BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Vektor dan Matriks

2.1.1. Vektor

Vektor berdimensi n adalah suatu susunan atau pasangan teratur dari elemen-elemen yang berupa angka-angka sebanyak n buah, yang disusun baik menurut baris (dari kiri ke kanan) maupun kolom (dari atas ke bawah).

Elemen-elemen dari vektor biasanya disebut komponen-komponen dan dinotasikan dengan huruf latin kecil, sedangkan untuk vektornya dinotasikan dengan huruf latin besar dicetak tebal, karena merupakan besaran yang mempunyai arah. Contoh :

$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, disebut vektor baris

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, disebut vektor kolom.

Dengan demikian, vektor merupakan matriks yang terdiri dari satu baris dan n kolom untuk vektor baris, dan terdiri dari n baris dan satu kolom untuk vektor kolom.

2.1.2 Matriks

Suatu matriks **A** terdiri dari m baris dan n kolom, maka matriks **A** dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\, a_{ij} \,).$$

di mana, i = 1, 2, …, m dan j = 1, 2, …, n.

$\mathbf{A}_{m \times n}$ dibaca matriks A berordo m kali n, artinya matriks **A** mempunyai m baris dan n kolom, dan ditulis $\mathbf{A}_{m.n}$ atau **A** saja. Sedangkan, a_{ij} merupakan elemen dari matriks **A** pada baris ke-i dan kolom ke-j, di mana i dan j merupakan indeks (subscript), yaitu petunjuk letak atau posisi bagi setiap elemen.

Elemen-elemen : a_{11}, a_{22}, …, a_{mn} (m = n), disebut sebagai diagonal pokok (*main diagonal*). Ajabar pada matriks meliputi : penjumlahan, pengurangan, perkalian.

2. 1. 3 Jenis-jenis Matriks

a). Matriks Satuan (*Identity Matrix*)

Matriks Satuan atau matriks identitas adalah suatu matriks diagonal di mana elemen-elemen pada diagonal pokoknya mempunyai nilai satu dan semua elemen di luar diagonal pokoknya mempunyai nilai nol. Matriks satuan biasanya diberi simbol $\mathbf{I}_n$ dan dinotasikan, sebagai berikut :

$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \mathbf{I}_n$; $a_{ij} = 1$ untuk setiap i = j dan $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$,

di mana i = 1, 2, …, n dan j = 1, 2, …,n.

b). Matriks Simetris (*Symetric Matrix*)

Matriks Simetris adalah suatu matriks kuadrat di mana elemen-elemen yang terletak di bawah diagonal pokok merupakan cermin (bayangan) dari elemen-elemen yang terletak diatas diagonal pokok. Artinya, suatu matriks $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dikatakan matriks simetris, jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i = 1, 2, …, n dan j = 1, 2, …,n.

c). Transpose Suatu Matriks

Transpose dari matriks **A** adalah suatu matriks baru yang mana elemen-elemennya diperoleh dari elemen-elemen matriks **A** dengan syarat bahwa baris-baris dan kolom-kolom dari matriks **A** menjadi kolom-kolom dan baris-baris pada matriks yang baru. Transpose dari matriks **A** diberi simbol $\mathbf{A}^T$ dan di notasikan sebagai berikut:

$\mathbf{A}^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$,untuk setiap i = 1, 2, …, m dan j = 1, 2, …,n.

d). Invers Suatu Matriks

Suatu matriks kuadrat **A** dikatakan mempunyai invers atau matriks balikan, jika matriks tersebut memenuhi sifat $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I_n$. $\mathbf{A}^{-1}$ disebut invers dari matriks **A**.

e). Matriks Partisi

Untuk maksud-maksud tertentu, seringkali suatu matriks harus dibagi-bagi menjadi beberapa matriks yang lebih kecil yang disebut sub-matriks. Matriks yang elemen-elemennya terdiri dari sub-sub matriks dinamakan Matriks Partisi. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh di bawah ini :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Maka,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ adalah matriks partisi}$$

di mana, $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$ dan $\mathbf{A}_{22}$ adalah Sub-matriks dari A.

f). Determinan Suatu matriks

Jika **A** adalah sebuah matriks kuadrat yang ber-ordo (nxn), maka terdapat suatu skalar yang bersesuaian dengan **A** yang disebut determinan matriks **A**, dan dinotasikan dengan **Det A** atau dengan simbol $|\mathbf{A}|$. Determinan dari matriks **A** didefinisikan sebagai berikut :

$$
\textbf{Det A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} a_{kn} \; D^{(k)}
$$

di mana, $D^{(k)}$ adalah determinan (n-1) x (n-1) yang terjadi jika kolom yang terakhir dan baris yang ke-k dihapuskan.

