BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Definisi 2.1

Matriks adalah sistim angka atau bilangan yang disusun dalam empat persegi panjang yang ukurannya dinyatakan dalam banyaknya baris atau kolom. Suatu matriks dinotasikan dengan $A_{(mxn)} = (a_{ij})$, $i = 1,2,\ldots m$ dan $j=1,2,\ldots n$, dimana m dan n masing-masing menyatakan jumlah baris dan kolom matriks, sedangkan (mxn) adalah ordo (ukuran) matriks.

$$A_{(mxn)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Angka atau bilangan dalam matriks disebut sebagai elemen matriks.

Contoh 2.1

$$A_{(2x3)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Elemen matriks $A_{(2x3)}$ adalah :

$a_{11}= 5$ $a_{12}= 1$ $a_{13}= 4$

$a_{21}= 2$ $a_{22}= 1$ $a_{23}= 3$

2.1.2 Beberapa Jenis Matriks

a. Matriks Persegi (Bujur Sangkar): yaitu matriks yang ukuran baris dan kolomnya sama. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, …, a_{nm} disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A.

Contoh 2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$ adalah matrks bujur sangkar berukuran 2

b. Matrks Simetris: matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri, dengan perkataan lain bila $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j. Jelas bahwa matriks simetris adalah bujur sangkar.

Contoh 2.3

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Vektor Baris : adalah suatu matriks dengan satu baris dan n kolom.

Contoh 2.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

d. Vektor Kolom: adalah suatu matriks dengan m baris dan 1 kolom.

Contoh 2.5

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

e. Matriks Hessian (H(X)) : adalah matriks bujur sangkar dari fungsi f (X) yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial kedua dan berbentuk

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\;2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\;2}} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^{\;2}} \end{bmatrix}$$

f. Matriks Jacobian (J) : adalah matriks bujur sangkar yang nonsingular dari sembarang fungsi $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^T$, dimana elemen-elemennya merupakan turunan parsial pertama dari g terhadap variabel dependen $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2.1.3 Perkalian Matriks

Definisi 2.2

Misalkan matriks A = (a_{ij}) berukuran (p x q) dan matriks B = (b_{ij}) berukuran (q x r), maka hasil kali matriks A dan matriks B ditulis AB adalah suatu matriks C = (c_{ij}) berukuran

(p x r), dimana :

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj}$

untuk i = 1,2,…,p dan j =1,2,…,r

Dari definisi matriks dapat dilihat bahwa :

1. Perkalian matriks AB dapat didefinisikan , jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matiriks B.
2. Hasil kali dua matriks AB adalah suatu matriks C dengan banyak baris matriks C sama dengan banyak baris matriks A, dan banyak kolom matriks C sama dengan banyak kolom matriks B.

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian , AB $\neq$ BA, meskipun BA terdefinisi untuk operasi perkalian.

Contoh 2.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka C = AB adalah

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 31 & 9 \\ 34 & 46 & 18 \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk C = BA tidak terdefinisikan.

2.1.4 Transformasi Elementer pada Baris dan Kolom Suatu Matrks

Suatu matriks dapat diubah menjadi matriks lain melalui serangkaian operasi terhadap baris atau kolom matriks. Operasi ini disebut sebagai transformasi elementer pada baris atau kolom matriks, dan meliputi :

(a) Penukaran baris ke-i dengan baris ke-j ditulis $R_{ij}(A)$.

Penukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j ditulis C_{ij} (A).

Contoh 2.7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{12}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{23}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Mengalikan semua elemen baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $Ri^{(\lambda)}(A)$.

Mengalikan semua elemen kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $Ci^{(\lambda)}(A)$.

Contoh 2.8

Dari contoh 2.7

$$R_2^{(-2)}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2^{(2)}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j, ditulis $R_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j, ditulis $C_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Contoh 2.9

Dari contoh 2.7

$$R_{31}^{(1)}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C_{23}^{(-2)}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.5 Rank Matriks

Definisi 2.3

Rank baris matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A, dan rank kolom matriks A adalah adalah dimensi dari ruang kolom matriks A, dimana dimensi menyatakan banyaknya vektor-vektor baris atau kolom yang bebas linier, dan apabila rank baris matriks A sama dengan rank kolom matriks A, maka rank matriks A adalah harga rank baris yang sama dengan rank kolom dari A.

