BAB II

MATERI DASAR

2.1 VEKTOR DAN MATRIKS

Vektor adalah suatu garis yang mempunyai arah. Di dalam ruang berdimensi n (R^n) vektor dinyatakan sebagai n-tupel bilangan riil.

2.1.1 TEORI RUANG VEKTOR DAN MATRIKS

Ambil R sebagai himpunan bilangan riil dengan elemen-elemen skalar α, β, ...

Definisi 1 Suatu himpunan V yang elemen-elemennya disebut vektor, dinamakan *ruang vektor riil* (biasa disingkat "ruang vektor") jika :

1. Untuk setiap pasangan vektor-vektor x, $y \in V$ terdapat vektor $x + y \in V$ disebut jumlahan dari x dan y. Dan untuk semua vektor-vektor dalam V :

   (i) $x + y = y + x$

   (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

   (iii) $\forall\ x \in V,\ \exists\ o \in V,\ x + o = x$

   (iv) $\forall\ x \in V,\ \exists\ -x \in V,\ x + (-x) = o$

2. Untuk setiap $\alpha \in R$ dan $x \in V$, terdapat vektor $\alpha x \in V$, disebut product dari α dan x , dan untuk semua skalar dan vektor :

   (i) $\alpha\ (\beta x) = (\alpha\beta)\ x$

   (ii) $Ix = x$

(iii) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$

(iv) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Suatu contoh klasik dari ruang vektor riil adalah himpunan R^n, yaitu himpunan dari n-tupel berurutan bilangan riil, merupakan penyajian vektor-vektor dengan banyak komponen n buah. Penyajian n-tupel dari R^n adalah

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , x_i \in R \qquad , i = 1, 2, \ldots, n$$

dan x_i disebut koordinat ke-i dari x . Tapi untuk penyajian secara khusus sering ditulis sebagai satu baris, yaitu $x' = (x_1, \ \ldots \ , x_n)$ yang tidak lain merupakan transpose vektor $x \in R^n$.

Definisi 2 Ambil V_1 dan V_2 dua ruang vektor. Jumlahan langsung (*direct sum*) dari V_1 dan V_2 dinyatakan dengan $V_1 \oplus V_2$ adalah himpunan semua pasangan $\langle x,y \rangle$, $x \in V_1$ dan $y \in V_2$ dengan operasi linier didefinisikan

$$\alpha_1 \langle x_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y_2 \rangle \equiv \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ , \ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle$$

Pandang V suatu ruang vektor dan M suatu himpunan bagian bukan himpunan kosong dari V, sebut $M \subseteq V$ disebut *Ruang bagian* dari V jika untuk setiap x, $y \in M$ dan $\alpha, \beta \in R$, $\alpha x + \beta y \in M$. Dan jika ruang bagian M berdimensi hingga maka $\dim (M) \le \dim (V)$.

Definisi 3 Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n bila dapat ditemukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in V$ yang independent linier., sedangkan setiap himpunan (n+1) vektor-vektor $\in V$ selalu dependent linier . Dengan perkatan lain, banyaknya maksimum vektor-vektor $\in V$ yang independent linier adalah n.

Definisi 4 Suatu vektor v dikatakan *kombinasi linier* dari vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bila terdapat skalar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ sedemikian hingga $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Definisi 5 Himpunan n buah vektor $\{u_1, \ldots, u_n\}$ disebut *dependent linier* bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Dalam hal lain, disebut *independent linier* bila $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ hanya terpenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Definisi 6 Setiap himpunan n vektor-vektor yang independen linier $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n disebut *basis* dari ruang vektor.

Definisi 7 Fungsi A didefinisikan pada V ke W disebut *transformasi linier* jika

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$$

untuk semua $x_1, x_2 \in V$ dan $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, V dan R ruang vektor.

Himpunan dari semua transformasi pada V ke W dilambangkan dengan $\mathcal{L}(V,W)$. Ambil ruang vektor V dan W dari dimensi m dan n. Transformasi linier pada V ke W akan menghasilkan suatu deretan baris dan kolom m x n dari skalar riil yang biasa disebut *matriks*. Matrik biasa ditulis dengan huruf besar dan secara lengkap ditulis matriks $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} . Dimana indeks ij menyatakan baris ke-i dan kolom ke-j dari elemen-elemen tersebut.

Pandang suatu matriks $A = (a_{ij})$, i = 1,2 ... ,m dan j = 1,2, ... ,n , yang berarti banyaknya baris = m dan banyaknya kolom = n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bisa juga ditulis $A_{(mxn)} = (a_{ij})$, di mana (m x n) disebut *ordo* dari matriks. Selanjutnya ruang vektor dari matriks riil m x n ini dilambangkan dengan $\mathcal{L}_{n,m}$, yaitu ruang matriks m x n yang menyatakan suatu transformasi linier dari R^n ke R^m.

Definisi 8 Suatu *inner product* pada ruang vektor V adalah fungsi bilangan riil $V \times V$ (dari ruang vektor V ke V), dilambangkan (.,.) atau <.,.> dan didefinisikan sebagai $(x,y) = \sum_i x_i y_i$ dengan x_i dan y_i masing-masing elemen dari X dan $Y \in V$ mempunyai sifat-sifat :

(i) $(x,y) = (y,x)$

(ii) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ y) = \alpha_1(x_1,y) + \alpha_2(x_2,y)$

(iii) $(x,x) \geq 0$ dan $(x,x) = 0$ bhb $x = 0$.

Dari (i) dan (ii) didapat $(x,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(x,y_1) + \alpha_2(x,y_2)$. Dengan kata lain, inner product adalah linier dalam tiap variabel jika variabel yang lain tetap. Dan suatu ruang vektor V yang memuat inner product disebut *ruang inner product* dan ditulis $(V,(.,.))$.

Proposisi 1 Andaikan $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ basis untuk ruang vektor V, fungsi $(.,.)$ didefinisikan pada $V\mathrm{x}V$ dengan

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \text{ di mana } x = \sum_i \alpha_i x_i \text{ dan } y = \sum_i \beta_i x_i$$

adalah inner product pada V.

Bukti : (x,y) dikatakan inner product karena mempunyai sifat-sifat:

(i) $(x,y) = (y,x)$ pasti.

(ii) Jika $x = \sum_i \alpha_i x_i$ dan $z = \sum_i \gamma_i x_i$ maka sesuai definisi $(.,.)$ pada proposisi 1 di atas

$$(\alpha x + \gamma z,\ y) = \sum_i (\alpha\alpha_i + \gamma\gamma_i)\beta_i = \alpha\sum_i \alpha_i\beta_i + \gamma\sum_i \gamma_i\beta_i$$

$$= \alpha(x,y) + \gamma(z,y).$$

Sehingga kelinieritasannya terpenuhi.

(iii) $(x,x) = \sum_i \alpha_i^2$ akan sama dengan nol bila dan hanya bila semua α_i adalah nol dan hal ini ekivalen dengan $x = 0$.

Jadi (x,y) memenuhi semua sifat-sifat dari inner product. ■

Sehingga untuk sebarang vektor $x \in V$, maka x dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari skalar-skalar α_i yang independen.

Andaikan $V = R^m$ dan $W = R^n$ dengan inner product, jadi kita mempunyai inner product $(.,.)$ pada $\mathscr{L}_{m,n}$.

Untuk $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij}) \in \mathscr{L}_{m,n}$.

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{ij}$$

Jika $C = AB'$: n x n maka $C_{ii} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{ij}$ i = 1,...,n.

Dimana B' adalah transpose dari B sehingga bila $B = (b_{ij})$ maka $B' = (b_{ji})$, maka $\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_{ii}$. Dengan kata lain $\langle A,B\rangle$ merupakan jumlahan semua elemen diagonal dari matriks AB' : n x n. Jika C : k x k adalah matriks riil maka $\langle A,B\rangle$ disebut *trace* dari C dan dilambangkan

$$\text{tr } C = \text{tr } AB' = tr\ BA' = \langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle \text{..........(1)}$$

untuk semua A, $B \in \mathscr{L}_{m,n}$

Definisi 9 *Rank* dari matriks A adalah dimensi ruang matriks A dan ditulis $r(A)$.

Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris atau kolom yang independent linier.

Definisi 10 Ambil $(V,(.,.))$ sebagai ruang inner product dimensi hingga. Himpunan vektor-vektor $\{x_1, \ldots, x_k\}$ disebut *ortonormal set* jika $(x_i,x_j) = \delta_{ij}$ untuk i,j = 1,2, ...,k di mana $\delta_{ij} = 1$,jika i = j dan $\delta_{ij} = 0$,jika i ≠ j.

Himpunan $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ disebut *basis ortonormal* bila memenuhi keduanya, basis dan ortonormal.

Suatu ortonormal set $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ adalah independen linier. Andaikan $0 = \sum_i \alpha_i x_i$, maka $0 = (0, x_j) = (\sum_i \alpha_i x_i, x_j) = \sum_i \alpha_i (x_i, x_j) = \sum_i \alpha_i \ \delta_{ij} = \alpha_j$. Dengan demikian $\alpha_j = 0$ untuk $j = 1, 2, \ldots, k$ dan himpunan $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ independen linier.

Definisi 11 Dua vektor x dan y dalam ruang inner product $(V, (.,.))$ *ortogonal* $x \perp y$ jika $(x, y) = 0$. Dua himpunan bagian M_1 dan M_2 dari V *ortogonal*, $M_1 \perp M_2$ jika $x \perp y$ untuk semua $x \in M_1$ dan $y \in M_2$.

Dan komplemen ortogonal dari M ditulis $M^{\perp} = \{ x \mid x \perp y, \forall y \in M\}$.