Jika **Det A** = 0, maka matriks **A** disebut sebagai Matriks Singular. Dan, jika **Det A** $\neq$ 0 maka matriks **A** disebut sebagai Matriks Non-Singular.

g. Nilai Eigen Suatu Matriks

Jika **A** adalah sebuah matriks kuadrat berordo (n x n), maka sebuah vektor **X** $\neq$ 0 di R^n dikatakan sebagai vektor eigen dari **A**, jika **A X** adalah kelipatan skalar dari **X**, yaitu :

$$\mathbf{A\,X} = \lambda \mathbf{X} \qquad \text{.....(2. 11)}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut sebagai nilai eigen (*eigen value*) dari **A**, dan **X** disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Jika persamaan (2. 11) ditulis dalam bentuk persamaan homogen, maka diperoleh :

$$(A - \lambda I)\ \mathbf{X} = 0 \qquad \text{.....(2. 12)}$$

di mana, **I** adalah matriks identitas yang berordo sama dengan matriks **A**. Sebagai ilustrasi, misalkan diberikan suatu matriks kuadrat **A** dengan n = 2, maka diperoleh :

$$
\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

atau,

$$(a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}\, x_2 = 0$$

$$a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 = 0$$

Jika matriks (**A** - λ**I**) adalah matriks non-singular, maka matriks tersebut mempunyai solusi trivial (**X** = 0). Tetapi yang lebih menarik dan penting adalah jika matriks (**A** - λ**I**) mempunyai solusi non-trivial, dan hal ini akan tercapai jika matriks tersebut adalah matriks singular, yaitu :

$$\textbf{Det}\,(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{.....(2. 13)}$$

Persamaan (2. 13) akan menghasilkan suatu polinomial dengan variabel yang tak diketahui λ, yang kemudian bisa dipecahkan untuk λ dan akhirnya akan diperoleh nilai eigen.

2.2. Bentuk Kuadratik

Bentuk kuadratik f (**X**) adalah suatu bentuk fungsi tak linier yang hanya mempunyai n suku-suku derajat ke dua, atau dapat dikatakan, bentuk kuadratik f (**X**) dalam n variabel dinyatakan dengan derajat ke dua yang dapat ditulis, sebagai berikut :

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C}\ \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j$$

atau,

$$f(\mathbf{X}) = c_{11}\ x_1^2 + c_{12}\ x_1\ x_2 + \ldots + c_{1n}\ x_1\ x_n + \\ c_{21}\ x_2\ x_1 + c_{22}\ x_2^2 + \ldots + x_{2n}\ x_2\ x_n + \ldots + \\ c_{n1}\ x_n\ x_1 + c_{n2}\ x_n\ x_2 + \ldots + c_{nn}\ x_n^2$$

di mana, $\mathbf{X} = [x_1, x_2 \ldots, x_n]$ adalah vektor kolom dan $\mathbf{C} = (c_{ij})$ adalah matriks kuadrat (n x n) untuk setiap i = 1, 2, ..., n dan j = 1, 2, ..., n.

Matriks **C** dapat diasumsikan sebagai matriks simetris, karena setiap elemen dari pasangan koefisien c_{ij} dan c_{ji} untuk setiap i dan j, dapat diwakili oleh $\frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$ tanpa merubah nilai matrks tersebut. Dengan demikian, suatu matriks dalam bentuk kuadratik selalu dapat dikatakan sebagai matriks simetris.

Jika $\mathbf{C} = (c_{ij})$ adalah matriks simetris, maka bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$ dikatakan sebagai :

1. Definit positif, jika $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} > 0$ untuk setiap $\mathbf{X} \neq 0$.
2. Semi-definit positif, jika $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} \geq 0$ untuk setiap **X** dan ada $\mathbf{X} \neq 0$ sedemikian sehingga $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} = 0$.
3. Definit negatif, jika $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} < 0$ untuk setiap $\mathbf{X} \neq 0$.
4. Semi-definit negatif, jika $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} \leq 0$ untuk setiap **X** dan ada $\mathbf{X} \neq 0$ sedemikian sehingga $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} = 0$.
5. Indefinit, jika $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} > 0$ untuk beberapa **X** dan $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} < 0$ untuk beberapa **X** yang lain.

