BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 MATRIKS

2.1.1 Definisi Matriks

Matriks didiefinisikan sebagai suatu susunan segiempat dari elemen-elemen yang dapat berupa bilangan nyata, bilangan kompleks, fungsi atau operator.

Contoh 2.1:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriks ini mempunyai n baris dan m kolom dan disebut matriks $n \times m$. a_{ij} menyatakan elemen ke (i,j) matrik A, dimana indeks pertama (i) menyatakan banyaknya baris dan indeks kedua (j) menyatakan banyak kolom.

Matriks Identitas. Matriks identitas atau matriks satuan I adalah suatu matriks yang elemen diagonalnya sama dengan satu sedangkan elemen lainnya sama dengan nol.

Contoh 2.2:

$$I = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

Ada beberapa jenis matriks khusus yang digunakan dalam kajian ini diantaranya:

1. **Matriks Persegi.** Matriks Persegi adalah matrik yang mempunyai baris dan kolom yang sama atau berorde n, dimana n adalah banyaknya baris atau kolom.

2. **Matriks Singular.** Matriks persegi disebut singular jika determinannya sama dengan nol, jika determinannya tidak sama dengan nol maka matriks disebut nonsingular.

3. **Matriks Konjugasi.** Jika elemen kompleks matriks A diganti dengan masing-masing konjugasinya, maka matriks yang diperoleh disebut konjugasi dari A yang dinyatakan dengan $\overline{A} = \overline{a}_{ij}$.

   Contoh 2.3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+j & -3-3j & -1+4j \\ -1+j & -1 & -2+3j \end{bmatrix} \quad \text{maka } \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-j & -3+3j & -1-4j \\ -1-j & -1 & -2-3j \end{bmatrix}$$

4. **Transpose Konjugasi.** Jika baris dan kolom matriks Anxm ditukar maka matriks mxn yang diperoleh disebut transpose matriks A, yang dinyatakan dengan A^T. Transpose konjugasi adalah konjugasi dari transpose suatu matriks. Misal matriks A transpose konjugasinya dinyatakan dengan $\overline{A}^T$ atau A^*. Selanjutnya untuk transpose konjugasi A digunakan notasi $A^* = (\overline{a}_{ij})$.

   Conton 2.4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2j & 1+5j \\ 2+j & j & 3-j \\ 3 & 1 & 1+3j \end{bmatrix} \qquad \text{maka } \overline{A}^T = A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2-j & 3 \\ -2j & -j & 1 \\ 1-5j & 3+j & 1-3j \end{bmatrix}$$

5. **Matriks Simetrik.** Matriks simetrik adalah matriks persegi yang transposenya sama dengan dirinya sendiri atau $A = A^T$. Jika matriks perseginya sama dengan negatif transposenya maka matriks disebut matriks simetrik miring atau $A = -A^T$.

Contoh 2.5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{dan } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. **Matriks Hermitian.** Matriks Hermitian adalah matriks persegi yang transposenya sama dengan dirinya sendiri atau $A^H = A$. Jika transpose matriks perseginya sama dengan negatif maka matriks disebut matriks antihermitian atau $A^H = -A$.

Contoh 2.6:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix} \qquad A^H = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Formula-formula yang digunakan pada Invers Matriks

1. Untuk matriks berordo 2 dan berordo 3

$$A^{-1} = \frac{-1}{\text{Det } A} \text{Adj } [A]$$

Dimana : Determinan $A \neq 0$

2. Untuk matriks berordo k (k=4,5,....)

$$A^{-1} = E_k \ldots E_2 \,.\, E_1 \,.\, I_n \qquad (I_n = \text{Elemen Identitas})$$

3. Jika A, B, C dan D berturut-turut merupakan matriks $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ dan $m\times m$ maka berlaku Lemma Inversi Matriks sebagai berikut :

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \tag{2.1}$$

Bukti :

Akan dibuktikan dengan mengalikan kedua ruas persamaan diatas dengan (A+BDC) sehingga didapat inversnya masing-masing:

$$(A + BDC)\,(A + BDC)^{-1} = (A + BDC)[A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}]$$

$$\begin{aligned} I &= I + BDCA^{-1} - B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} - BDCA^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - (B + BDCA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BD(D^{-1} + CA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BDCA^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

∎

Jika $D = I_m$ maka persamaan (2.1) menjadi :

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

4. Jika A, B, C dan D berturut-turut merupakan matriks $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ dan $m\times m$ maka :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

2.1.3 Nilai Eigen

Definisi 2.1:

Jika A adalah matrik nxn, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigen vektor*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x;

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.7:

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena $Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran nxn maka tulis kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$.