Definisi 12 Transformasi linier $T: R^n \longrightarrow R^n$ dengan matriks transformasinya A disebut ortogonal bila T memetakan setiap $v \in R^n$ menjadi $T(v)$ tanpa mengubah panjang (norm) nya, dengan perkataan lain $T(v) = Av = v$ atau $(Av).(Av) = v.v$. A disebut *matriks ortogonal*.

Semua transformasi ortogonal dalam ruang inner product $(V, (.,.))$ dilambangkan $\mathcal{O}(V)$ sedang untuk grup matriks nxn nya ditulis $\mathcal{O}_n$.

Definisi 13 Diberikan sub ruang M dan N dalam V sedemikian sehingga $M \oplus N = V$. Jika $x = y + z$ dengan $y \in M$ dan $z \in N$, maka y disebut *proyeksi* x terhadap M sepanjang N dan z disebut *proyeksi* x terhadap N sepanjang M.

Definisi 14 Misal M ruang bagian dari V, maka pemetaan linier $P : V \longrightarrow V$ disebut *proyeksi ortogonal* pada M bila $P(x) = x$ untuk semua $x \in M$.

Dekomposisi $V = M \oplus M^{\perp}$ dari ruang inner product disebut *dekomposisi jumlahan langsung secara otogonal* dan proyeksi pada M sepanjang $M^{\perp}$ disebut *proyeksi ortogonal onto* M. Dan jika Q proyeksi ortogonal onto M maka I − Q juga proyeksi ortogonal. Dengan I menyatakan suatu matriks identitas, yaitu matriks dengan elemen $a_{ij} = 1$ untuk i = j dan $a_{ij} = 0$ untuk i ≠ j.

Sesuai dengan definisi 14, P disebut proyeksi ortogonal pada M untuk semua $x \in M$ bila $P(x) = x$ sedemikian sehingga $P(x) \in M$. Maka untuk $P(x) \in M$ berlaku $P(P(x)) = P(x)$.

Karena $P(P(x)) = P^2(x)$ maka jelas $P^2 = P$...............(2)

Definisi 15 Untuk $A \in \mathcal{L}(V,V)$ terdapat transformasi linier A' yang memenuhi $(x,Ay) = (A'x,y)$ untuk semua $x,y \in V$ disebut *transpose* dari A. Dimana bila $A = (a_{ij})$ maka $A' = (a_{ji})$.

Jika $A, B \in \mathcal{L}(V,V)$ maka $(AB)' = B'A'$, dan$(A')' = A$.

Definisi 16 Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B sehingga $AB = BA = I$. Maka B disebut *invers matriks* A dan ditulis A^{-1} , merupakan matriks bujur sangkar berordo n juga.

Dan matriks-matriks yang mempunyai invers disebut matriks-matriks yang non singular dan berlaku sifat :

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Definisi 17 Diberikan $x,\ y \in V$. *Outer product* dari x dan y ditulis $x \,\square\, y$ adalah transformasi linier dari V ke V di mana untuk z tertentu didefinisikan $(x \,\square\, y)\, z = (y,z)\, x$ dengan sifat-sifat :

(i) $x \,\square\, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x \,\square\, y_1 + \alpha_2 x \,\square\, y_2$

(ii) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \,\square\, y = \alpha_1 x_1 \,\square\, y + \alpha_2 x_2 \,\square\, y$

(iii) $(x \,\square\, y)' = y \,\square\, x$

(iv) $(x_1 \,\square\, y_1)(x_2 \,\square\, y_2) = (y_1, x_2) x_1 \,\square\, y_2$

di mana $\alpha_1,\ \alpha_2 \in R^n$

Untuk $x \in R^m$ dan $y \in R^n$ berlaku $x \,\square\, y = xy'$ di mana x matriks mx1 dan y' matriks 1xn sehingga $x \,\square\, y$ merupakan matriks mxn $\in \mathcal{L}_{n,m}$.

Proposisi 2 Ambil $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sebagai basis ortonormal untuk $(V,(.,.))$ maka $\{x_i \square x_j \mid i,j = 1,2,\ldots,n\}$ adalah basis untuk $\mathcal{L}(V,V)$

Bukti : Jika $A \in \mathcal{L}(V,V)$, A dapat dinyatakan sebagai n^2 bilangan-bilangan $\alpha_{ij} = (x_i, Ax_j)$. Adapun transformasi linier $B = \sum_i \sum_j \alpha_{ij}\ x_i \square x_j$ memenuhi

$$(x_k, Bx_l) = (x_k, (\sum_i \sum_j \alpha_{ij}\ x_i \square x_j)\ x_l)$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_{ij}\ (x_k \square x_l, x_i \square x_j) = \alpha_{kl}$$

Sehingga $(x_i, Bx_j) = \alpha_{ij} = (x_i, Ax_j)$ untuk i,j = 1,2,...,n. Oleh karena itu $(x, Bx) = (x, Ax)$ untuk semua $x \in V$, jelas $B = A$. Jadi A dapat ditulis sebagai $\sum_i \sum_j \alpha_{ij}\ x_i \square x_j$ dengan $\alpha_{ij} = (x_i, Ax_j)$ merupakan elemen-elemen dari matriks A:(nxn) atau $A = (\alpha_{ij})$.

Dengan demikian setiap $A \in \mathcal{L}(V,V)$ merupakan kombinasi linier dari $\{x_i \square x_j | i,j=1,2,...,n\}$ sesuai definisi 4. Karena $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ independen linier dalam ruang vektor $(V,(.,.))$ berdimensi n, maka $\{x_i \square x_j ; i,j=1,2,...,n\}$ independen linier dalam ruang vektor berdimensi n^2 $(\mathcal{L}(V,V))$ sehingga berdasarkan definisi 6, $\{x_i \square x_j | i,j=1,2,...,n\}$ adalah basis untuk $\mathcal{L}(V,V)$. ∎

Contoh 1 Sebagai contoh, dalam transformasi linier self adjoint. Yaitu transformasi linier dalam $\mathcal{L}(V,V)$ di mana $A = A'$ untuk setiap $A \in \mathcal{L}(V,V)$. Karena kombinasi linier dari transformasi linier self adjoint juga self adjoint, himpunan M dari transformasi ini adalah sub ruang dari $\mathcal{L}(V,V)$ yang self adjoint. Ambil $x_1, x_2, ..., x_n$ sebagai basis ortonormal untuk $(V,(.,.))$ sehingga untuk setiap i, $x_i \square x_i$ adalah self adjoint, sehingga untuk skalar-skalar α_i,

$B = \sum_i \alpha_i \; x_i \square x_i$ adalah self adjoint di mana $x_i \square x_i$ adalah basis dalam $\mathcal{L}(V,V)$.

Definisi 18 Ambil $(V,(.,.)_1)$, $(V,(.,.)_2)$, $(W,(.,.)_3)$ dan $(W,(.,.)_4)$ sebagai ruang inner product. Untuk $A \in \mathcal{L}(V_1,V_2)$ dan $B \in \mathcal{L}(W_1,W_2)$, *kronecker product* dari A dan B ditulis $B \otimes A$ adalah transformasi linier pada $\mathcal{L}(V_1,W_1)$ ke $\mathcal{L}(V_2,W_2)$ dengan definisi $(B \otimes A)\; C \equiv BCA'$ untuk semua $C \in \mathcal{L}(V_1,W_1)$.

Proposisi 3 Dengan notasi sesuai definisi 18 berlaku

(i) $(B \otimes A)\; (w_1 \square v_1) = (Bw_1) \square (Av_1) \in \mathcal{L}(V_2,W_2)$

(ii) $(B \otimes A)' = B' \otimes A'$

Bukti : Untuk $v_2 \in V_2$ berdasarkan definisi 18, 15 dan 17

(i) $[(B \otimes A)(w_1 \square v_1)](v_2) = B(w_1 \square v_1)\; A' v_2 = B(v_1, A' v_2) w_1$

$$= (Av_1, v_2)\; Bw_1 = [(Bw_1 \square Av_1)](v_2)$$

(ii) Ambil $C_1 \in \mathcal{L}(V_1,W_1)$ dan $C_2 \in \mathcal{L}(V_2,W_2)$ sehingga

$\langle (B \otimes A)' C_2, C_1 \rangle = \langle C_2, (B \otimes A) C_1 \rangle$,untuk $C_1 = w_1 \square v_1$

dengan proposisi 3(i)

$$\langle C_2, (B \otimes A)(w_1 \square v_1) \rangle = \langle C_2, Bw_1 \square Av_1 \rangle = \langle C_2 Av_1, Bw_1 \rangle$$

$$= \langle B' C_2 Av_1, w_1 \rangle = \langle B' C_2 A, w_1 \square v_1 \rangle$$

$$= \langle (B' \otimes A') C_2, w_1 \square v_1 \rangle. \qquad \blacksquare$$

Proposisi 4 Untuk $A_i \in \mathcal{L}(V,V)$, i = 1,2 dan $B_i \in \mathcal{L}(W,W)$, i=1,2 maka

(i) $(B_1 \otimes A_1)\; (B_2 \otimes A_2) = (B_1 B_2) \otimes (A_1 A_2)$

(ii) A_1, B_1 proyeksi ortogonal $\Rightarrow B_1 \otimes A_1$ proyeksi ortogonal

Bukti: (i) (untuk $C \in \mathcal{L}(V,W)$) dengan definisi 18

$$\begin{aligned}(B_1 \otimes A_1)\,(B_2 \otimes A_2)\,(C) &= (B_1 \otimes A_1)\,(B_2 C A_2') \\ &= B_1\ B_2\ C\ A_2'\ A_1' \\ &= (B_1 B_2)\ C\ (A_1 A_2)' \\ &= ((B_1 B_2) \otimes (A_1 A_2))\ (C)\end{aligned}$$

(ii) sesuai proposisi 4(i)

$$\begin{aligned}(B_1 \otimes A_1)^2 &= (B_1 \otimes A_1)\,(B_1 \otimes A_1) \\ &= (B_1 B_2) \otimes (A_1 A_2) = B_1^2 \otimes A_1^2\end{aligned}$$

Karena B_1 dan A_1 proyeksi ortogonal ,maka $B_1^2 = B_1$ dan $A_1^2 = A$

sehingga $B_1{}^2 \otimes A_1{}^2 = (B_1 \otimes A_1)^2 = B_1 \otimes A_1$

Jadi $B_1 \otimes A_1$ juga proyeksi ortogonal. ∎

2.1.2 DETERMINAN

Setiap matriks bujur sangkar A (jumlah kolom = jumlah baris) selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut *determinan* dan ditulis dengan det (A) atau $|A|$.