Dalam hal ini dapat ditunjukkan bahwa syarat-syarat untuk menyatakan kasus-kasus di atas diberikan oleh :

1. Bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$ adalah definit positif (semi-definit positif) jika semua akar karakteristik dari **C** adalah positif (non-negatif). Dalam hal ini, matriks **C** adalah definit positif (semi-definit positif).
2. Bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$ adalah definit negatif jika semua akar karakteristik dari **C** mempunyai tanda $(-1)^k$ untuk setiap k = 1, 2, …, n. Dalam hal ini, matriks **C** adalah definit negatif.
3. Bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$ adalah semi-definit negatif jika semua akar karakteristik dari **C** mempunyai harga nol atau bertanda $(-1)^k$ untuk setiap k = 1, 2, …, n. Dalam hal ini, matriks **C** adalah semi-definit negatif.

Catatan : Akar karakteristik adalah nilai eigen (λ_i) dari suatu matriks yang berordo (n x n), untuk setiap i = 1, 2, …, n.

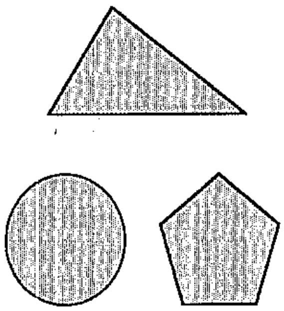
2. 3. Konveksitas (Kecembungan)

2. 3. 1 Himpunan Konveks

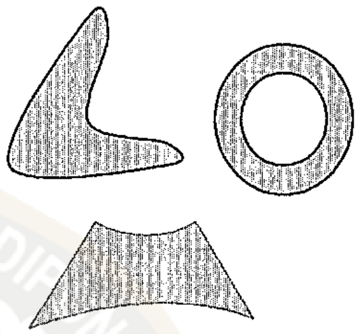
Definisi 2.3. 1. 1 :

Misalkan S adalah suatu himpunan titik-titik dari suatu bidang (2 dimensi) atau ruang (3 dimensi). Jika untuk setiap dua titik pada himpunan S,suatu garis lurus yang menghubungkan seluruhnya terletak pada himpunan S, maka himpunan S disebut himpunan konveks (cembung).

Perhatikan contoh-contoh himpunan konveks pada Gambar (2. 2). Semua himpunan pada Gambar 2. 2. a merupakan himpunan konveks dan semua himpunan pada Gambar 2. 2. b adalah himpunan non-konveks.



Gambar 2.2 a Himpunan Konveks



gambar2.2.b.Himpunan Non-Konveks

Gambar 2. 2 Himpunan Konveks dan Non-Konveks

Dalam ruang berdimensi 4 atau lebih, interpretasi geometris menjadi sulit karena itu diperlukan definisi himpunan konveks secara aljabar. Untuk tujuan ini diperlukan pengertian akan konsep *convex combination of vector*, yang merupakan suatu jenis khusus dari *linear combination*. Suatu *linear combination* dari dua vektor $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$k_1 \ \mathbf{X}_1 + k_2 \ \mathbf{X}_2$$

di mana k_1 dan k_2 merupakan skalar. Jika kedua nilai k tersebut terletak pada interval tertutup [0, 1] dan jumlahnya 1, *linear combination* dikatakan sebagai *convex combination* dan dirumuskan sebagai berikut :

$$\lambda \ \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \ \mathbf{X}_2 \text{ di mana } (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Dengan demikian definisi (2.3.11) dapat juga dinyatakan dalam definisi aljabar sebagai berikut:

Suatu himpunan S adalah konveks jika dan hanya jika, untuk dua titik $u \in S$ dan $v \in S$, dan untuk setiap skalar $\lambda \in [0, 1]$, maka berlaku :

$$[\, w = \lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v} \,] \in S.$$

Definisi ini dapat diterapkan tanpa memperhatikan dimensi ruang di mana terdapat vektor **u** dan **v**.

2. 3. 2 Fungsi Konveks

Definisi 2. 3. 2. 1 :

Misalkan, fungsi $f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ didefinisikan sebagai suatu himpunan dari titik-titik yang berada dalam suatu himpunan konveks $S \subset R^n$. Maka fungsi $f(\mathbf{X})$ disebut sebagai fungsi konveks (*convex function*), jika :

$$f[\, \lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{X}_2 \,] \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$.

Sebaliknya, suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan sebagai fungsi konkaf (*concave function*), jika $-f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

Teorema 2. 3. 2. 2 :

Fungsi bentuk kuadrat $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C} \; \mathbf{X}$ *yang semi-definit positif adalah fungsi konveks, untuk semua* $\mathbf{X}$ *di* R^n.