Atau secara ekivalen

$$\lambda Ix - Ax = 0$$

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (2.2)$$

Diberikan

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0 \qquad (2.3)$$

Sehingga persamaan (2.2) mempunyai penyelesaian tidak nol dan skalar yang memenuhi persamaan tersebut merupakan nilai eigen dari A. Persamaan (2.3) dinamakan *persamaan karakteristik* A, sedangkan det $(\lambda I - A)$ yang merupakan polinom dalam λ disebut *polinom karakteristik* dari A.

Contoh 2.8 :

Cari nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Polinom karakteristik dari A adalah:

$$|\lambda I - A| = \left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-5) - 4(\lambda-5)$$

$$= (\lambda^2 - 6\lambda - 9)(\lambda-5) - 4\lambda - 20$$

$$= \lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-5)^2$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah :

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$

Penyelesaian persamaan karakteristik adalah

$\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$ (merupakan nilai-nilai eigen dari A)

2.1.4 Vektor Eigen

Vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor taknol x yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Secara ekivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor taknol dalam ruang penyelesaian dari $(\lambda I - A)x = 0$. Ruang penyelesaian ini disebut sebagai ruang eigen (*Eigen space*) dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 2.9 :

Diketahui :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Cari vektor-vektor eigen dari A.

Jawab:

Dari contoh 2.8 telah diperoleh nilai-nilai eigen dari A yaitu λ=1 dan λ=5.

Akan ditentukan vektor-vektor eigen dari A.

Misal $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan A dan x

mempunyai penyelesaian tak trivial dari $(\lambda I - A)\, x = 0$, yaitu dari

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jika λ=5 maka $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

sehingga diperoleh

$2x_1 + 2x_2 = 0$

$2x_1 = -2x_2$

$x_1 = -x_2$

Jawab dari persamaan ini merupakan ruang vektor berdimensi dua. Dalam bentuk vektor, yaitu :

$(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, x_3)$

$= x_2(-1,1,0) + x_3(0,0,1)$

jadi, vektor-vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor bebas linier, maka vektor-vektor tersebut adalah vektor - vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=5

jika λ=1 maka $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

sehingga

$-2x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 = x_2$

$-4x_3 = 0$

Jawab dari persamaan ini merupakan ruang vektor berdimensi satu. Dalam bentuk vektor, yaitu

$(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_2, 0) = x_2(1,1,0)$

jadi vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan λ = 1 adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.1.5. Diagonalisasi.

Definisi 2.2:

Matriks bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks P yang mempunyai invers yaitu P^{-1} sehingga $P^{-1}AP$ diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Teorema 2.1:

A adalah matriks nxn. A dapat didiagonalisasi jika hanya jika A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Bukti:

(a)⇒(b)

karena A dianggap dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang mempunyai invers.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, katakanlah $P^{-1}AP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Maka AP = PD, yakni :

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Jika dimisalkan p_1, p_2, .., p_n menyatakan vektor-vektor kolom p, maka pada persamaan (2.4) kolom-kolom PD yang berurutan adalah $\lambda_1 p_1$, $\lambda_2 p_2$, … , $\lambda_n p_n$. Sedangkan kolom-kolom AP yang berurutan adalah Ap_1,Ap_2, … , Ap_n. Sehingga :

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2,\ \ldots,\ Ap_n = \lambda_n p_n. \tag{2.5}$$

Karena P mempunyai invers, maka vektor-vektor kolomnya semuanya tidak nol. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ adalah nilai eigen dari A, dan $p_1,p_2,\ldots,p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Jadi diperoleh $p_1,p_2,\ldots,p_n$ vektor eigen dari A yang bebas linier.

(a) $\Leftarrow$ (b)

A mempunyai vektor eigen bebas linier; $p_1,p_2,\ldots,p_n$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, λ_2, … , λ_n.

Misalkan : $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $p_1,p_2,\ldots,p_n$. Kolom-kolom hasil kali AP adalah $Ap_1,Ap_2,\ldots,Ap_n$, tetapi $Ap_1=\lambda_1 p_1, Ap_2= \lambda_2 p_2, \ldots, Ap_n=\lambda_n p_n$, sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = PD \qquad (2.6)$$

Dimana D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada diagonal utama . Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linier, maka P mempunyai invers. Jadi persamaan (2.6) dapat ditulis kembali sebagai

$$P^{-1}AP=D$$

Jadi A dapat didiagonalisasi.

