,1] \}$ dikatakan sebagai fungsi SEDERHANA.

Sehingga jumlahan-jumlahan berhingga, produk-produk berhingga, suprema berhingga dan infima berhingga dari fungsi-fungsi SIMPLE (SEDERHANA) juga merupakan fungsi-fungsi SEDERHANA.

Dengan kata lain kumpulan semua fungsi SEDERHANA membentuk suatu ruang fungsi yang berada dalam jumlahan suatu aljabar.

DEFINISI 13.

Jika Q suatu fungsi SEDERHANA dengan $A_i = \{ x \in X : Q(X) = a_i \}$ dimana $a_1, \ldots, a_n$ harga-harga yang tidak nol adalah terukur dan saling asing maka

$Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ disebut REPRESENTASI STANDARD dari Q

Biasanya suatu fungsi SEDERHANA Q direpresentasikan ke dalam lebih dari satu cara, misal dalam bentuk $Q = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ dimana harga-harga b_j merupakan bilangan real dan B_j terukur.

DEFINISI 14.

Suatu fungsi SEDERHANA (SIMPLE) Q disebut suatu FUNGSI STEP (TANGGA) jika Q mempunyai suatu representasi standard $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ dimana $\forall A_i$ merupakan himpunan terukur dengan ukuran berhingga ($\mu^*(A_i) < \infty$).

Sehingga koleksi semua fungsi STEP membentuk suatu ruang fungsi yang juga merupakan suatu aljabar fungsi-fungsi. Dengan demikian fungsi step dapat dijadikan "building block" (dasar bangunan) untuk teori integrasi.

DEFINISI 15.

Misal Q suatu fungsi STEP dengan representasi standard $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ dimana $a_1, \ldots, a_n$ merupakan harga-harga yang tidak nol dan $A_i = \{x \in X: Q(x) = a_i\}$ maka Integral Lebesgue Q didefinisikan dengan

$$I(Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$$

Integral Lebesgue Q (atau Integral Q) dinotasikan dengan $\int_X Q\, d\mu$ atau $\int Q\, d\mu$.

Dengan demikian jika Q suatu fungsi STEP yang mempunyai suatu representasi standard $Q = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ dimana $\forall\, b_j$ dalam R dan $\forall\, B_j$ terukur dengan ukuran berhingga, maka $I(Q) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu^*(B_j)$ terpenuhi.

TEOREMA 14.

Untuk fungsi-fungsi STEP Q dan Ψ berlaku :

1. Jika $Q \geq 0$ a.e. maka $I(Q) \geq 0$; sehingga jika $Q \geq \Psi$ a.e. maka $I(Q) \geq I(\Psi)$.

2. Jika $Q = 0$ a.e. maka $I(Q) = 0$, sehingga jika $Q = \Psi$ a.e. maka $I(Q) = I(\Psi)$.

Bukti :

(1) Misal $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ adalah representasi standard dari Q. Karena $Q \geq 0$ a.e. ; sehingga jika $a_i < 0$ terpenuhi untuk beberapa i, maka $\mu^*(A_i) = 0$.

Jadi $I(Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i) \geq 0$.

Sekar ang ka $Q \geq \Psi$ a.e. maka $Q - \Psi \geq 0$ a.e. dan $I(Q) - I(\Psi) = I(Q - \Psi) \geq 0$.

Jadi $I(Q) \geq I(\Psi)$.

(2) Jika $Q = 0$ a.e. maka $Q \geq 0$ a.e. dan $-Q \geq 0$ a.e. Jadi dengan Bukti Teorema 14.(1) $I(Q) \geq 0$ dan $-I(Q) \geq 0$. Sehingga $I(Q) = 0$.

Sekarang jika $Q = \Psi$ a.e. maka $Q - \Psi = 0$ a.e. sehingga $I(Q) - I(\Psi) = I(Q - \Psi) = 0$

Jadi $I(Q) = I(\Psi)$.

$\therefore$ Terbukti !

TEOREMA 15.

Misal $\{Q_n\}$ suatu barisan fungsi-fungsi STEP, jika $Q_n \downarrow 0$ a.e. maka $I(Q_n) \downarrow 0$, sehingga jika Q suatu fungsi STEP dan $Q_n \uparrow Q$ a.e. maka $I(Q_n) \uparrow I(Q)$.

Bukti :

Andaikan $Q_n \downarrow 0$ a.e.