Bukti :

Diketahui 2 buah titik $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ di R^n dan $0 \le \lambda \le 1$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}$, maka berlaku :

$$f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

atau,

$$f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - \lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \le 0 \quad \text{.....(2. 14)}$$

Karena $\mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_2$, maka ruas kiri dari persamaan (2. 14) dapat ditulis :

$$[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2]^T\mathbf{C}\,[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - \lambda \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_1 - (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_2$$

$$= \lambda^2 \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)^2\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 + 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_2 - \lambda \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_1 -$$

$$(1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)[(1-\lambda)\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2\ ] +$$

$$2\lambda(1-\lambda)\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2$$

$$= \lambda(\lambda-1)\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_1 + \lambda(\lambda-1)\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 - 2\lambda(1-\lambda)\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2$$

$$= \lambda(\lambda-1)[\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\ \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2 - 2\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{C}\mathbf{X}_2\ ]$$

$$= \lambda(\lambda-1)[\ (\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)^T\ \mathbf{C}\ (\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)\ ] \quad \text{.....(2. 15)}$$

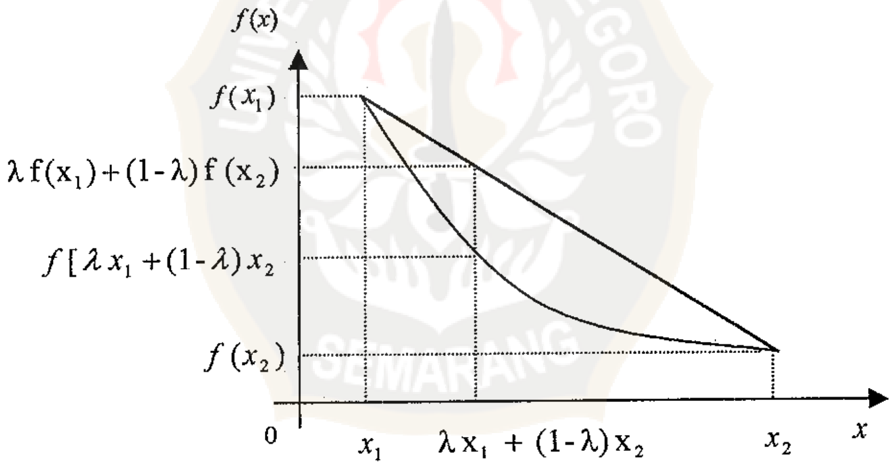
Karena bentuk kuadrat $\mathbf{X}^T\mathbf{C}\ \mathbf{X} \ge 0$ (semi-definit positif) untuk beberapa $\mathbf{X}$, maka untuk persamaan (2. 15) berlaku :

$$[\ (\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)^T\ \mathbf{C}\ (\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)\ ] \ge 0.$$

Karena $\lambda(\lambda - 1) < 0$ untuk $0 < \lambda < 1$ dan $\lambda(\lambda - 1) = 0$ untuk $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$, maka persamaan (2. 15) akan selalu lebih kecil atau sama dengan nol untuk semua vektor $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$, yang mana telah ditunjukkan oleh persamaan (2. 14). Sehingga $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C}\ \mathbf{X}$ yang semi-definit positif adalah konveks untuk setiap $\mathbf{X}$ di R^n.

teorema terbukti).■

Catatan : Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi konveks mutlak atau fungsi konkaf mutlak, jika hubungan pertidaksamaan tersebut mempunyai tanda "<" atau ">" untuk setiap $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in$ S dan $\lambda \in (0, 1)$.