Untuk mencari rank dari suatu matriks digunakan transformasi elementer dengan mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol. Nilai rank matriks A dinotasikan dengan r(A).

Definisi 2.4

Himpunan vektor (x_1, x_2, …, x_m) dikatakan bebas linier jika persamaan vektor $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_mx_m = 0$ hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$, dan dikatakan tidak bebas linier jika terdapat konstanta k_i, i=1, 2, …, m yang tidak semua nol yang memenuhi $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_mx_m = 0$.

Contoh 2.10

Misalkan terdapat vektor $x_1 = (2,3,1)$, $x_2 = (2,1,2)$, $x_3 = (4,4,3)$

Jika diambil x =(0,0,0) maka:

$k_1 (2,3,1) + k_2 (2,1,2) + k_3(4,4,3) = (0,0,0)$

Penyelesaian yang diperoleh adalah $-k_3 = k_2 = k_1$.Sehingga x_1, x_2, dan x_3 tidak bebas linier.

Contoh 2.11

Apabila matriks A disusun oleh vektor-vektor $x_1 = (2,3,1)$, $x_2 = (2,1,2)$, $x_3 = (4,4,3)$ maka,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya rank matrks A dapat dicari sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{R_{31}^{(-3)}}{\overset{R_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan baris ke-3 dari hasil transformasi elementer baris pada matriks A, terlihat adalah vektor nol. Oleh karena itu r(A) =2.

2.1.6 Determinan Matriks

Definisi 2.5

Minor (M_{ij}) dari elemen a_{ij} adalah determinan suatu matriks A yang dihilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Definisi 2.6

Kofaktor (A_{ij}) dari elelmen a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}$ M_{ij}.

Definisi 2.7

Minor (M_{ij}) dan kofaktor (A_{ij}) adalah suatu skalar.

Definisi 2.8

Determinan dari suatu matriks = jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya, dengan perkataan lain :

$$| A | = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \text{ dengan i sebarang,}$$

disebut *uraian baris ke-i.*

$$| A | = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \text{ dengan j sebarang,}$$

disebut *uraian kolom ke-j.*

Contoh 2.12

Diberikan matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, hitunglah |A|

Disini katakanlah akan diuraikan menurut baris 1.

$a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{13} = 1$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Jadi $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= 2(-5) + 3(2) + 1(10) = 0$

Secara analog dapat diterapkan untuk penguraian secara kolom.

2.1.7 **Invers Matriks**

Definisi 2.9

Sebuah matriks bujur sangkar A berukuran n disebut mempunyai invers bila ada matriks B, sehingga AB=BA=I, dan ditulis dengan $B=A^{-1}$ yang merupakan matriks bujur sangkar berukuran n.

Teorema 2.1 :

Invers dari matriks bujur sangkar A berukuran n bila ada adalah tunggal.

Bukti :

Misalkan selain A^{-1} ada invers lainnya, yaitu B. Maka berarti bahwa :

$BA = I$

$BA = A^{-1}A$

$BA\,A^{-1} = A^{-1}A\,A^{-1}$

$BI = A^{-1}I$

$B = A^{-1}$. ■

Definisi 2.10

Suatu matriks bujur sangkar A disebut singular jika Det.A = 0, dan disebut nonsingular jika Det.A $\neq$ 0.

Definisi 2.11

Matriks yang nonsingular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Definisi 2.12

Matriks transpose dari kofaktor (A_{ij}) disebut matriks adjoin dari A dan ditulis adj.A,dengan :

$$\text{Adj.A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Definisi 2.13

Matriks invers dari matriks A = (a_{ij}) adalah A^{-1} dengan A^{-1} = Adj.A/Det.A.

Contoh 2.12

Akan dicari invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Kofaktor dari kesembilan elemen matriks A adalah sebagai berikut :

A_{11}= 5 A_{12}=- 3 A_{13}= 2 A_{21}= -3 A_{22}= 2

A_{23}= -1 A_{31}= 2 A_{32}= -1 A_{33}= 2

Dapat dicari bahwa Det.A = 1, sehingga invers dari matiks A adalah :

$$A^{-1} = \text{Adj.A /Det.A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.14

Bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ disebut persamaan linier, dimana $a_i(i=1,2,\ldots,n)$ disebut koefisien persamaan, b disebut konstanta dari persamaan, dan x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ disebut peubah atau variable dari persamaan.