Misal $A_n = \{ x \in X : Q_{n+1}(x) > Q_n(x) \}$ dan $A_o = \{ x \in X : Q_n(x) \not\longrightarrow 0 \}$ dimana $\mu^*(A_n) = 0$ untuk n = 0,1, ... , .

Tetapkan $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, maka $\mu^*(A) = 0$ (dengan menggunakan sub. additiv-σ dari μ^*) dimana $Q_n(x) \downarrow 0$ untuk $\forall x \in A^c$.

Dengan demikian jika $\Psi_n = Q_n \chi_{A^c}$ maka $\Psi_n = Q_n$ a.e. untuk $\forall n$ dan $\Psi_n(x) \downarrow 0$ untuk $\forall\ x \in X$.

Dan dengan teorema 14. kita dapatkan $I(\Psi_n) = I(Q_n)$ untuk $\forall n$. Dengan demikian $Q_n(x) \downarrow 0$ terpenuhi untuk $\forall x \in X$.

Sekarang misalkan $\varepsilon > 0$.

Tetapkan $M = \max \{Q_1(x) : x \in X\}$ dan $B = \{x \in X: \{Q_1(x) > 0\}$ sehingga $\mu^*(B) < \infty$.

Kemudian didefinisikan $E_n = \{x \in X : Q_n(x) \geq \varepsilon \}$ untuk $\forall n$, maka $\mu^*(E_1) < \infty$ untuk $\forall E_n$ yang terukur dan $E_n \downarrow \phi$ dimana $Q_n(x) \downarrow 0$ untuk $\forall\ x \in X$.

Dan dengan teorema 9 . kita peroleh $\mu^*(E_n) \downarrow 0$

Selanjutnya tentukan suatu bilangan k sedemikian sehingga $\mu^*(E_k) < \varepsilon$.

Jika $n \geq k$ maka $0 \leq Q_n \leq Q_k = Q_k \chi_{E_k} + Q_k\ \chi_{B \sim E_k} \leq M\ \chi_{E_k} + \varepsilon\ \chi_B$

Sehingga $0 \leq I(Q_n) \leq M\ \mu^*(E_k) + \varepsilon\ \mu^*(B) < \varepsilon\ [M + \mu^*(B)]$ untuk $\forall\ n \geq k$.

Dengan demikian $I(Q_n) = 0$.

Sekarang jika Q suatu fungsi STEP dan $Q_n \uparrow Q$ a.e. maka $Q - Q_n \downarrow 0$ a.e., sehingga $I(Q - Q_n) \downarrow 0$.

Jadi $I(Q_n) \uparrow I(Q)$.

∴ Terbukti !

TEOREMA 16.

Andaikan terdapat 2 barisan fungsi STEP $\{Q_n\}$ dan $\{\Psi_n\}$ yang memenuhi $Q_n \uparrow f$ a.e. dan $\Psi_n \downarrow f$ a.e. dimana $f : x \longrightarrow R^*$ adalah fungsi yang diberikan, maka

$$\lim I(Q_n) = \lim I(\Psi_n).$$

Bukti :

Untuk $\forall m$ yang ditetapkan $Q_m \wedge \Psi_n \uparrow Q_m \wedge f = Q_m$ a.e. sehingga dengan teorema 15. $\lim_n I(Q_m \wedge \Psi_n) = I(Q_m)$

Dan karena $Q_m \wedge \Psi_n \leq \psi_n$ $\forall n$ maka $I(Q_m) = \lim_n I(Q_m \wedge \Psi_n) \leq \lim I(\Psi_n)$.

Dengan demikian $\lim I(Q_m) \leq \lim I(\Psi_m)$.

Dan dengan cara yang sama $\lim I(\Psi_n) \leq \lim I(Q_m)$ sehingga $\lim I(Q_n) = \lim I(\Psi_m)$.

∴ Terbukti !

TEOREMA 17.

Misal $\{Q_n\}$ suatu barisan fungsi-fungsi STEP.

Jika A suatu himpunan bagian X sedemikian sehingga $Q_n \downarrow \chi_A$ a.e. maka A merupakan suatu himpuanan yang terukur dan $\lim I(Q_n) = \mu^*(A)$.

Bukti :

Berdasarkan Teorema 13 (1) A terukur.

Kemudian andaikan $Q_n(X) \uparrow \chi_A(x)$ terpenuhi untuk $\forall x \in X$, Untuk $\forall n$ kita tetapkan $A_n = \{x \in X : Q_n(x) > 0\}$ yang terukur dengan ukuran berhingga dan $A_n \uparrow A$ terpenuhi sehingga $\chi_{A_n} \uparrow \chi_A$.