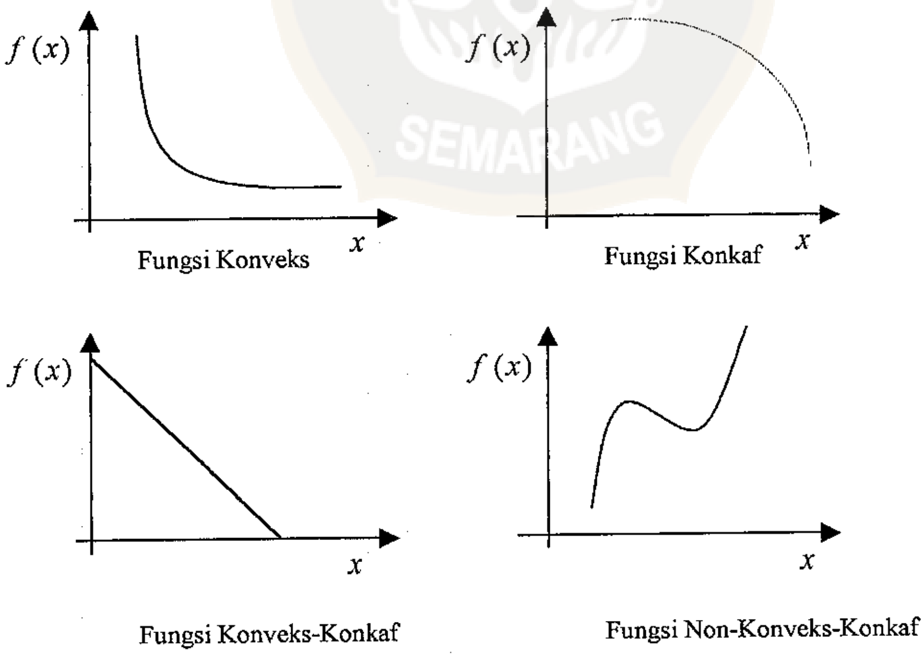


Gambar 2. 4

Dalam kenyataanya, untuk mengetahui apakah suatu fungsi adalah konveks atau konkaf maka digunakan pengujian sebagai berikut :

1. f (**X**) dikatakan fungsi konveks, jika f (**X**) adalah definit positif atau semi definit positif.
2. f (**X**) dikatakan fungsi konkaf, jika f (**X**) adalah definit negatif atau semi definit negatif.

Secara geometris dapat diartikan bahwa, suatu fungsi dikatakan fungsi konveks jika segmen garis yang menghubungkan dua buah titik pada fungsi, seluruhnya akan terletak di atas fungsi tersebut. Suatu fungsi dikatakan fungsi konkaf jika segmen garis yang menghubungkan dua buah titik pada fungsi, seluruhnya akan terletak di bawah fungsi tersebut. Perhatikan gambar-gambar di bawah ini :



Gambar 2. 5 Fungsi Konveks dan Fungsi Konkaf

Definisi 2. 3. 2. 3

Suatu fungsi f (**X**) dikatakan mempunyai minimum global di titik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika, $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S.

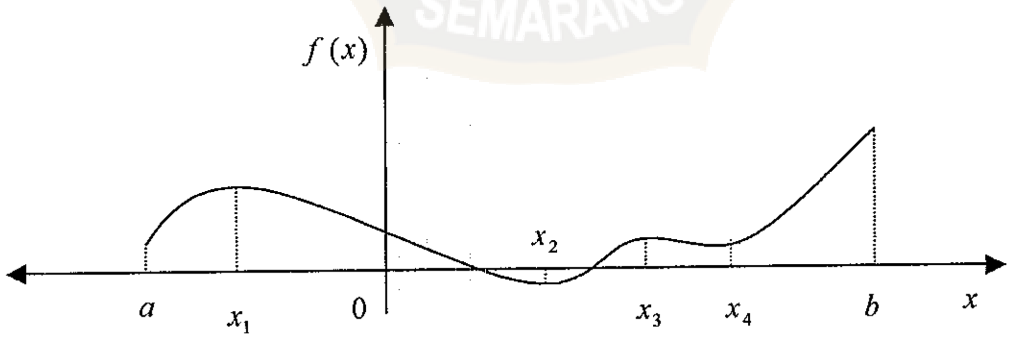
Jika $f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X})$, maka titik $\mathbf{X}^*$ adalah maksimum global dari fungsi $f(\mathbf{X})$.

Definisi 2. 3. 2. 4

Suatu fungsi dikatakan mempunyai sebuah minimum lokal di titik $\mathbf{X}^*$ pada suatu himpunan S, jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S, di mana $\left| \mathbf{X}^* - \mathbf{X} \right| < \varepsilon$.

Jika $f(\mathbf{X}^*) \geq f(\mathbf{X})$, maka titik $\mathbf{X}^*$ adalah maksimum lokal dari fungsi $f(\mathbf{X})$.

Untuk jelasnya, pengertian mengenai minimum atau maksimum global dan lokal dapat diilustrasikan dalam ruang berdimensi satu sebagai berikut :



Gambar 2. 6 Grafik Optimal Lokal Dan Optimal Global

Fungsi $f(\mathbf{X})$ pada gambar (2. 6) hanya didefinisikan pada [a, b], maka fungsi $f(\mathbf{X})$ mempunyai :

a. Minimum lokal di a dan x_4, dan minimum global di x_2.

b. Maksimum lokal di x_1, x_3 , dan maksimum global di b.