Definisi 19 Barisan bilangan-bilangan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ di mana berlaku $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$, $(i,k = 1,2,\ldots,n)$ serta j_i adalah salah satu bilangan asli disebut sebagai *permutasi* dan banyaknya permutasi yan dapat dibentuk ada $n!$ (dibaca n faktorial) = $n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1$

Definisi 20 Jumlah inversi menyatakan bilangan yang menunjukkan berapa kali suatu angka diikuti oleh angka yang lebih rendah pada suatu permutasi.

Pandang matriks bujur sangkar *A* ordo n berikut

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

maka hasil kali antar n elemen matriks *A* berbentuk $a_{1j1}.a_{2j2}...a_{njn}$ dengan $j1, j2, \dots, jn$ menunjukkan kolomnya, dengan syarat setiap elemen yang diambil berasal dari setiap baris dan kolom yang berbeda dalam matriks *A* tersebut. Artinya tidak boleh dalam suatu hasil kali ada 2 elemen atau lebih yang berasal dari baris atau kolom yang sama.

Definisi 21 *Determinan* dari matriks bujur sangkar *A* berordo n dinyatakan dengan det(*A*) = $|A| = \sum_{1}^{n!} (-1)^{T}\ a_{1j1}a_{2j2}\dots a_{njn}$ (di mana indeks $j1, j2, \dots, jn$ berbeda-beda sesuai dengan permutasinya sebanyak n! dan T menyatakan jumlah inversi) dengan sifat-sifat : (i) $|AB| = |A|.|B|$

(ii) $|A'| = |A|$

Suatu matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol dan biasa disebut dengan *matriks non singular*. Dan sebaliknya disebut dengan *matriks singular*.

Ambil dua matriks non singular A dan B : n x n yang terbagi atas matriks-matriks A_{11}: $n_1 x n_1$, A_{12}: $n_1 x n_2$, dan A_{21}: $n_2 x n_1$ A_{22}: $n_2 x n_2$,demikian juga dengan B sedemikian sehingga $n_1 + n_2 = n$. Maka A_{11}, A_{12}, A_{21}, dan A_{22} disebut *Partisi matriks A*, (demikian juga dengan matriks B).

Jika B adalah invers dari A, $AB = I_n$ dan $BA = I_n$ untuk I_n adalah matriks identitas ordo n maka

(i) $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_{n_1}$

(ii) $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O$

(iii) $B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = O$

(iv) $B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_{n_2}$

Jika A_{11} non singular, dan misalkan $B_{22} = D^{-1}$

dari (ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1} A_{12}) D^{-1}$

dari (iii) $B_{21} = -D^{-1} (A_{21} A_{11}^{-1})$

dari (i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12})D^{-1}(A_{21} A_{11}^{-1})$

dan bila disubstitusikan ke (iv)

$-D^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + D^{-1}A_{22} = I_{n_2}$ maka $D = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.

Dan bila A_{22} non singular, analog didapat $D = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

Selanjutnya untuk A_{22} non singular, D biasa disebut sebagai $A_{11.2}$. Sedangkan untuk A_{11} yang non singular maka D disebut sebagai $A_{22.1}$. Sedemikian sehingga

$$A_{11.2} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$A_{22.1} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

Proposisi 5 Ambil matriks A seperti di atas , jika

(i) Jika $|A_{11}| \neq 0$ maka

$$\det A = \det A_{11} \det (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$$

(ii) Jika $|A_{22}| \neq 0$ maka

$$\det A = \det A_{22} \det (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})$$

Bukti : (i) Ambil

$$\det \begin{pmatrix} I_{n1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix} = 1$$

maka

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \det A_{11} \det (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

(ii) diselesaikan seperti (i) dengan bantuan

$$\det \begin{pmatrix} I_{n1} & -A_{22}^{-1}A_{21} \\ 0 & I_{n2} \end{pmatrix} = 1$$

Jika $|A_{11}| \neq 0$ dan $|A_{22}| \neq 0$ maka

$\det A_{11} \det (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = \det A_{22} \det (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$ ∎

Proposisi 6 Ambil A : n x m dan B : m x n , maka

$$\det (I_n + AB) = \det (I_m + BA)$$

dengan I_n dan I_m masing-masing menyatakan matriks identitas ordo n dan m.

Bukti : menggunakan Proposisi 5 untuk matriks $\begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{pmatrix}$

$$\det A_{11} \det(A_{22}-A_{21}A_{11}A_{12}^{-1}) = \det A_{22} \det(A_{11}-A_{12}A_{22}A_{21}^{-1})$$

$$\det I_n \det(I_m-B\, I_n^{-1}(-A)) = \det I_m \det(I_n-(-A)I_m^{-1}B)$$

$$\det I_n \det(I_m + BA) = \det I_m \det(I_n + AB)$$

$$\det(I_m + BA) = \det(I_n + AB)$$ ■

2.1.3 VEKTOR RANDOM

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya variabel random, sedangkan matriks random adalah matriks yang elemen-elemennya variabel random. Misalkan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektor random dalam direct sum $R^p \oplus \ldots \oplus R^p$ sebanyak n kali. Oleh karena itu banyak cara untuk menyatakan bentuk tersebut. Kemungkinan pertama adalah menuangkannya ke dalam koordinat vektor random

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^{np}.$$

sehingga Y dianggap sebagai suatu vektor random dalam R^{np} suatu inner product.

Alternatif lain adalah membuatnya ke bentuk matriks

$$X = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{p,n}$$

Jadi X mempunyai elemen baris x_i', di mana $i = 1,2,\ldots,n$ yang independen. Inner product dalam $\mathcal{L}_{p,n}$ diturunkan dari inner product pada R^p dan R^n. Oleh karena itu X adalah vektor random dalam ruang inner product $(\mathcal{L}_{p,n},(.,.))$ dinyatakan $X \in \mathcal{L}_{p,n}$.

Definisi 22 Ambil X dan Y sebagai variabel random 2 dimensi dengan fungsi densitas $f(x,y)$. *Nilai ekspektasi* (harapan) dari suatu fungsi lain $g(x,y)$ dinyatakan dengan $\mathbb{E}[g(X,Y)]$ dan didefinisikan sebagai

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \iint g(x,y)\ f(x,y)\ dx\ dy$$

Untuk kasus tertentu jika $g(x,y) = x$ maka $\mathbb{E}[g(x,y)] = \mathbb{E}[X]$ Dan $\mathbb{E}[X]$ biasa disebut sebagai mean (rata-rata) dari X.

Jika $g(x,y) = x+y$ maka $\mathbb{E}[g(X,Y)] = \mathbb{E}\ [X+Y]$

$$\begin{aligned} &= \iint (X+Y)\ f(x,y)\ dx\ dy \\ &= \iint (X\ f(x,y) + Y\ f(x,y))\ dx\ dy \\ &= \iint X\ f(x,y)\ dx\ dy + \iint Y\ f(x,y)\ dx\ dy \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \qquad \text{..........(3)} \end{aligned}$$

Analog $\mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$.

Definisi 23 Ambil X dan Y dua variabel random dalam dimensi yang sama. *Kovarian* dari X dan Y dinyatakan dengan $\mathrm{Cov}(X,Y)$ didefinisikan sebagai

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\ [(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))]$$

Dengan definisi 22 $\mathrm{Cov}\ (X,Y) = \mathbb{E}\ [(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))]$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\ [(XY-Y\mathbb{E}(X)-X\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)] \\ &= \mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \qquad \text{.........(4)} \end{aligned}$$

Untuk kasus khusus, $\mathrm{Cov}(X,X)$ disebut *Varian dari* X. Sesuai persamaan (4) maka Varian dari X ditulis $\mathrm{Var}(X)$ adalah

$$\mathrm{Var}\ (X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \qquad \text{........(5)}$$

Dari (5) akan dirunkan bentuk dari $\mathrm{Var}(X+Y)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y) \qquad \ldots\ldots\ldots(6)
\end{aligned}$$

Analog $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) - 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$.

Proposisi 7 Jika X dan Y dua variabel random yang independen maka $\mathbb{E}[g(X)g(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\ \mathbb{E}[g(Y)]$ dimana $g(X)$ dan $g(Y)$ adalah fungsi 1 variabel.