Dengan teorema 16. kita peroleh $\lim I(Q_n) = \lim I(\chi_{A_n}) = \lim \mu^*(A_n) = \mu^*(A)$ dimana persamaan terakhir diperoleh berdasarkan teorema 3.

$\therefore$ Terbukti !

TEOREMA 18.

Misal $f : x \longrightarrow R$ suatu fungsi yang terukur sedemikian sehingga $f(x) \geq 0$ untuk $\forall x$, maka terdapat suatu barisan $\{Q_n\}$ dari fungsi-fungsi SIMPLE sedemikian sehingga $0 \leq Q_n(x) \uparrow f(x)$ untuk $\forall\ x \in X$.

Bukti :

Tetapkan $A_n^i = \{ x \in X : (i-1)\ 2^{-n} \leq f(x) < i\ 2^{-n}\}$ untuk $\forall n$ dan $i = 1, \ldots, n2^n$ dan $A_n^i \cap A_n^j = \phi$ jika $i \neq j$. Karena f terukur maka semua A_n^i yang ditetapkan juga terukur.

Kemudian didefinisikan $Q_n = \sum_{i=1}^{n2^n} 2^{-n} (i-1)\ \chi_{A_n^i}$ untuk $\forall n$ dan (Q_n) adalah suatu barisan fungsi-fungsi SIMPLE.

Sehingga diperoleh $0 \leq Q_n(x) \leq Q_{n+1}(x) \leq f(x)$ untuk $\forall x$ dan $\forall n$.

Oleh karena itu jika kita tetapkan x yang tertentu maka $0 \leq f(x) - Q_n(x) \leq 2^{-n}$ terpenuhi untuk $\forall n$ yang cukup besar.

Jadi $Q_n(x) \uparrow f(x)$ terpenuhi untuk $\forall x$.

∴ Terbukti !

2.6. UKURAN LEBESGUE

Ukuran Lebesgue merupakan perluasan konsep panjang, luas dan volume. Ukuran Lebesgue beberapa bentuk geometri R^2 menggambarkan luas, sedangkan dalam R^3 menggambarkan volume.

DEFINISI 16.

S merupakan semiring yang mengandung himpunan kosong dan semua himpunan dari bentuk $A = \prod_{i=1}^{n} [\, a_i , b_i)$ dimana $-\infty < a_i < b_i < \infty$ $:\forall i$

Diberikan $\lambda : S \longrightarrow [\, 0, \infty\,)$ yang didefinisikan oleh :

1. $\lambda(\phi) = 0$
2. $\lambda\left(\prod_{i=1}^{n} [\, a_i , b_i) \right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

yang merupakan additif - σ

Fungsi himpunan $\lambda : S \longrightarrow [\, 0, \infty\,)$ yang terdeefinisi di atas adalah suatu ukuran dan disebut Ukuran Lebesgue atas S.

TEOREMA 19.

Setiap himpunan bagian Borel dar R^n terukur Lebesgue.

Bukti :

Misal $-\infty < a_i < b_i < \infty$ untuk $i = 1, \ldots ,n$.

Pilih $m \ni a_i + (1/m) < b_i \; :\forall\; 1 \le i \le n$, sehingga

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i ,b_i) = \bigcup_{k=m}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} [a_i +(1/k),b_i) \right]$$

dan Λ adalah aljabar σ dimana $\prod_{i=1}^{n} (a_i ,b_i) \in \Lambda$

(Λ adalah koleksi semua himpunan yang terukur Lebesgue)

Hal ini berdasarkan Definisi 17 .

Karena setiap himpunan terbuka dapat ditulis sebagai union terhitung dari himpunan-himpunan maka Λ mengandung himpunan terbuka.(Teorema 2)

Oleh karena itu Λ mengandung himpunan Borel diman himpunan Borel beranggotakan aljabar-σ yang dibangun oleh himpunan-himpunan terbuka.(Definisi 5)

$\therefore$ Terbukti !

2.7. FUNGSI ATAS (UPPER FUNCTION)

Dalam sub-bab sebelumnya telah disinggung bahwa fungsi Tangga merupakan bangunan dasar Integral Lebesgue, dimana suatu fungsi Q disebut fungsi tangga bila dan hanya bila terdapat suatu kumpulan berhingga $\{A_1 , \ldots ,A_n\}$ dari himpunan terukur dengan $\mu^*(A_i) < \infty$ untuk i =

1, ... ,n dan bilangan riil a_1 , ... ,a_n sedemikian sehingga $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \; \chi_{A_i}$

Oleh karena itu bilangan riil $I(Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i \; \mu^*(A_i)$.

disebut Integral Lebesgue yang independent terhadap representasi standard.