Definisi 2.15

Sekumpulan harga dari peubah (variabel) yaitu $x_i = k_i$, dengan $i=1,2,\ldots,n$, disebut solusi (jawab) dari persamaan $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$, apabila terpenuhi $a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots a_nk_n = b$, dan jawab tersebut dapat ditulis dengan notasi vektor $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Contoh 2.13

Persamaan $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$, dengan harga-harga $x_1=0$, $x_2=1$, dan $x_3 = 2$ adalah solusi, karena 2.0+3.1+1.2 =5, dan dapat ditulis : (0,1,2).

Definisi 2.16

Pandanglah m buah persamaan-persaman linier dengan n peubah :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots + \ldots + \ldots + \ldots = \ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

dengan a_{ij} dan bi $(i = 1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$ masing-masing adalah koefisien-koefisien dan konstanta dari persamaan linier di atas.

Persamaan linier di atas dapat ditulis sebagai AX = B, dengan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ disebut matriks koefisien.

Kemudian $X=(x_1, x_2, \dots x_n)^T$ dan $B=(b_1, b_2, \dots b_n)^T$ adalah vektor-vektor kolom peubah dan konstanta.

Susunan persamaan linier di atas disebut susunan persamaan linier nonhomogen.

Teorema 2.2

Suatu susunan persaman linier akan mempunyai jawab (consistent) apabila rank matriks koefisien sama dengan rank matriks lengkap atau bila r(A) = r(A,B), dengan matriks lengkap (A,B) adalah :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Bukti :

Persamaan linier nonhomogen di atas dapat ditulis sebagai :

$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B$, dimana $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah vektor-vektor kolom dari A. Yang manjadi persoalan apakah ada $x_1, x_2, \dots, x_n$ yaitu skalar-skalar yang memenuhi persamaan $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B$. Kalau ada haruslah B merupakan kombinasi linier dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dengan kata lain banyaknya vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sama dengan banyaknya vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \ldots, A_n$,B,atau B harus diruang kolom matriks A. Jadi r(A) = r (A,B). ■

Contoh 2.14

Apakah susunan persamanaan : $2x_1 + 3x_2 = 7$

$$4x_1 + 6x_2 = 13$$

punya jawab ?

dari susunan persamaan tersebut diperoleh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank } (A) = 1.$$

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

karena kolom 1 dan 3 tidak kelipatan maka r (A,B) = 2.

Jadi r (A) $\neq$ r (A,B), maka tidak ada jawab.

Definisi 2.17

Susunan persamaan linier dengan r(A) = r(A,B) akan mempunyai jawab unik (tunggal) jika r = n dan akan mempunyai banyak jawab jika r < n, dengan n adalah banyaknya peubah (variabel).

Definisi 2.18

Untuk mencari jawab dari susunan persaman linier nonhomogen yang mempunyai jawab tunggal (r = n) dapat digunakan aturan Cramer sebagai berikut:

Untuk susunan peersamaan linier nonhomgen AX = B, maka $x_k = D_k/D$, dimana:

$$D_k = \text{Det.} \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

dan D = Det.A (determinan matriks koefisien) $\neq$ 0.

Contoh 2.15

Tentukan solusi dari persamaan linier: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berarti r(A) = 2.

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berarti r (A,B) = 2. Karena r(A) = r(A,B) maka persamaan tersebut punya jawab.