Langkah-langkah mendiagonalkan matriks A yang berukuran nxn :

1. Mencari matriks n vektor eigen bebas linier dari matriks A yaitu $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
2. Membentuk matriks P dengan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sebagai kolom-kolomnya.
3. Matriks $P^{-1}AP$ akan diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya yang berurutan, dimana λ_i adalah niai eigen yang bersesuaian dengan p_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Contoh 2.10:

Carilah matriks P yang akan mendiagonalkan :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab :

Langkah 1. Mencari n vektor eigen yang bebas linier A, $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Dari contoh (2.8) diketahui nilai-nilai eigen dari A yaitu $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$.

Untuk $\lambda = 5$ didapat dua vektor eigen bebas linier yaitu $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda = 1$ didapat satu vektor eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sehingga vektor-vektor eigen bebas liniernya adalah $p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Langkah 2. Membentuk matriks P dengan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sebagai kolom-kolomnya, sehingga :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 3. Menentukan matriks diagonal

Mencari P^{-1} dengan ekspansi kofaktor

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$p_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad p_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad p_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$p_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad p_{22} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad p_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$p_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad p_{23} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad p_{33} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

sehingga adj P = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

maka $P^{-1} = \frac{1}{|P|}$ adj P = $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Didapat $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga untuk matriks P = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ yang mendiagonalisasi matriks

A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ didapat $P^{-1}AP$ yang diagonal, yaitu $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.1.6 Polinomial Matriks n x n

Definisi 2.3:

Jika polinomial berhingga dari suatu skalar x

$$\phi(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

maka polinomial

$$\phi(A) = a_m A^m + a_{m-1} A_m^{-1} + \ldots + a_1 A + a_o$$

dimana A matriks nxn, disebut suatu polinomial dalam A

Teorema 2.2 : (teori Caley – Hamilton)

Misalkan A matriks n xn dengan persamaan karakteristik

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

maka matriks A memenuhi persamaan karakteristik atau

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I = 0$$

Bukti :

Diketahui persamaan karakteristik

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0 \qquad (2.7)$$

Adjoin (λI – A) adalah polinomial dalam λ derajat n – 1 , yaitu

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n = 0 \qquad (2.8)$$

Dimana $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah konstanta matriks nxn dan $B_1 = 1$

$$(\lambda I - A)\,\mathrm{adj}(\lambda I - A) = [\mathrm{adj}(\lambda I - A)](\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)I$$

Dari persamaan (2.7) dan (2.8)

$$\det(\lambda I - A)I = \left|\lambda^n + \alpha_1\right|\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\left|\lambda + \alpha_n\right|$$

$$= (\lambda I - A)\, \mathrm{adj}\,(\lambda I - A)$$

$$= [\mathrm{adj}(\lambda I - A)]\,(\lambda I - A)$$

$$= [B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\lambda + B_n]\,(\lambda I - A)$$

Perkalian $(\lambda I - A)$ dan adj$(\lambda I - A)$ sama dengan nol jika salah satu diantaranya nol. Jika persamaan terakhir A disubstitusikan pada $(\lambda I - A)$ menjadi nol. Sehingga

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I = 0$$

2.2. Transformasi – z

Definisi 2.4 :

Transformasi-z dari fungsi waktu x(t) dimana $t \geq 0$ atau barisan nilai-nilai x(kT) atau x(k) dimana k = 0,1,2, … , n dan T periode cacah didefinisikan sebagai :

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = Z[x(k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k} \qquad (2.9)$$

Dimana x(t) = 0 jika t<0 dan x(kT) = x(k) = 0 untuk k<0, z adalah variabel kompleks.