TEOREMA 20.

Koleksi semua fungsi-fungsi tangga di bawah operasi ordinari merupakan suatu ruang fungsi dan suatu aljabar.

Bukti :

Dalam sub-bab 2.5. telah dijelaskan bahwa fungsi tangga membentuk suatu aljabar.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa koleksi fungsi-fungsi tangga juga merupakan suatu ruang fungsi.

Misal fugsi tangga Q mempunyai representasi standard

$Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \; \chi_{A_i}$ maka $Q^+ = \sum_{i=1}^{n} \max \{a_i ,0\} \; \chi_{A_i}$

Jadi Q^+ merupakan suatu fungsi tangga dan suatu aljabar.

∴ Terbukti !

DEFINISI 17.

Suatu fungsi $f:X \longrightarrow R$ disebut suatu fungsi atas jika terdapat suatu barisan $\{Q_n\}$ dari fungsi-fungsi tangga sedemikian sehingga berlaku :

1. $Q_n \uparrow$ f a.e.

2. $\lim \int Q_n \, d\mu < \sim$

Sehingga dengan Teorema 13. setiap fungsi atas merupakan fungsi terukur dan koleksi semua fungsi atas dapat ditulis denga $\mathcal{U}$.

Jadi setiap fungsi tangga adalah fungsi atas dan fungsi atas belum tentu fungsi positif.

Barisan-barisan fungsi yang memenuhi Definisi 17. merupakan Barisan penghasil untuk f.

Jadi jika f suatu fungsi atas dengan barisan penghasil $\{Q_n\}$ dan $\{\Psi_n\}$ adalah barisan fungsi-fungsi tangga sedemiian sehingga $\Psi_n \uparrow$ f a.e. maka berdasarkan teorema 17. $\lim \int Q_n \, d\mu = \lim \int \Psi_n \, d\mu$. Sehingga $\{\Psi_n\}$ juga suatu barisan penghasil untuk f.

DEFINISI 18.

Misal f suatu fungsi atas dan $\{Q_n\}$ suatu barisan fungsi-fungsi tangga sedemikian sehingga $Q_n \uparrow$ f a.e., mak Integral Lebesque f didefinisikan dengan $\int f_n \, d\mu = \lim \int Q_n \, d\mu$.

TEOREMA 21.

Untuk fungsi-fungsi atas f dan g berlaku :

1. f + g fungsi atas dan $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

2. αf fungsi atas untuk $\forall\ \alpha \geq 0$ dan $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$.

3. $f \vee g$ dan $f \wedge g$ adalah fungsi atas.

Bukti :

Misal diberikan 2 barisan penghasil $\{Q_n\}$ dan $\{\Psi_n\}$ untuk f dan g, maka :

(1) $\{Q_n + \Psi_n\}$ merupakan suatu barisan fungsi-fungsi tangga dan $Q_n + \Psi_n \uparrow f + g$ a. e. sehingga

$$\int (Q_n + \Psi_n)\, d\mu = \int Q_n\, d\mu + \int \Psi_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$
$$= \int (f + g)\, d\mu.$$

(2) Untuk $\alpha = 0$ maka jelas $\alpha f = 0$ dan $\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu = 0$.

Untuk $\alpha > 0$ maka
$$\int \alpha f\, d\mu = \lim \int \alpha Q_n\, d\mu$$
$$= \alpha \lim \int Q_n\, d\mu$$
$$= \alpha \int f\, d\mu.$$

(3) Misal $\{Q_n \wedge \Psi_n\}$ dan $\{Q_n \vee \Psi_n\}$ barian fungsi-fungsi tangga. Karena $Q_n \wedge \Psi_n \uparrow f \wedge g$ dan $\lim \int Q_n \wedge \Psi_n\, d\mu \leq \lim \int Q_n\, d\mu < \infty$ maka $f \wedge g$ merupakan fungsi atas.