Teorema 2. 3. 2. 5

Jika f ($\mathbf{X}$) adalah fungsi konveks pada suatu himpunan konveks S *maka f ($\mathbf{X}$) mempunyai paling banyak satu minimum lokal. Jika terdapat suatu minimum yang demikian, maka dikatakan sebagai minimum global dan dicapai pada himpunan konveks.*

Bukti :

Misalkan, terdapat suatu minimum lokal pada titik $\mathbf{X}^*$ untuk sembarang $\mathbf{X} = \overline{\mathbf{X}} \in$ S.

Menurut definisi dari minimum lokal dan fungsi konveks, maka diperoleh :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f[(1-\lambda)\,\mathbf{X}^* + \lambda\,\overline{\mathbf{X}}\,] \leq (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*) + \lambda f(\overline{\mathbf{X}}) \quad .....(2.16)$$

di mana, λ adalah suatu bilangan positif terkecil secukupnya.

Dari persamaan (2. 16) diperoleh :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*) + \lambda f(\overline{\mathbf{X}})$$

sehingga,

$$\lambda\, f(\mathbf{X}^*) \leq \lambda f(\overline{\mathbf{X}}).$$

Dan, karena $\lambda > 0$ maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\overline{\mathbf{X}})$ mengakibatkan $f(\mathbf{X}^*)$ adalah suatu minimum global dan titik $\overline{\mathbf{X}} \in$ S merupakan titik sembarang. Jika $\mathbf{X}^*$ dan $\mathbf{X}'$ adalah dua titik yang mengakibatkan fungsi f (**X**) mencapai minimum z_0, maka untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ diperoleh :

$$z_0 \leq f[(1-\lambda)\,\mathbf{X}^* + \lambda\,\mathbf{X}'] \leq (1-\lambda)f(\mathbf{X}^*) + \lambda f(\mathbf{X}')\ .$$

Sehingga, f (**X**) juga mencapai minimum pada $\mathbf{X} = (1-\lambda)\,\mathbf{X}^* + \lambda\,\mathbf{X}'$. Dengan demikian, himpunan dari solusi-solusinya merupakan himpunan konveks.

(teorema terbukti).■

Teorema 2. 3. 2. 6

Misalkan, S *adalah himpunan yang tidak kosong dan* S $\subset$ R^n *yang memenuhi kendala-kendala*

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0, \quad \textit{untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{X} \geq 0$$

Jika g_i (**X**) *adalah fungsi konveks untuk setiap i, maka* S *merupakan himpunan konveks.*

Bukti :

Misalkan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in$ S. Didefinisikan, $\overline{\mathbf{X}} = \lambda\,\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{X}_2$ untuk $0 \leq \lambda \leq 1$. Akan ditunjukkan bahwa titik $\overline{\mathbf{X}}$ memenuhi kendala-kendala yang membatasinya.

Diketahui, $\overline{\mathbf{X}} \geq 0$. Karena g_i (**X**) adalah fungsi konveks, maka :

$$g_i(\overline{\mathbf{X}}) = g_i[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] \leq \lambda \, g_i(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)\, g_i(\mathbf{X}_2)$$

Tetapi, karena $g_i(\mathbf{X}_1) \leq 0$ dan $g_i(\mathbf{X}_2) \leq 0$ untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ maka :

$$g_i(\overline{\mathbf{X}}) \leq \lambda \, g_i(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)\, g_i(\mathbf{X}_2) \leq 0.$$

Jadi, S adalah himpunan konveks. (teorema terbukti).■

Berdasarkan uraian dari teorema (2. 3. 2. 5) dan teorema (2. 3. 2. 6) maka, untuk persoalan optimasi yang meminimumkan (memaksimumkan) fungsi f (**X**) terhadap kendala g_i (**X**) ≤ 0 untuk setiap i = 1, 2, …, m dan $\mathbf{X} \geq 0$, jika f (**X**) dan semua g_i (**X**) adalah fungsi konveks, maka suatu minimum lokal (maksimum lokal) adalah juga minimum global (maksimum global).

2. 4 Vektor Gradien dan Titik Pelana (*Saddle Point*)

Definisi 2. 4. 1 :

Jika suatu fungsi f (**X**) dan semua turunan pertamanya adalah kontinu pada suatu himpunan S $\subset$ R^n, maka vektor gradien dari f (**X**) pada titik $\mathbf{X}^*$ didefinisikan sebagai suatu vektor kolom berdimensi n dan dinotasikan dengan $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ untuk setiap $\mathbf{X}^* \in$ S sehingga :

$$\nabla f(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} \\ : \\ : \\ \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

di mana $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ merupakan suatu vektor yang tegak lurus dengan garis bentuk (kontur) $f(\mathbf{X})$ yang melalu titik $\mathbf{X}^*$.