Contoh 2.12 :

Tentukan transformasi z dari fungsi :

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Jawab :

Anggap $x(kT) = kT \qquad k = 0,1,2, \ldots$

maka $X(z) = Z[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k}$

$$Z[t] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,T\,z^{-k}$$

$$= T \sum_{k=0}^{\infty} k\,z^{-k}$$

$$= T\,(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots\,)$$

dengan menggunakan penderetan binomial diperoleh :

$$Z[t] = T\,\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{-2}} \qquad = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{-2}}$$

Contoh 2.13 :

Tentukan transformasi z dari

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Jawab :

jika $x(kT) = e^{-akT}$; $k = 0,1,2, \ldots$

maka $X(z) = Z[e^{-at}]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\, z^{-k}$$

$$= 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{2aT}z^{-2} + e^{3aT}z^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad (\text{ karena } |z| > e^{-at}, \text{ maka })$$

$$= \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

Sedangkan transformasi-z balik dari X(z) diperoleh sebagai jumlah transformasi-z balikan (invers) dari pecahan-pecahan parsial.

Contoh 2.14 :

Tentukan x(kT) jika

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

Jawab :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{-10}{(z-1)} + \frac{10}{(z-2)}$$

$$X(z) = \frac{-10z}{z-1} + \frac{10z}{z-2}$$

dengan melihat tabel diperoleh

$$z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1, z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^k$$

sehingga

$$x(kT) = 10(-1+2^k), \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Penyelesaian persamaan linier dengan transformasi-z digunakan notasi yang disederhanakan, yaitu x(k) untuk menyatakan x(kT).

Teorema 2.3 :

Transformasi-z dari x(k+1) diberikan oleh

$$Z[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

Bukti :

Akan dibuktikan

$$Z[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(k+1)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z^{-k+1}$$

$$= z\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - x(0)\right]$$

$$= zX(z) - z(0) \qquad \blacksquare$$

jika x(0) = 0 maka Z[x(k+1)] = zX(z)

Persamaan (2.9) dapat dimodifikasikan secara mudah untuk mendapatkan hubungan berikut :

$$Z[x(k+1)] = z\, Z\,[\, x(k+1)\,] - z\, x(1)$$

$$= z\,[\, z\, X(z) - z\, x(0)\,] - z\, x(1)$$

$$= z^2\, X(z) - z^2\, x(0) - z\, x(1)$$

jadi

$$Z[x(k+1)] = z^2 X(z) - z^2 x(0)\, z\, x(1) \qquad (2.10)$$

Dengan cara yang sama diperoleh rumus untuk mendapatkan Z[x(k+m)], yaitu :

$$Z[x(k+m)] = z^{m} X(z) - z^{m} x(0) - z^{m-1} x(1) - z^{m-2} x(2) - \ldots - zx(m-1) \qquad (2.11)$$

Dimana m adalah integer positif.

2.3. Fungsi Alih

Definisi 2.5 :

Fungsi alih dari sistem waktu diskrit merupakan perbandingan antara transformasi-z keluaran terhadap tranformasi-z masukan dengan asumsi semua syarat awal nol.

Matriks fungsi alih merupakan perluasan dari fungsi alih. Matriks fungsi alih waktu diskrit adalah perbandingan antara transformasi-z multi keluaran (*multiple output*) terhadap tranformasi-z multi masukan (*multiple input*) dengan asumsi semua syarat awal nol. Untuk selanjutnya akan digunakan istilah fungsi alih saja.

Diberikan persamaan ruang keadaan sistem linier berubah terhadap waktu (*time-varying*) sebagai berikut :

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \tag{2.12}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{2.13}$$

dimana

x(k) = vektor keadaan (vektor-n)
u(k) = vektrol kontrol masukan (vektor-r)
y(k) = vektor keluaran (vektor-m)
G = matriks nxn
H = matriks nxr
C = matriks mxn
D = matriks mxr

dengan menggunakan transformasi-z, diperoleh :

$$z\,X(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

Diasumsikan $x(0) = 0$, maka :

$$(zI - G)\,X(z) = H\,U(z)$$

$$X(z) = (zI - G)^{-1}HU(z)$$

dan

$$Y(z) = C\,(zI - G)^{-1}H\,U(z) + D\,U(z)$$

$$= [C(zI - G)^{-1}H + D]\, U(z)$$

$$= G(z)\, U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C\,(zI - G)^{-1}H + D \qquad (2.14)$$

Invers dari (zI – G) dapat dinyatakan sebagai :

$$(zI - G)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(zI - G)}{|zI - G|}$$

sehingga fungsi alihnya menjadi :

$$G(z) = C\,\frac{\operatorname{adj}(zI - G)}{|zI - G|}\,H + D$$

Contoh 2.15 :

Tentukan fungsi alih untuk sistem yang diberikan oleh :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Jawab :

Fungsi alih diberikan oleh :

$$G(z) = C\,(zI - G)^{-1}H + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{z+1}{z^2+z+2} & \frac{1}{z^2+z+2} \\ \frac{-2}{z^2+z+2} & \frac{z}{z^2+z+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga fungsi alihnya menjadi :

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1+z}{z^2+z+2} \\ \dfrac{z}{z^2+z+2} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6:

Spektrum dari matriks G adalah himpunan dari semua nilai eigen (λ_i) dari G, dengan notasi $\sigma(G)$.