Bukti : Sesuai dengan definisi 22

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)g(Y)] &= \iint g(x)g(y)\ f(x,y)\ dx\ dy \\
&= \iint g(x)g(y)\ f(x)f(y)\ dx\ dy \\
&= \int g(x)f(x)\ dx \int g(y)f(y)\ dy \\
&= \mathbb{E}[g(X)]\ \mathbb{E}[g(Y)]
\end{aligned}$$

■

Ambil X suatu vektor random dalam ruang inner product $(V,(.,.)) \in R^n$ dan asumsikan untuk setiap $x \in V$ dan variabel random (x,X) mempunyai ekspektasi berhingga. Ambil $f(x) = \mathbb{E}(x,X)$ sehingga f adalah fungsi bilangan riil yang didefinisikan dalam V dan

$$\begin{aligned}
f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \mathbb{E}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, X) &= \mathbb{E}[\alpha_1 (x_1, X) + \alpha_2 (x_2, X)] \\
&= \alpha_1\ \mathbb{E}(x_1, X) + \alpha_2\ \mathbb{E}(x_2, X) \\
&= \alpha_1\ f(x_1) + \alpha_2\ f(x_2).
\end{aligned}$$

Jadi f adalah fungsi linier pada V. Oleh karena itu terdapat suatu vektor $\mu \in V$ sedemikian sehingga $f(x) = (x,\mu)$ untuk semua $x \in V$. Kesimpulannya, terdapat suatu vektor

$\mu \in V$ yang memenuhi $\mathbb{E}(x,X) = (x,\mu)$ untuk semua $x \in V$. Vektor μ disebut vektor rata-rata dari X yang dinyatakan dengan $\mathbb{E}X$ atau $\mathbb{E}(x,X) = (x,\mathbb{E}X) = (x,\mu)$. ....(7)

Selanjutnya asumsikan bahwa $\mathbb{E}X_i^2 < +\infty$, $i = 1,2,\ldots,n$ maka $\mathrm{cov}\ (X_i,X_j) = \sigma_{ij}$ ada untuk semua $i,j = 1,2,\ldots,n$. Ambil matriks $n \times n$ dengan elemen-elemen σ_{ij}. Sudah tentu σ_{ii} adalah varian dari X_i dan σ_{ij} adalah kovarian dari X_i dan X_j. Maka matriks simetri Σ (yaitu $\Sigma' = \Sigma$) disebut matriks kovarian dari X dan dinyatakan dengan Cov (X).

Anggap $x,y \in R^n$ dengan koordinat-koordinat x_i dan y_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Maka menurut definisi 8

$$\mathrm{Cov}\ \langle (x,X),(y,X) \rangle = \mathrm{Cov}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\ ,\sum_{j=1}^{n} y_j X_j\right\}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j\ \mathrm{Cov}\ (X_i,X_j)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j\ \sigma_{ij} = (x,\Sigma y) \qquad \text{........(8a)}$$

dan varian X dinyatakan dengan $\mathrm{Var}(X)$ sehingga

$$\mathrm{Var}(x,X) = (x,\mathrm{var}(X)x). \qquad \text{........(8b)}$$

Proposisi 8 Ambil $X \in (V,(.,.))$ dan asumsikan X mempunyai vektor rata-rata μ. Ambil $(W,[.,.])$ ruang inner product dan anggap $A \in \mathscr{L}(V,W)$ dan $w_o \in W$. Maka vektor random $Y = AX + w_o$ mempunyai vektor rata-rata $A\mu + w_o$ yang berarti $\mathbb{E}Y = A\mathbb{E}X + w_o$.

Bukti : Untuk $w \in W$ menurut (7)

$$\mathbb{E}[w,Y] = \mathbb{E}[w\ ,AX + w_o] = \mathbb{E}[w,AX] + [w,w_o]$$

sesuai definisi 15

$$\mathbb{E}[w,Y] = \mathbb{E}[A'w,X] + [w,w_o] = (A'w,\mu) + [w,w_o]$$

$$[w, \mathbb{E}Y] = [w, A\mu] + [w, w_o] = [w, A\mu + w_o]$$

Jadi $\mathbb{E}Y = A\mu + w_o$.

Proposisi di atas juga berlaku untuk dua vektor random x_1, x_2. ■

Proposisi 9 Andai X vektor random $\in (V,(.,.))$ dengan $\mathrm{cov}(X) = \Sigma$. Jika $A \in \mathscr{L}(V,W)$ dimana $(W,[.,.])$ ruang inner product, maka $\mathrm{cov}(AX + w_o) = A\Sigma A'$ untuk semua $w_o \in W$.

Bukti :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,[w, AX + w_o] &= \mathrm{Var}\,([w, AX] + [w, w_o]) = \mathrm{Var}\,[w, AX] \\ &= \mathrm{Var}\,(A'w, X) = (A'w, \Sigma A'w) \\ &= (w, A\Sigma A'w)\end{aligned}$$

sehingga tampak bahwa $\mathrm{Cov}\,(AX+w_o) = A\Sigma A'$. ■

Ambil X_1, X_2 dan Y vektor random dan x, $y \in R^n$ dengan koordinat x_i dan y_i, $i = 1,\ldots,n$ maka sesuai definisi 8

$$\begin{aligned}\langle(x, X_1 \pm X_2), (y, Y)\rangle &= \langle\sum_i x_i(X_1 \pm X_2), \sum_j y_j Y_j\rangle \\ &= \sum_i \sum_j (x_i X_1 \pm x_i X_2)\; y_j Y_j \\ &= \sum_i \sum_j (x_i X_1)\; y_j Y_j \pm \sum_i \sum_j (x_i X_2)\; y_j Y_j \\ &= \langle\sum_i x_i X_1, \sum_j y_j Y_j\rangle \pm \langle\sum_i x_i X_2, \sum_j y_j Y_j\rangle \\ &= \langle(x, X_1), (y, Y)\rangle \pm \langle(x, X_2), (y, Y)\rangle \ldots (9)\end{aligned}$$

Definisi 24 Vektor random X_1 dan X_2 dikatakan *unkorelasi* jika $\Sigma_{12} = 0$.

Definisi di atas berarti X_1 dan X_2 unkorelasi bila dan hanya bila $\mathrm{Cov}((x_1,X_1)_1,(x_2,X_2)_2) = 0$ untuk semua $x_i \in V_i$; i = 1, 2.

Proposisi 10 Andaikan $(X_1,X_2) \in V_1 \oplus V_2$ mempunyai kovarian yang dinyatakan dalam partisi Σ.

$$\Sigma = \mathrm{Cov}\ (X_1,X_2) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

maka $X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$ dan X_2 unkorelasi.

Dan $\mathrm{cov}\ (X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ di mana $\Sigma_{21} \equiv \Sigma_{12}'$

Bukti : Untuk $x_i \in V_i$, i = 1, 2 dapat dibuktikan bahwa $\mathrm{Cov}\ ((x_1,X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)_1\ ,\ (x_2,X_2)_2) = 0$ berikut ini :

$\mathrm{Cov}\ ((x_1,X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)_1\ ,\ (x_2,X_2)_2)$ didefinisikan sesuai (9) dan definisi 15 adalah

$= \mathrm{Cov}\ ((x_1,X_1)_1,(x_2,X_2)_2) - \mathrm{Cov}\ ((\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'x_1,X_2)_2\ ,\ (x_2,X_2)_2)$

menurut (8b)

$= (x_1,\Sigma_{12}x_2)_1 - (\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'x_1\ ,\ \Sigma_{22}x_2)_2$

$= (x_1,\Sigma_{12}x_2)_1 - (x_1,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}x_2)_1$

$= (x_1,(\Sigma_{12} - (\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22})x_2)_1 = 0$

Sekarang tinggal membuktikan bahwa

$\mathrm{Cov}\ (X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2) = \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ menurut (6)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\ (x_1,X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2) &= \mathrm{Var}\ (x_1,X_1) + \mathrm{Var}\ (x_1,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2) \\
&\quad -2\ \mathrm{Cov}\ ((x_1,X_1),(x_1,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)) \\
&= (x_1,\Sigma_{11}x_1) + (x_1,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'x_1) \\
&\quad -2\ (x_1,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'x_1) \\
&= (x_1,(\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')\ x_1)
\end{aligned}$$

■

Sekarang kita akan menurunkan suatu bentuk kovarian dalam kronecker product.

Proposisi 11 Ambil vektor random yang independen X_1, $X_2, \ldots, X_n \in R^p$ sehingga bisa disajikan dalam suatu matriks random $X \in \mathcal{L}_{p,n}$ maka

(i) $\mathbb{E}X = e\mu'$

(ii) Cov $(X) = I_n \otimes \Sigma$ dengan I_n matriks identitas n x n

Bukti : Matrik $e\mu'$ mempunyai elemen yang sama dengan μ' dan jika tiap elemen X mempunyai mean μ' maka (i) langsung terbukti. Jelasnya untuk $A \in \mathcal{L}_{p,n}$, $\mathbb{E}\langle A,X\rangle = \langle A,e\mu'\rangle$

Ambil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sebagai elemen A, maka

$$\mathbb{E}\langle A,X\rangle = \mathbb{E}\ \mathrm{tr}\ AX' = \mathbb{E}\sum_1^n \alpha_i' x_i = \sum_1^n \alpha_i' \mathbb{E}x_i = \sum_1^n \alpha_i'\mu$$

$$= \sum_1^n \alpha_i'\mu e = \mathrm{tr}\ A\mu e' = \langle A,e\mu'\rangle$$

$$\mathrm{Var}\ \langle A,X\rangle = \mathrm{Var}\ (\sum_1^n \alpha_i' x_i)$$

$$= \sum_1^n \mathrm{var}\ (\alpha_i' x_i) + \sum\sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}\ (\alpha_i' x_i, \alpha_j' x_j)$$

$$= \sum_1^n \alpha_i'\Sigma\alpha_i$$

sesuai (1) maka

$$= \mathrm{tr}\ A\Sigma A' = \mathrm{tr}\ A(A\Sigma)' = \mathrm{tr}\ A'A\Sigma$$

$$= \langle A,(I_n \otimes \Sigma)A\rangle$$

■

Jadi proposisi di atas menunjukkan bahwa jika $X_1, \ldots, X_n$ vektor random $\in R^p$ dengan $\mathbb{E}X_i = \mu$, i=1,...,n maka $\mathbb{E}X = e\mu'$. Dan jika $X_i \in R^p$ unkorelasi dengan Cov $(X_i) = \Sigma$, maka

$$\mathrm{Cov}\ (X) = I_n \otimes \Sigma.$$

Sebagai contohnya jika $A \in \mathcal{L}_{n,n}$,$B \in \mathcal{L}_{p,p}$ maka $(A \otimes B)X = AXB'$ adalah vektor random dalam $\mathcal{L}_{p,n}$. Dan proposisi 9 menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}((A \otimes B)X) &= (A \otimes B) \operatorname{Cov}(X) (A \otimes B)' \\ &= (A \otimes B)(I_n \otimes \Sigma)(A \otimes B)' = (AA') \otimes (B\Sigma B'). \end{aligned}$$

Jika $A \otimes B = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B)$, maka $(I_n \otimes B)X$ adalah matriks random dengan elemen $X_i'B' = (BX_i)'$,i = 1,...,n. Dan jika $\operatorname{Cov}(X_i) = \Sigma$ maka $\operatorname{Cov}(BX_i) = B\Sigma B'$. Jadi jelas dari proposisi 11 di atas $\operatorname{Cov}((I_n \otimes B)X) = I_n \otimes (B\Sigma B')$.