Defenisi 2. 4. 2 :

Misal F(X) fungsi berharga riil yang diferensial dua kali dalam R^n dan misal $\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X}$ adalah suatu persekitaran dari $\mathbf{X}$ dalam R^n dimana $(\Delta\mathbf{X})^T = [\partial x_1 \quad \partial x_2 \quad \cdots \quad \partial x_n]$ dan $(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X})^T = [x_1+\partial x_1 \quad x_2+\partial x_2 \quad \cdots \quad x_n+\partial x_n]$

Deret taylor untuk fungsi dari n variabel dapat variabel dapat ditulis

$$f(x_1+\partial x_1 \quad x_2+\partial x_2 \cdots \quad x_n+\partial x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)+$$

$$(\partial x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+\partial x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\partial x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})+\frac{1}{2}(\partial x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+\partial x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\partial x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})^2 f + \text{suku-}$$

suku sisa.

Dalam bentuk vektor dapat ditulis dengan :

$$f(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})+(\Delta\mathbf{X})^T \nabla f(\mathbf{X})+\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{X})^T \nabla^2 f(\mathbf{X})(\nabla\mathbf{X}) + \text{suku-suku sisa.}$$

Dari persamaan diatas dapat didefenisikan matriks Hessian n x n dari fungsi f(X) yaitu :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \nabla^2 f(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right] ;i , j = 1, 2, \cdots, n$$

Matriks Hessian jika elemen-elemenya merupakan turunan parsial kedua dari f(X). Matriks Hessian diberi simbol **H** atau $\nabla^2 f$, dan ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

Karena f(**X**) telah diasumsikan dapat diturunkan dua kali secara kontinu, maka turunan-turunan parsial silangnya adalah sama, yaitu :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

di mana, i = 1,2,..., n dan j = 1,2, ... , n .

Teorema 2. 4. 3 :

Jika f (**X**) *didefinisikan pada himpunan konveks* S *yang terbuka dan* f (**X**) *dideferensiabel di* **X**, *maka* f(**X**) *adalah konveks jika dan hanya jika berlaku* :

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$$

untuk setiap $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in$ S.

- *Syarat Cukup*

Jika diketahui $f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \nabla f(\mathbf{X}_2)$, dan dibuktikan bahwa $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

Bukti :

Untuk $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$, misalkan $\mathbf{X}_3 \in S$ sehingga

$$\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2.$$

Maka, untuk $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_3$ diperoleh :

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_3) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \text{.....(2. 17)}$$

Dan, untuk $\mathbf{X}_2$ dan $\mathbf{X}_3$ diperoleh :

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_3) \geq (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \text{.....(2. 18)}$$

Kalikan persamaan (2. 17) dengan λ dan persamaan (2. 18) dengan $(1-\lambda)$, kemudian dijumlahkan. Maka diperoleh :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_3) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_3) \geq$$
$$\lambda (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3) + (1-\lambda)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^T \nabla f(\mathbf{X}_3) \text{ atau}$$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) - (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_3) + [\lambda \mathbf{X}_1^T + (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T] \nabla f(\mathbf{X}_3) +$$
$$- \mathbf{X}_3^T \nabla f(\mathbf{X}_3) \qquad \text{.....(2. 19)}$$

Substitusikan $\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2$ pada persamaan (2. 19), maka diperoleh :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2]$$

Dengan demikian, $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks.

- *Syarat Perlu*

Diketahui $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konveks, dan dibuktikan bahwa :

$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_2)$.

Bukti :

Untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$, maka berlaku :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2].$$

Kurangkan sisi kiri dan sisi kanan dengan $f(\mathbf{X}_2)$, maka :

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_2) \geq f[\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - f(\mathbf{X}_2)$$

atau,

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq \frac{f[\lambda \mathbf{X}_1 - (1-\lambda)\mathbf{X}_2] - f(\mathbf{X}_2)}{\lambda}.$$

Ambil suatu limit pada sisi kanan, untuk λ mendekati 0, maka diperoleh,

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \geq (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T \; \nabla f(\mathbf{X}_2).$$

(teorema terbukti).■

Teorema 2. 4. 4 :

Misalkan $f(X)$ adalah fungsi konveks yang diferensiabel secara kontinu, yang didefinisikan dalam suatu himpunan konveks S. Misalkan $\mathbf{X}^* \in S$, maka $f(\mathbf{X}^*) \leq f(X)$ untuk $X \in S$ (dalam hal ini, $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(X)$ untuk setiap $X \in S$), jika dan hanya jika, $(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T \; \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$ untuk setiap $X \in S$.