Definisi 2.7:

Sistem (2.12) disebut stabil asimptotik jika dan hanya jika $|\lambda_i|<1, \forall\ \lambda_i \in \sigma(G)$, sebaliknya sistem (2.12) disebut tidak stabil murni jika hanya jika $|\lambda_i|>1, \forall\ \lambda_i \in \sigma(G)$ dan disebut tidak stabil jika terdapat $|\lambda_i|>1$, untuk suatu $\lambda_i \in \sigma(G)$.

Dimana G adalah matriks nonsingular n×n

2.4 Sistem Kontrol Loop Tertutup, Keterkontrolan dan Keterobservasian

2.4.1 Sistem Kontrol Loop Tertutup

Sistem kontrol loop tertutup adalah sistem kontrol yang sinyal keluarannya mempunyai pengaruh langsung pada aksi pengontrolan. Jadi sistem kontrol loop tertutup merupakan sistem kontrol berumpan balik dimana sinyal kesalahan penggerak yang merupakan selisih antara sinyal masukan dan sinyal umpan balik, diumpankan ke pengontrol untuk memperkecil kesalahan dan membuat agar keluaran sistem mendekati harga yang diinginkan.

Diberikan persamaan sistem kontrol loop tertutup sebagai berikut :

$$x(k+1) = Gx(k) + H(-Kx(k))$$

$$x(k+1) = (G - HK)\, x(k) \qquad (2.15)$$

dimana :

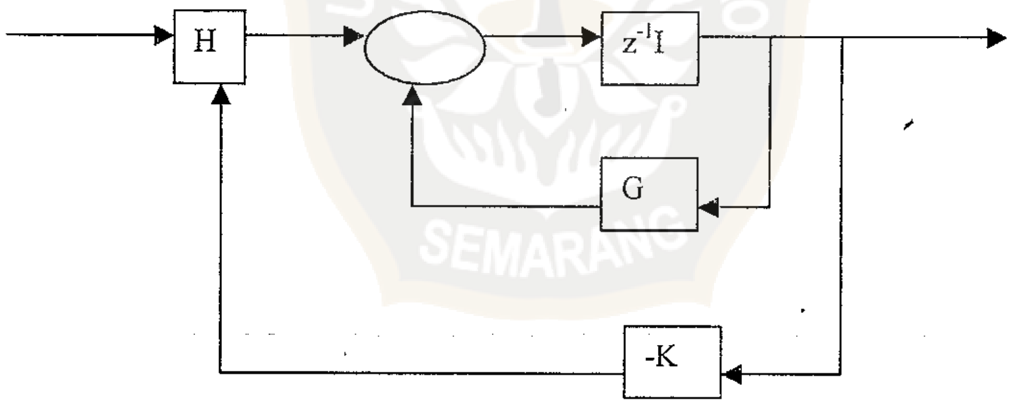
x(k) = vektor keadaan

u(k) = kontrol masukan

G = matriks $n \times n$

H = matriks $n \times 1$

Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada diagram blok dibawah ini :



Gambar 2.1. Diagram blok kontrol loop tertutup

Gambar 2.1 memperlihatkan proses kontrol loop tertutup dari persamaan (2.15). Diberikan masukan umpan balik K pada sistem sehingga keadaan G dikalikan dengan variabel keadaan dikurangi dengan perkalian matriks masukan H. Kemudian umpan balik keadaan K dan variabel keadaan sehingga didapat keadaan akhir x(k+1).

2.4.2 Keterkontrolan

Suatu sistem disebut terkontrol (*controllable*) pada saat t_0 jika dengan menggunakan vektor kontrol tanpa kendali dapat memindahkan sistem dari keadaan (*state*) awal sembarang x (0) ke keadaan lain sembarang dalam periode waktu yang berhingga.