Yang terakhir akan dibahas kovarian dari $X \square X$ jika X vektor random dalam $(V,(.,.))$. Vektor random $X \square X$ adalah juga merupakan vektor random dalam $(M,\langle .,. \rangle)$ di mana M adalah ruang bagian dari transformasi self adjoint dalam $\mathcal{L}(V,V)$.

Proposisi 12 Andaikan X vektor random dalam $(V,(.,.))$. Ambil x_1 dan x_2 sebagai vektor sebarang dalam V.

Misal $c_1 = \operatorname{var}\{(x_1,X)^2\}$ dan $c_2 = \operatorname{cov}\{(x_1,X)^2,(x_2,X)^2\}$,

(i) $\operatorname{Cov}(X \square X) = (c_1 - c_2)\, I \otimes I + c_2 T_1$ di mana T_1 transformasi linier pada ruang bagian M dengan $T_1(A) = \langle I, A \rangle I$

(ii) Untuk $C \in \mathcal{L}(V,V)$ ambil $\Sigma = CC'$ dan andai Y vektor random dalam $(V,(.,.))$ dengan $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(CX)$, maka $\operatorname{Cov}(Y \square Y) = (c_1 - c_2)\, \Sigma \otimes \Sigma + c_2 T_2$ di mana $T_2(A) = \langle A, \Sigma \rangle \Sigma$ untuk $A \in M$, transformasi linier dalam ruang bagian M.

Bukti : Untuk $A \in M$, tulis $A = \sum_1^n a_i x_i \square x_i$, di mana $x_1,\ldots,x_n$ basis ortonormal untuk $(V,(.,.))$, sesuai proposisi 2

(i) $\mathrm{Var}\ \langle A, X\square X\rangle = \mathrm{Var}\ \langle \sum_{1}^{n} \alpha_i x_i \square x_i\ ,\ X\square X\rangle$

$$= \sum_i \alpha_i^2\ \mathrm{var}\ \langle x_i \square x_i, X\square X\rangle + \sum_{i\neq j}\sum \alpha_i\alpha_j$$

$$\mathrm{cov}\ (\langle x_i\square x_i\ ,\ X\square X\rangle\ ,\ \langle x_j\square x_j\ ,\ X\square X\rangle)$$

$$= \sum_{1}^{n} \alpha_i^2\ \mathrm{var}\ (x_i, X)^2 + \sum_{i\neq j}\sum \alpha_i\alpha_j$$

$$\mathrm{cov}\ (\langle x_i, X\rangle^2, \langle x_j, X\rangle^2)$$

$$= c_1 \sum_i \alpha_i^2 + c_2 \sum_{i\neq j}\sum \alpha_i\alpha_j$$

$$= (c_1 - c_2) \sum_i \alpha_i^2 + c_2 \sum_i \sum_j \alpha_i\alpha_j$$

$$= (c_1 - c_2)\ \langle A, A\rangle + c_2\langle I, A\rangle^2$$

sehingga $\mathrm{cov}\ (X\square X) = (c_1 - c_2)\ I\otimes I + c_2 T_1$

Untuk kasus khusus, jika X berdistribusi normal , maka $c_2 = 0$ sehingga $\mathrm{cov}\ (X\square X) = c_1\ I\otimes I$.

(ii) Sesuai proposisi 9

$$\mathrm{Cov}\ (Y\square Y) = \mathrm{cov}\ ((CX \square CX)) = \mathrm{cov}\ ((C\otimes C)\ (X\square X))$$

$$= (C\otimes C)\ \mathrm{cov}\ (X\square X)\ (C\otimes C)'$$

$$= (C\otimes C)\ ((c_1 - c_2)\ I\otimes I + c_2 T_1)\ (C'\otimes C')$$

$$= (c_1 - c_2)(C\otimes C)(I\otimes I)(C'\otimes C') + c_2 (C\otimes C) T_1 (C'\otimes C')$$

$$= (c_1 - c_2)\ \Sigma\otimes\Sigma + c_2\ (C\otimes C)\ T_1 (C'\otimes C')$$

sekarang harus ditemukan bahwa $T_2 = (C\otimes C)\ T_1 (C'\otimes C')$

$$(C\otimes C)\ T_1 (C'\otimes C')\ (A) = C\otimes C\ (\langle I, (C'\otimes C')A\rangle I)$$

$$= \langle (C\otimes C)\ I, A\rangle\ (C\otimes C) I$$

$$= \langle CC', A\rangle\ CC' = \langle \Sigma, A\rangle \Sigma = T_2 A. \qquad \blacksquare$$

2.1.4 FAKTORISASI MATRIKS

Faktorisasi matriks dimaksudkan untuk menulis suatu matriks sebagai product dari dua matriks yang lain dengan sifat-sifat khusus untuk memudahkan penyelesaian.

Ambil $\mathcal{L}_{n,n}$ ruang matriks n x n. Jika $T \in \mathcal{L}_{n,n}$ maka $T=(t_{ij})$ adalah matriks segitiga bawah jika $t_{ij} = 0$ untuk i<j. Himpunan matrk segitiga bawah n x n dengan $t_{ii} > 0$, i = 1, 2,...,n dinyatakan dengan G_T^+. Dan $U \in \mathcal{L}_{n,n}$ adalah matriks segitiga atas jika U' adalah matriks segitiga bawah dan G_U^+ menyatakan himpunan semua matriks segitiga atas nxn dengan elemen diagonal positif.

Diberikan $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Fungsi $Q(X) = X'AX = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$ disebut *bentuk kuadratik*. Matrik A selalu diasumsikan simetri, jika setiap elemen dari setiap pasangan koefisien a_{ij} dan a_{ji} $(i \neq j)$ dapat diganti dengan $(a_{ij} + a_{ji})/2$ tanpa merubah harga $Q(X)$. Asumsi ini mempunyai beberapa kegunaan dan oleh karena itu diambil sebagai ketetapan. Untuk menggambarkannya, ambil

$$Q(X) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

hasilnya akan sama dengan

$$Q(X) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

tampak dalam kasus kedua A simetri. Bentuk kuadratik atau matriks A dikatakan :

1. definite positif bila $Q(X) > 0$ untuk setiap $X \neq 0$
2. semidefinite positif bila $Q(X) \geq 0$ untuk setiap X dan terdapat $X \neq 0$ sedemikian sehingga $Q(X) = 0$.

Proposisi 13 Untuk $S \in \mathcal{S}_p$ dan $S > 0$, semidefinite positif dan partisi $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ maka $S = TT'$ untuk elemen khusus $T \in G_T^+$ di mana $\mathcal{S}_p$ ruang matrik definite positif p x p.

Bukti : Jika $S \in \mathcal{S}_p$ dengan $S > 0$. Partisi S seperti di atas di mana S_{11}: $(p-1) \times (p-1)$,dan $S_{22} \in (0,\infty)$. Pertama didapat $S_{11} = T_{11}\, T_{11}'$ untuk $T_{11} \in G_T^+$. Anggap persamaan

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}'$$

di mana diselesaikan untuk T_{21}: $1 \times (p-1)$ dan $T_{22} \in (0,\infty)$ dan didapat dua persamaan :

$$T_{21}T_{11}' = S_{21} \text{ dan } T_{21}T_{21}' + T_{22}^2 = S_{22}$$

jadi $T_{21} = S_{21}\,(T_{11}')^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } S_{22} &= T_{22}^2 + S_{21}\,(T_{11}')^{-1}\,(S_{21}(T_{11}')^{-1})' \\ &= T_{22}^2 + S_{21}\,(T_{11}T_{11}')^{-1}\,S_{12} \\ &= T_{22}^2 + S_{21}\,S_{11}^{-1}\,S_{12} \end{aligned}$$

Oleh karena itu $T_{22}^2 = S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}$ positif.

Dari sini didapat $T_{22} = (S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12})^{1/2}$ sebagai solusi untuk $T_{22}>0$. Ini menunjukkan $S = TT'$ untuk $T \in G_T^+$. ■

2.2 DISTRIBUSI-DISTRIBUSI PROBABILITAS

2.2.1 DISTRIBUSI NORMAL

Suatu variabel random X dengan mean μ dan varian σ^2 dikatakan mempunyai distribusi normal jika mempunyai fungsi densitas

$$f(x) = \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)/\sigma\right)^2 dx$$

atau dinyatakan dengan $N(\mu,\sigma^2)$.

Bila $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ maka

$$f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx$$

disebut distribusi normal standar dan ditulis N(0,1).