- *Syarat Perlu*

Diketahui $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$, dan $\mathbf{X}^*$ meminimumkan f(X) untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan dibuktikan bahwa $(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$.

Bukti :

Jika $f(\mathbf{X})$ konveks dan S adalah suatu himpunan konveks, maka untuk $\mathbf{X}^*$ sembarang titik minimum, berlaku :

$$f(\mathbf{X}^*) \leq f[\lambda\, \mathbf{X} + (1-\lambda)\, \mathbf{X}^*]$$

untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan $0 \leq \lambda \leq 1$.

Untuk $\lambda > 0$, maka :

$$\frac{f[\mathbf{X}^* + \lambda(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)] - f(\mathbf{X}^*)}{\lambda} \geq 0.$$

Ambil suatu limit untuk λ mendekati 0, maka diperoleh :

$$(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0.$$

- *Syarat Cukup*

Diketahui $(\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0$, untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S. dan dibuktikan bahwa

$f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S

Bukti :

Dari teorema 2. 5. 2 diperoleh :

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^*) \geq (\mathbf{X}-\mathbf{X}^*)^T \ \nabla f(\mathbf{X}^*) \geq 0.$$

Maka, $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$ untuk setiap $\mathbf{X} \in$ S dan, titik $\mathbf{X}^*$ meminimumkan $f(\mathbf{X})$ pada himpunan S.

Untuk suatu titik $\mathbf{X}_1$ yang tidak minimum dan, jika untuk beberapa $\mathbf{X}_2$ diperoleh $f(\mathbf{X}_1) \geq f(\mathbf{X}_2)$, maka menurut teorema 2. 4. 2 :

$$0 \geq f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) \geq (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^T \ \nabla f(\mathbf{X}_1)$$

(teorema terbukti).■

Definisi 2. 4. 5 :

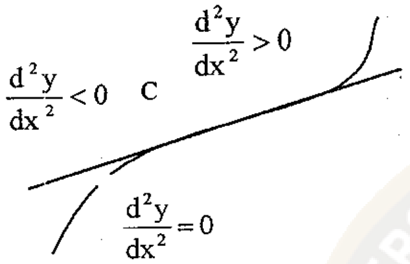
Suatu titik $(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ dengan $\lambda^* > 0$ dan $\mathbf{X}^* \in$ S disebut sebagai Titik Pelana (*Saddle Point*) dari fungsi $L(\mathbf{X}, \lambda)$, jika :

$$L(\mathbf{X}^*, \lambda) \leq L(\mathbf{X}^*, \lambda^*) \leq L(\mathbf{X}, \lambda^*)$$

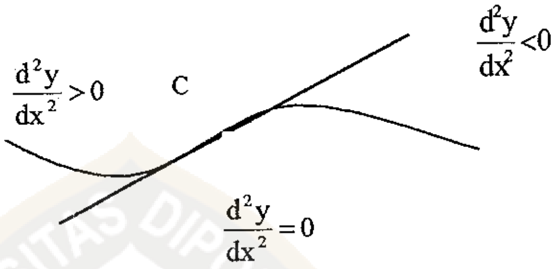
untuk semua $\mathbf{X} \in$ S dan semua $\lambda \geq 0$.

ika kondisi di atas dipenuhi, maka fungsi $L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ akan memberikan suatu minimum terhadap $\mathbf{X}^*$ dan suatu maksimum terhadap λ^*, yaitu $L(\mathbf{X}, \lambda^*)$ mempunyai minimum terhadap $\mathbf{X}$ dan $L(\mathbf{X}^*, \lambda)$ mempunyai maksimum terhadap λ.

Syarat titik pelana adalah $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, dan tidak diharuskan dy/dx= 0, pada titik belok itu.



Gambar 2. 7. a



Gambar 2. 7.b

Pada gambar (2. 7. a) grafiknya berubah dari konkaf menjadfi konvex, sedangkan pada gambar (2. 7. b) grafiknya berubah dari konvex menjadi konkaf. Pada gambar tersebut, garis singgung pada titik x = c menembus grafik y = *f*(**X**) dan titik perpotongan itu dinamakan titik belok (*sadlle point*).