Sekarang karena $Q_n \vee \Psi_n \uparrow f \vee g$ a.e. dan dengan menggunakan identitas

$$Q_n \vee \Psi_n = Q_n + \Psi_n - (Q_n \wedge \Psi_n) \text{ maka}$$

$$\int Q_n \vee \Psi_n\, d\mu = \int Q_n\, d\mu + \int \Psi_n - \int Q_n \wedge \Psi_n\, d\mu \uparrow$$
$$\int f d\mu + \int g\, d\mu - \int f \wedge g\, d\mu < \infty .$$

$\therefore$ Terbukti !

TEOREMA 22.

Jika f dan g fungsi atas sedemikian sehingga $f \geq g$ a.e. maka $\int f\, d\mu \geq \int g\, d\mu$.

Dan jika $f \in \mathcal{U}$ berlaku $f \geq 0$ a.e. maka $\int f\, d\mu \geq 0$.

Bukti :

Misal $\{Q_n\}$ dan $\{\Psi_n\}$ barisan-barisan penghasil untuk f dan g, maka $Q_n \wedge \Psi_n \uparrow g$ a.e. $\{Q_n \wedge \Psi_n\}$ adalah barisan penghasil untuk g.

Dengan teorema 14. diperoleh $\int Q_n\, d\mu \geq \int Q_n \wedge \Psi_n\, d\mu$; $\forall$ n. Oleh karena itu $\int f\, d\mu = \lim \int Q_n\, d\mu \geq \lim \int Q_n \wedge \Psi_n\, d\mu = \int g\, d\mu$.

$\therefore$ Terbukti !

TEOREMA 23.

Misal $f : X \longrightarrow R$ suatu fungsi atas.

Jika terdapat suatu barisan fungsi-fungsi atas $\{f_n\}$ sedemikian sehingga $f_n \uparrow f$ a.e. dan $\lim \int f_n\, d\mu < \infty$ maka f suatu fungsi atas dan $\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$

Bukti :

Misal $\{Q_n\}$ adalah barisan fungsi-fungsi tangga sedemikian sehingga $\forall$ i ; $Q_n^i \uparrow_n f_i$ a.e.

Dan $\forall$ n dimisalkan $\Psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} Q_n^i$ sehingga $\forall\ \Psi_n$ adalah fungsi tangga sedemikian sehingga $\Psi_n \uparrow f$ a.a.

Karena $\Psi_n \leq f_n$ a.e. $\forall$ n maka $\lim \int \Psi_n\, d\mu \leq \lim \int f_n\, d\mu < \infty$ berdasarkan Teorema 22. sehingga terlihat bahwa f suatu fungsi atas.

Sekarang $\forall$ i berlaku $Q_n^i \leq \Psi_n$; $\forall$ n $\geq$ i sehingga

$\int f_i \, d\mu = \lim_n \int Q_n^i \, d\mu \leq \lim \int \psi_n \, d\mu$; $\forall$ i

Jadi $\lim \int f_n \, d\mu = \lim \int \Psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

$\therefore$ Terbukti !

TEOREMA 24.

Jika $\{f_n\}$ suatu barisan fungsi-fungsi atas sedemikian sehingga $f_n \downarrow 0$ a.e. maka $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$.

Bukti :

Misal $\varepsilon > 0$ dan fungsi tangga Q_n ; $\forall$ n sedemikian sehingga $0 \leq Q_n \leq f_n$ a.e. dan $\int (f_n - Q_n) \, d\mu = \int f_n \, d\mu - \int Q_n \, d\mu < \varepsilon \, 2^{-n}$ (karena $-Q_n$ juga suatu fungsi atas).

Misal $\Psi_n = \bigwedge_{i=1}^{n} Q_i$; $\forall$ n maka $\{ \Psi_n \}$ adalah suatu barisan fungsi-fungsi tangga dan $\Psi_n \downarrow 0$ a.e. karena $f_n \downarrow 0$ a.e.

Dengan Teorema 15. diperoleh $\lim \int \Psi_n \, d\mu = 0$.

Tetapkan suatu bilangan k sedemikian sehingga $\int \Psi_n \, d\mu < \varepsilon$; $\forall$ n $\geq$ k, sehingga :

$$0 \leq f_n - \Psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} (f_n - Q_i) \leq \bigvee_{i=1}^{n} (f_i - Q_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (f_i - Q_i)$$

$$\text{dan} \quad \int f_n \, d\mu - \int \Psi_n \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \int (f_i - Q_i) < \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \right) = \varepsilon$$

Jadi $0 \leq \int f_n \, d\mu < \varepsilon + \int \Psi_n \, d\mu < 2\varepsilon$; $\forall$ n $\geq$ k

Berarti $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$

$\therefore$ Terbukti !