Definisi 25 Fungsi karakteristik dari variabel random Z dinyatakan dengan $\phi(Z)$ didefinisikan sebagai

$$\phi(Z) = \mathbb{E}\,[\exp(itZ)]\ , t>0$$

sesuai denagn definisi 22

$$\phi(Z) = \int \exp(itZ)\, f(z)\, dz$$

dan $f(z)$ menyatakan fungsi densitas dari Z.

Sedangkan untuk kasusmultivariate fungsi karakteristik untuk matriks random S didefinisikan sebagai

$$\phi(S) = \mathbb{E}\,[\exp(i \operatorname{tr} AS)$$

di mana A matriks sebarang yang definite positif.

Berikut definisi distribusi normal pada ruang inner product dimensi hingga $(V,(.,.))$.

Definisi 26 Suatu vektor random $X \in V$ berdistribusi normal jika untuk setiap x anggota V, variabel random (x,X) berdistribusi normal dalam R (R himpunan bilangan riil).

Proposisi 14 Andai X berdistribusi normal pada $(V,(.,.))$ dan ambil $A \in \mathscr{L}(V,W)$,$w_o \in W$ maka $AX + w_o$ mempunyai distribusi normal pada $(W,(.,.))$.

Bukti : Ditunjukkan bahwa untuk setiap $w \in W$, $(w,AX+w_o)$ mempunyai distribusi normal pada R.
Tapi $(w\ ,\ AX + w_o) = (w,AX) + (w,w_o) = (A'w,X) + (w,w_o)$ dengan asumsi $(A'w,X)$ berdistribusi normal normal. Dan jika (w,w_o) konstan, $(A'w,X) + (w,w_o)$ berdistribusi normal. ∎

Jika X berdistribusi normal pada $(V,(.,.))$ dengan mean 0 dan kovarian I, anggap $A \in \mathscr{L}(V,V)$ dan $\mu \in V$. Maka $AX + \mu$ berdistribusi normal pada $(V,(.,.))$ dan kita tahu bahwa $\mathbb{E}(AX + \mu) = A(\mathbb{E}X) + \mu = \mu$
dan $\mathrm{cov}(AX + \mu) = A\ \mathrm{cov}\ (X)\ A' = AA'$.
Oleh karena itu, setiap transformasi linier semidefinite positif Σ dapat dinyatakan sebagai AA' (dengan demikian ambil A sebagai akar kuadrat semidefinite positif Σ).

Jadi jika diberikan $\mu \in V$ dan semidefinite positif Σ, terdapat vektor random yang mempunyai distribusi normal dalam V dengan vektor mean μ dan matriks kovarian Σ. Jika X mempunyai distribusi normal, ditulis $\mathscr{L}(X) = N(\mu,\Sigma)$.

Selanjutnya jika (x,X) normal pada R, $\mathrm{var}(x,X)$ ada untuk setiap $x \in V$, maka $\mu = \mathbb{E}X$ dan $\Sigma = \mathrm{cov}(X)$ ada dan $\mathcal{L}(X) = N(\mu,\Sigma)$. Sehingga $\mathcal{L}((x,X)) = N((x,\mu),(x,\Sigma x))$ untuk $x \in V$. Oleh karena itu fungsi karakteristik dari (x,X) adalah :

$$\phi(t) = \mathbb{E}\exp[it(x,X)]$$
$$= \exp[it(x,\mu) - \frac{1}{2}t^2(x,\Sigma x)]$$

dan untuk $t = 1$, diperoleh fungsi karakteristik dari X:

$$\xi(X) = \mathbb{E}\exp[i(x,X)]$$
$$= \exp[i(x,\mu) - \frac{1}{2}(x,\Sigma x)].$$

Proposisi 15 Jika $\{X_1,X_2\}$ mempunyai distribusi normal pada $V_1 \oplus V_2$, maka X_1 dan X_2 *independen* bila hanya bila $\Sigma_{12}=0$

Bukti : Jika X_1 dan X_2 independen, maka jelas $\Sigma_{12}=0$. Konversnya, jika $\Sigma_{12}=0$ dan sesuai (10) fungsi karakteristik dari $\{X_1,X_2\}$ adalah:

$$\mathbb{E}\exp\{i[\{v_1,v_2\},\{X_1,X_2\}]\}$$
$$= \exp\{i[\{v_1,v_2\},\{\mu_1,\mu_2\}] - 1/2\,[\{v_1,v_2\},\Sigma\{v_1,v_2\}]\}$$
$$= \exp\{i(v_1,\mu_1)_1 + i(v_2,\mu_2)_2 - 1/2(v_1,\Sigma_{11}v_1)_1 - 1/2(v_2,\Sigma_{22}v_2)_2\}$$
$$= \exp\{i(v_1,\mu_1)_1 - 1/2(v_1,\Sigma_{11}v_1)_1\} \times \exp\{i(v_2,\mu_2)_2 - 1/2(v_2,\Sigma_{22}v_2)_2\}$$

sebab $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}' = 0$. Oleh karena itu untuk $v_1 \in V_1$, $\{v_1,X_1\}_1 = [\{v_1,0\},\{X_1,X_2\}]$ yang berdistribusi normal untuk semua $v_1 \in V_1$. Jadi $\mathcal{L}(X_1) = N(\mu_1,\Sigma_{11})$ pada V_1 dan $\mathcal{L}(X_2) = N(\mu_2,\Sigma_{22})$ pada V_2. Fungsi karakteristik dari

(X_1, X_2) adalah product dari fungsi karakteristik X_1 dan X_2. Independensi X_1 dan X_2 mengikuti, maka bukti lengkap. ■

Proposisi 16 Andai $\mathcal{L}(X) = N(\mu,\Sigma)$ pada $(V,(.,.))$ dan anggap $A \in \mathcal{L}(V,W_1)$ dan $B \in \mathcal{L}(V,W_2)$ dimana $(W,(.,.)_1)$ dan $(W,(.,.)_2)$ adalah ruang inner product. AX dan BX *independent* bila dan hanya bila $A\Sigma B' = 0$.

Bukti : Anggap $X_1 = AX$ dan $X_2 = BX$. (X_1, X_2) mempunyai distribusi normal pada $W_1 \oplus W_2$ berdasarkan definisi 15

$$(w_1, X_1)_1 + (w_2, X_2)_2 = (A'w_1, X) + (B'w_2, X)$$
$$= (A'w_1 + B'w_2 \ , \ X)$$

dan umumnya berlaku pada (x, X) untuk semua $x \in V$. Oleh karena itu $\text{cov}\,\{(w_1,X_1)_1,(w_2,X_2)_2\}$

$$= \text{cov}\,\{(A'w_1,X),(B'w_2,X)\}$$
$$= (A'w_1 \ , \ \Sigma B'w_2)$$
$$= (w_1 \ , \ A\,\Sigma B'w_2)_1$$

Jadi $X_1 = AX$ dan $X_2 = BX$ unkorelasi bhb $A\Sigma B'=0$. Jika (X_1, X_2) berdistribusi normal, dengan syarat $A\Sigma B'=0$ ekivalen dengan independensi X_1 dan X_2. ■

Satu kasus khusus dari Proposisi 16 adalah contoh berikut. Jika $\mathcal{L}(X) = N(\mu, I)$ pada $(V,(.,.))$ dan P proyeksi ortogonal dalam $\mathcal{L}(V,V)$, maka PX dan $(I-P)X$ independen karena $P(I-P) = 0$.

Dan juga akibat dari Proposisi 15 berlaku untuk kasus k vektor random yaitu jika $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ berdistribusi normal pada ruang $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, maka $X_1, X_2, \ldots, X_k$ independen bila dan hanya bila X_i dan X_j unkorelasi untuk semua $i \neq j$.

2.2.2 DISTRIBUSI CHIKUADRAT

Definisi 27 Jika X variabel random dengan fungsi densitas

$$f(x) = \int \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \, dx$$

maka X didefinisikan mempunyai distribusi chikuadrat dengan derajat bebas k, dimana $\Gamma(.)$ menyatakan suatu fungsi gamma dengan $\Gamma(n) = (n-1)!$ dan mempunyai sifat $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

Dan X mempuyai mean $\mathbb{E}(X) = k$ dan varian $\mathrm{Var}(X) = 2k$ serta fungsi karakteristik

$$\phi(X) = \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{k/2} \quad ,t<1/2$$

Proposisi 17 Ambil Z_i variabel random independen berdistribusi normal standar, $i = 1,2,\ldots,k$ maka $U = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$ mempunyai distribusi chikuadrat dengan derajat bebas k.

Bukti : Dibuktikan dengan fungsi karakteristik dari distribusi normal untuk $\sum_i Z_i^2$

$$\phi(U) = \mathbb{E}\,[\exp itU] = \mathbb{E}\,[\exp it \sum_i Z_i^2]$$

$$= \mathbb{E}\,[\prod_i \exp(itZ_i^2)] = \prod_i \mathbb{E}\,[\exp itZ_i^2]$$

$$\mathbb{E}\,[\exp\, itZ^2] = \int \exp(itz^2)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-2it)z^2\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-2it)}} \int \frac{\sqrt{(1-2it)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-1/2(1-2it)z^2\right\} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-2it)}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-1/2\, u^2\right] du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-2it)}} \quad ,\ t<1/2$$

karena fungsi densitas $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-1/2\ u^2\right\} du = 1.$

Di mana dengan substitusi $(1-2it)\ z^2 = u^2$.

Jadi $\phi(U) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{k/2}$

yang tidak lain adalah fungsi karakteristik dari distribusi chikuadrat dengan derajat bebas k. Terbukti bahwa $\sum_i Z_i^2$ berdistribusi chikuadrat dengan derajat bebas k dan ditulis χ_k^2. ■

Lebih lanjut, rasio dari dua variabel random chikuadrat yang independen dibagi dengan derajat bebasnya Misalkan U dan Vvariabel random chikuadrat yang independen masing-masing dengan derajat bebas m dan n maka ditemukan suatu variabel random $X = \frac{U/m}{V/n}$ yang berdistribusi F dengan parameter m dan n dan ditulis F(m,n).