Diberikan persamaan sistem kontrol waktu diskrit (*Discrete – time control system*) sebagai berikut :

$$x[(k+1)T] = Gx(kT) + Hu(kT) \qquad (2.16)$$

dimana :

x(kT) = vektor keadaan

u(kT) = vektor kontrol masukan untuk $kT \leq t < (k+1)T$

G = matriks nxn

H = matriks nx1

T = Periode cacah

Persamaan (2.15) disebut terkontrol secara lengkap jika terdapat sinyal kontrol masukan konstan u(kT) yang terdefinisi pada periode cacah berhingga sedemikian sehingga mulai dari keadaan awal, keadaan x(kT) dapat dipindahkan ke seberang keadaan akhir x_f yang diinginkan pada periode cacah terbesar n.

Teorema 2.4 :

Jika keadaan sistem yang dinyatakan oleh persamaan 2.15 terkontrol lengkap maka vektor H,GH, ..., $G^{n-1}H$ bebas linier atau rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1}H] = n$

Bukti :

Andaikan rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1}H] < n$

Dengan menggunakan teorema Caley-Hamilton (teorema2.2) dapat ditunjukkan bahwa untuk $i=0,1,2,\ldots,n-1$ G^iH dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari $H, GH, \ldots, G^{n-1}H$ dan untuk setiap i maka rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1}H] < n$. Vektor-vektor $H, GH, \ldots, G^{n-1}H$ tidak dapat direntang pada ruang dimensi n, sehingga beberapa x_f tidak mungkin diperoleh dari $x(iT) = x_f$ untuk setiap i.

Jadi pengandaian harus diingkar, rank $[H \vdots GH \vdots \ldots \vdots G^{n-1}H] = n$.

Contoh 2.16 :

Tunjukkan apakah persamaan sistem berikut terkontrol secara lengkap.

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad \text{dimana } G = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jawab :

Karena persamaan sistem berorde dua, maka sistem terkontrol secara lengkap jika rank $[H \vdots GH] = 2$.

$$GH = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } [H \vdots GH] = \text{rank } \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank baris : } \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{8b_2 - b_1} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 44 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank kolom : } \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_2 + 5k_1} \begin{bmatrix} 8 & -44 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

rank $[H \vdots GH] = 2$

Jadi sistem terkontrol secara lengkap

2.4.3 Keterobservasian

Sistem disebut terobservasi atau teramati sempurna jika setiap keadaan awal x(0) dapat ditentukan dari pengamatan (*observability*) y(kT) selama selang waktu terhingga. Anggap sistem kontrol waktu diskrit didefinisikan sebagai berikut :

$$x((k+1)T) = G\,x(kT) \tag{2.17}$$

$$y(kT) = Cx(kT) \tag{2.18}$$

dimana:

x (kT) = vektor keadaan

y (kT) = vektor keluaran

G = matriks nxn

C = matriks mxn

T = periode cacah

Sistem terobservasi sempurna jika untuk keluaran y(kT) pada periode cacah berhingga dapat ditentukan vektor keadaan awal x(0) sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$x(kT) = G^k\,x(0)$$

dan menghasilkan

$$y(kT) = CG^k\,x(0)$$

Keterobservasian sempurna (*complete observability*) berarti bahwa, untuk y(0),y(T),...,y(NT) dapat ditentukan $x_1(0)$, $x_2(0)$,...,$x_n(0)$. Dengan mengambil n harga y(kT) untuk menentukan n variabel yang tidak diketahui dimana N = n – 1, diberikan sistem terobservasi sempurna sebagai berikut :

$$y(0) = C\,x\,(0)$$

$$y\,(T) = C\,G\,x\,(0)$$

$$\vdots$$

$$y((n\text{-}1)T) = CG^{n-1}x(0)$$

Dengan mengingat bahwa y adalah vektor m dimensi, maka n persamaan simultan diatas akan menghasilkan nm persamaan dengan $x_1(0)$, $x_2(0),\ldots,x_n(0)$. Untuk mendapatkan $x_1(0)$, $x_2(0),\ldots,x_n(0)$ yang tunggal dari nm persamaan, maka n harus bebas linier dari semua persamaan yang ada. Sehingga matriks nm x n harus mempunyai rank n.

$$\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CG \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

Jadi sistem yang dinyatakan oleh persamaan (2.17) dan (2.18) terobservasi sempurna jika matriks n x nm mempunyai rank n.

$$[C^* \vdots G^*H^* \vdots \ldots \vdots (G^*)^{n-1}C^*] = n.$$