2.3.3 DISTRIBUSI BETA

Definisi 28 Jika X variabel random dengan fungsi densitas

$$f(x) = \frac{1}{B(m,n)} \int x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

dengan $m>0$ dan $n>0$ maka X didefinisikan mempunyai distribusi Beta dengan parameter m dan n ditulis $\mathcal{B}(m,n)$.

$B(m,n)$ menunjukkan fungsi beta dimana

$B(m,n) = \dfrac{\Gamma(n)\ \Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$, $\Gamma(.)$ fungsi gamma dalam definisi 27

Proposisi 18 Jika U dan V variabel random independen berdistribusi chikuadrat dengan derajat bebas m dan n sesuai definisi 27 maka variabel random

$$X = \frac{U}{U+V}$$

berdistribusi Beta dengan parameter m/2 dan n/2.

Bukti : Dengan substitusi $Y = U/X$ sehingga didapat

$$Y = \frac{U}{X} \qquad \text{maka } U = XY$$

$$X = \frac{U}{U+V} \qquad \text{maka } V = (1-X)Y$$

diturunkan dengan menggunakan transformasi jacobi yaitu :

Fungsi densitas dari X dinyatakan dengan

$$f(x) = \int f(x,y).J\,dy$$

dimana J menunjukkan ketetapan jacobi didefinisikan

$$J = \begin{vmatrix} dV/dY & dV/dX \\ dU/dY & dU/dX \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-X) & -Y \\ X & Y \end{vmatrix} = Y - XY + XY = Y$$

$|.|$ menyatakan determinan.

Karena U dan V berdistribusi chikuadrat maka densitas dari U dan V sesuai definisi 27 adalah

$$f(u,v) = \iint \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\ 2^{(m+n)/2}}\ u^{n/2-1} v^{m/2-1} e^{-1/2(u+v)} du\ dv$$

Substitusi U dan V didapat

$$f(x,y) = \iint \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\ 2^{(m+n)/2}} (xy)^{n/2-1} ((1-x)y)^{m/2-1} e^{-y/2} dx\ dy$$

Maka fungsi densitas dari X dengan $J = Y$ sesuai dengan penurunan di atas adalah

$$f(x) = \int f(x,y).J\ dy$$

$$= \iint \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\ 2^{(m+n)/2}} (xy)^{n/2-1} ((1-x)y)^{m/2-1} e^{-y/2}. Y\ dx\ dy$$

$$= \iint \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\ 2^{(m+n)/2}} (x)^{n/2-1} (1-x)^{m/2-1} y^{(m/2+n/2-1)} e^{-y/2} dx\ dy$$

$$= \iint \frac{\Gamma(m/2 + n/2)}{\Gamma(m/2)\ \Gamma(n/2)} (x)^{n/2-1} (1-x)^{m/2-1} .$$

$$\frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\ 2^{(m+n)/2}} (y)^{(n/2+m/2-1)} e^{-y/2}\ dx\ dy$$

$$= \int \frac{\Gamma(m/2 + n/2)}{\Gamma(m/2)\ \Gamma(n/2)} (x)^{n/2-1} (1-x)^{m/2-1}\ dx .$$

$$\int \frac{1}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)\ 2^{(m+n)/2}} (y)^{(n/2+m/2-1)} e^{-y/2}\ dy \quad \ldots.(*)$$

karena (*) adalah fungsi densitas maka sama dengan satu, sehingga

$$= \int \frac{\Gamma(m/2 + n/2)}{\Gamma(m/2)\ \Gamma(n/2)} (x)^{n/2-1} (1-x)^{m/2-1}\ dx .$$

Sesuai definisi 28 tentang fungsi beta maka

$$= \int \frac{1}{B(m/2, n/2)} (x)^{n/2-1} (1-x)^{m/2-1}\, dx \; .$$

tidak lain fungsi densitas distribusi $\mathcal{B}(n/2, m/2)$. ∎

2.2.4 DISTRIBUSI BERSYARAT

Definisi 29 Ambil X dan Y sebagai variabel random 2 dimensi dan $g(x,y)$ sebagai fungsi 2 variabel. Ekspektasi bersyarat dari $g(x,y)$ dengan diberikan $X = x$ dinyatakan dengan $\mathbb{E}\,[g(X,Y)\,|X=x]$ didefinisian sebagai

$$\mathbb{E}\,[g(X,Y)\,|X=x] = \int g(x,y)\; f(y|x)\; dy$$

di mana $f(y|x)$ adalah fungsi densitas $f(x,y)$ dengan syarat $X = x$ dan $\mathbb{E}\,[g(X,Y)\,|X=x]$ merupakan fungsi dari x.

Untuk kasus khusus jika $g(x,y) = y$ maka

$\mathbb{E}\,[g(X,Y)\,|X=x] = \mathbb{E}\,[Y|X=x]$ atau ditulis $\mathbb{E}\,[Y|x]$ adalah fungsi dari x, sebut saja sebagai $h(x)$ sedemikian sehingga $h(x) = \mathbb{E}\,[g(Y)\,|x]$.

Selanjutnya akan diturunkan ekspektasi dari $h(X)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,[h(X)] &= \int h(x) f(x)\; dx && \text{, sesuai definisi 29} \\ &= \int \mathbb{E}\,[g(Y|x]\; f(x)\; dx \\ &= \iint g(y)\; f(y|x)\; f(x)\; dy\; dx \\ &= \iint g(y)\; f(x,y)\; dy\; dx \\ &= \mathbb{E}\,[g(Y)] && \text{, sesuai definisi 22.} \end{aligned}$$

Padahal $\mathbb{E}(h(x)] = \mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,[g(Y|x])$ sehingga

$$\mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,[g(Y|x]) = \mathbb{E}\,[g(Y)]$$

dan $g(Y)$ dapat dinyatakan sebagai $g(Y) = \mathbb{E}\,[g(Y)\,|x]$.

Proposisi 19 Ambil X dan Y variabel random 2 dimensi dengan $g(X)$ dan $g(Y)$ adalah fungsi 1 variabel. Maka

$$\mathbb{E}\,[g(X)\ g(Y)\,|X=x] = g(x)\ \mathbb{E}\,[g(Y)\,|X=x]$$

Bukti : dengan definisi 29

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[g(X)\ g(Y)\,|X=x] &= \int g(x)\ g(y)\ f(Y|x)\ dy\\ &= g(x) \int g(y)\ f(Y|x)\ dy\\ &= g(x)\ \mathbb{E}\,[g(Y)\,|X=x]\end{aligned}$$

■

Sekarang kita akan membahas distribusi bersyarat dari satu vektor random normal yang diberikan oleh vektor random normal yang lain. Anggap vektor randon normal $X_i \in (V_i,(.,.))$, $i = 1, 2$ dan asumsikan bahwa vektor random $\{X_1,X_2\}$ dalam direct sum $V_1 \oplus V_2$ mempunyai distribusi normal dengan mean $(\mu_1,\mu_2) \in V_1 \oplus V_2$ dan kovarian

$$\operatorname{cov}(X) = \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

Jadi $\mathcal{L}(X_i) = N(\mu_i,\Sigma_{ii})$ pada $(V_i,(.,.)_i)$ untuk $i = 1, 2$.

Distribusi bersyarat dari X_1 yang diberikan $X_2 = x_2 \in V_2$ digambarkan sebagai berikut:

Proposisi 20 Ambil $\mathcal{L}(X_1|X_2=x_2)$ menyatakan distribusi bersyarat dari X_1 yang diberikan $X_2 = x_2$ maka asumsi normal: $\mathcal{L}(X_1|X_2=x_2) = N(\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)\ ,\ \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}')$.

Bukti : dibuktikan dengan menghitung fungsi karakteristik bersyarat dari X_1 yang diberikan $X_2 = x_2$. Pertama tulis dulu bahwa $X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$ dan X_2 berdistribusi normal bersama dalam $V_1 \oplus V_2$ adalah unkorelasi berdasarkan proposisi 10. Jadi $X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$ dan X_2 independen. Oleh karena itu untuk $x \in V$

$$\phi(x) = \mathbb{E}\ (\exp\ [i(x,X_1)_1]\ |X_2=x_2)$$

$$= \mathbb{E}\ (\exp\ [i(x,X_1)_1 - i(x,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)_1 + i(x,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)_1]\ |X_2=x_2)$$

$$= \exp\ [i(x,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2)_1]\ \mathbb{E}(\exp\ [i(x,X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)_1]\ |X_2=x_2)$$

$$= \exp\ [i(x,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2)_1]\ \mathbb{E}\ \exp\ [i(x,X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2)_1]$$

dimana persamaan di atas mengikuti independensi dari X_2 dan $X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$. Oleh karena itu jelas bahwa

$$\mathcal{L}(X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2) = N(\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2\ ,\ \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12})$$

sebagaimana $X_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$ berdistribusi normal pada V_1 dengan vektor mean dan kovarian yang diberikan pada proposisi 10. Jadi

$$\phi(x) = \exp\ [i(x,\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x_2)_1]\ \exp\ [i(x,\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2)_1]$$

$$\exp\ [-1/2\ (x,(\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12})_1 x)]$$

$$= \exp[i(x,\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2))_1 - 1/2(x,(\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12})x)_1] \blacksquare$$

Untuk vektor random normal $X_i \in (V_i,(.,.)_i)$, i = 1, 2 Proposisi di atas menunjukkan bahwa mean bersyarat X_1 yang diberikan $X_2 = x_2$ adalah

$$\mathbb{E}\ (X_1|X_2=x_2) = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)$$

Dan kovarian bersyarat dari X_1 tidak dipengaruhi harga X_2. Sedangkan kovarian bersyaratnya sama dengan kovarian yang tidak bersyarat dari vektor random normal $X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$.

Jelas terlihat bahwa vektor mean bersyarat dan kovarian pada distribusi bersyarat X_1 yang diberikan $X_2=x_2$ sebagai distribusi bersyarat ini adalah normal.

Contoh 2 Ambil $W_1, W_2, \ldots, W_n$ sebagai koordinat vektor random yang independen dalam R^p.

Asumsikan bahwa $\mathcal{L}(W_i) = N(\mu,\Sigma)$ sehingga $\mu \in R^p$ adalah koordinat vektor mean untuk setiap W_i dan Σ matriks kovarian p x p pada setiap W_i. Bentuk matriks random $X \in \mathcal{L}_{p,n}$ dengan elemen-elemen W_i', i= 1,2,...,n. Kita tahu bahwa $\mathbb{E}X = e\mu'$ dan $\mathrm{Cov}(X) = I_n \otimes \Sigma$ di mana $e \in R^n$ adalah vektor satuan. Untuk menunjukkan bahwa X mempunyai distribusi normal pada ruang inner product $(\mathcal{L}_{p,n}, \langle .,. \rangle)$ harus dibuktikan bahwa untuk setiap $A \in \mathcal{L}_{p,n}$, $\langle A,X \rangle$ mempunyai distribusi normal. Ambil elemen-elemen A sebagai $a_1', \ldots, a_n'$ $a_i \in R^p$ maka $\langle A,X \rangle = \mathrm{tr}\ AX' = \sum_1^n a_i' W_i$.

Oleh karena itu $a_i' W_i$ mempunyai distribusi normal pada R jika $\mathcal{L}(W_i) = N(\mu,\Sigma)$ pada R^p. Juga jika $W_1, \ldots, W_n$ independen , $a_i' W_i$ juga independen untuk i = 1,...,n. Karena kombinasi linier dari variabel random normal independen adalah normal, $\langle A,X \rangle$ berdistribusi normal untuk setiap $A \in \mathcal{L}_{p,n}$. Jadi $\mathcal{L}(X) = N(e\mu', I_n \otimes \Sigma)$ pada ruang inner product $(\mathcal{L}_{p,n}, \langle .,. \rangle)$.

Sekarang kita akan menggambarkan distribusi bersyarat dari q kolom pertama dari X yang diberikan r kolom terakhir dari X dimana q+r = p, sesuai dengan proposisi 20. Partisi setiap W_i menjadi Y_i dan Z_i dimana $Y_i \in R^q$ terdiri dari q koordinat pertama dari W_i dan $Z_i \in R^r$ terdiri dari r koordinat terakhir dari W_i. Ambil $X_1 \in \mathcal{L}_{q,n}$ mempunyai elemen-elemen $Z_1', \ldots, Z_n'$. Demikian juga partisi μ menjadi $\mu_1 \in R^q$ dan $\mu_2 \in R^r$ sehingga $\mathbb{E}Y_i = \mu_1$ dan $\mathbb{E}Z_i = \mu_2$, i = 1, 2, ..., n . Selanjutnya partisi matriks kovarian Σ untuk setiap W sebagai

$$\mathrm{Cov}\ (Y_i, Z_i) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \text{ dimana } \Sigma_{21} = \Sigma_{12}'.$$

Dari independensi $W_1, W_2, \ldots, W_n$ maka

$$\mathcal{L}(X_1) = N(e\mu_1', I_n \otimes \Sigma_{11})$$

$$\mathcal{L}(X_2) = N(e\mu_2', I_n \otimes \Sigma_{22})$$

dan (X_1, X_2) mempunyai distribusi normal pada $\mathcal{L}_{q,n} \oplus \mathcal{L}_{r,n}$ dengan vektor mean $(e\mu_1', e\mu_2')$ dan matriks kovarian

$$\mathrm{cov}\ (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} I_n \otimes \Sigma_{11} & I_n \otimes \Sigma_{12} \\ I_n \otimes \Sigma_{21} & I_n \otimes \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Sekarang proposisi 20 secara langsung digunakan untuk (X_1, X_2) dimana dibuat korespondensi parameter

$$\mu_i \longleftrightarrow e\mu_i' \quad i = 1,\ 2.$$

$$\Sigma_{ij} \longleftrightarrow I_n \otimes \Sigma_{ij}$$

Sehingga distribusi X_1 yang diberikan $X_2 = x_2 \in \mathcal{L}_{r,n}$ adalah normal dengan vektor mean

$$\mathbb{E}(X_1 | X_2 = x_2) = e\mu_1' + (I_n \otimes \Sigma_{12})(I_n \otimes \Sigma_{22})^{-1}(x_2 - e\mu_2')$$

dan matriks kovarian

$$\mathrm{Cov}(X_1 | X_2 = x_2) = I_n \otimes \Sigma_{11} - (I_n \otimes \Sigma_{12})(I_n \otimes \Sigma_{22})^{-1}(I_n \otimes \Sigma_{21})$$

Dengan menggunakan ketetapan-ketetapan kronecker product, didapat $\mathbb{E}(X_1|X_2=x_2) = e\mu_1' + (x_2-e\mu_2')\,\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$

$$\mathrm{Cov}(X_1|X_2=x_2) = I_n \otimes (\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) = I_n \otimes \Sigma_{11.2}$$

2.3 GRUP DAN INVARIAN

2.3.1 GRUP

Kita mulai dengan mendefinisikan suatu grup dan kemudian diberikan beberapa contoh grup matriks.

Definisi 30 Suatu grup $(G,\circ)$ adalah himpunan G bersama dengan operasi pergandaan $\circ$ sedemikian sehingga memenuhi sifat-sifat berikut untuk semua elemen-elemen dalam G.

(i) $(g_1 \circ g_2)\circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$

(ii) Ada elemen terentu dalam G, e sedemikian sehingga $g\circ e = e\circ g = g$ untuk semua $g \in G$. Dan e selanjutnya disebut identitas dalam G.

(iii) Untuk setiap $g \in G$ terdapat elemen $g^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $g\circ g^{-1} = g^{-1}\circ g = e$. Dan g^{-1} selanjutnya disebut sebagai invers dari g.

Suatu grup G disebut komutatif bila $g_1\circ g_2 = g_2 \circ g_1$ untuk semua $g_1, g_2 \in G$. Jelas bahwa suatu ruang vektor V adalah grup komutatif dimana operasi grupnya adalah penjumlahan, elemen identitasnya $0 \in V$ dan invers dari x adalah $-x$.

Contoh 3 Jika $(V,(.,.))$ ruang inner product berdimensi hingga, ditunjukkan bahwa himpunan semua transformasi ortogonal $\mathcal{O}(V)$ adalah grup. Operasi grupnya adalah komposisi transformasi linier, elemen identitasnya adalah transformasi linier identitas dan jika $\Gamma \in \mathcal{O}(V)$, invers dari Γ adalah Γ'. Jika V ruang koordinat R^n, $\mathcal{O}(V)$ ditulis $\mathcal{O}_n$ yang mana merupakan grup matriks ortogonal n x n.

Contoh 4 Ambil ruang koordinat R^p dan G_T^+ sehingga himpunan semua matriks segitiga bawah p x p dengan elemen diagonal positif. Operasi grup dalam G_T^+ diambil sebagai multiplikasi matriks dengan identitasnya adalah matriks identitas p x p dan jika $T \in G_T^+$,T^{-1} merupakan invers matriks dari T. Begitu pula halnya dengan G_U^+.

Definisi 31 Ambil $(G, \circ)$ suatu grup dan $\mathcal{X}$ suatu himpunan. Grup $(G, \circ)$ beroperasi di sisi kiri dari $\mathcal{X}$ jika untuk setiap pasangan $(g, x) \in G x \mathcal{X}$, terdapat korespondensi suatu elemen tertentu dari $\mathcal{X}$ dilambangkan dengan gx sedemikian sehingga (i) $g_1(g_2x) = (g_1 \circ g_2)x$

(ii) $ex = x$

Berdasarkan definisi di atas bahwa fungsi pada $G \times \mathcal{X}$ ke $\mathcal{X}$ dengan hasil pada (g, x) ditulis dengan gx dan di bawah pemetaan ini, (g_1, g_2x) dan $(g_1 \circ g_2, x)$ dibawa ke elemen yang sama.

2.3.2 FUNGSI INVARIAN

Definisi 32 Jika $X \in \mathcal{X}$ suatu vektor random dengan distribusi P dimana $\mathcal{X}$ adalah ruang matriks n x p dari rank p $(n \geq p)$, maka P disebut *invarian kiri dari* $\mathbb{O}_n$ jika $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\Gamma X)$ untuk $\Gamma \in \mathbb{O}_n$.

Dan sebaliknya P adalah *invarian kanan dari* $\mathbb{O}_n$ jika untuk $\Gamma \in \mathbb{O}_n$ berlaku $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X\Gamma)$.

Untuk setiap $x \in \mathcal{X}$, himpunan $\{gx \mid g \in G\}$ adalah *orbit* dari x di bawah operasi G.

Definisi 33 Andaikan G beroperasi pada sisi kiri dari $\mathcal{X}$. Fungsi f pada $\mathcal{X}$ ke $\mathcal{Y}$ adalah invarian jika $f(x) = f(gx)$ untuk semua $x \in \mathcal{X}$ dan $g \in G$. Fungsi f disebut *invarian maksimum* jika f invarian dan $f(x_1) = f(x_2)$ sedemikian sehingga $x_1 = gx_2$ untuk sebarang $g \in G$.