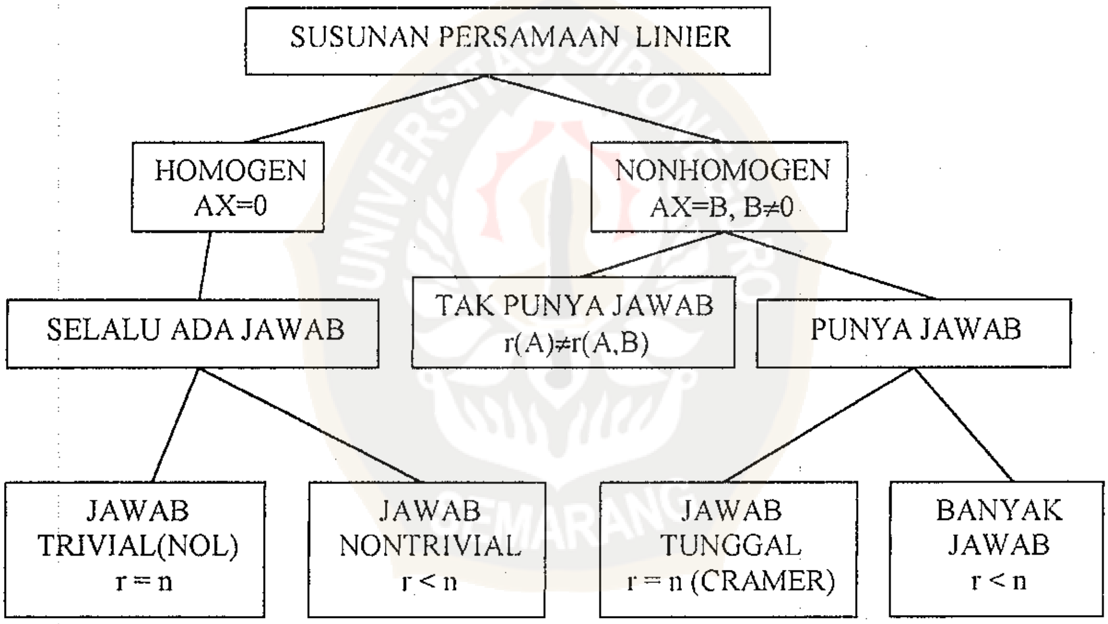
Karena diketahui r < n maka menurut definisi 2.17 susunan persamaan diatas mempunyai banyak jawab. Dengan syarat x_2 tidak boleh diambil = 0, sebab jika demikian berakibat sisa persamaannya menjadi r (A) ≠ r (A,B) (tak punya jawab).

Jika $x_1 = 0$ maka $x_2 = 1$ dan $x_3 = 2$ dan solusinya (0, 1, 2).

Jika $x_3 = 0$ maka $x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$ dan solusinya (2, 1, 0).

Dan lain sebagainya tergantung pengambilan x_1 dan x_3 .

Untuk mempermudah memahami sistem persamaan linier, akan diberikan ringkasan skema susunan persamaan linier, sebagai berikut:



Gambar 2.1 Skema Susunan Persamaan Linier

2.3 Ekstrim Fungsi

2.3.1 Fungsi Berharga Riil

Definisi 2.19

Jika untuk setiap vektor $X \in R^n$ terdapat suatu bilangan riil $f(X)$ yang tunggal maka $f(X)$ dikatakan fungsi berharga riil dari X.

Definisi 2.20

Suatu fungsi $f(X)$ dikatakan kontinu pada X_0 jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\| X - X_0 \| < \delta$ berlaku :

$| f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$, dimana $\| X - X_0 \|^2 = \Sigma (X_i - X_0)^2$; X_0, $X \in R^n$, dengan $i=1,2,\dots,n$.

2.3.2 Derivatif Parsial dan Vektor Gradien

Definisi 2.21

Misal $(\Delta x)_j^T = (\,0\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ \delta_{Xj}\ \ \dots\ \ 0\ \ 0\,)$ vektor dalam R^n dengan semua komponennya nol kecuali yang ke-j yaitu δ_{Xj}, maka derivatif parsial dari $f(X)$ terhadap komponen x_j dari X didefinisikan sebagai

$$\lim_{\delta x_j \to 0} \frac{f(X + \Delta x_j) - f(X)}{\delta x_j}$$

dan dinotasikan dengan $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

Vektor yang komponen-komponen terdiri dari n derivatif parsial dari $f(X)$ dikatakan gradien dari $f(X)$ atau dapat ditulis :

$$\text{Grad} f = (\nabla_f)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.22

Jika f (X) mempunyai derivatif parsial yang kontinu terhadap masing-masing variabelnya, maka dikatakan memiliki turunan.

2.3.3 Deret Taylor

Misal f (X) fungsi begharga riil yang mempunyai turunan dua kali dalam R^n dan misal X+ΔX adalah suatu titik persekitaran dari X dalam R^n, dimana $(\Delta x) = (\delta_{X1}\ \Delta_{X2}\ \ldots\ \delta_{Xj}\ \ldots\ \delta_{Xn})$ dan $(X+\Delta X) = (x_1 + \delta x_1 x_2 + \delta x_2 \ldots x_j \ldots x_n + \delta_{Xn})$.

Deret Taylor untuk fungsi f(X) dengan n variabel di X* dapat ditulis :

$$f(x_1^* + \delta x_1, x_2^* + \delta_{X2}, \ldots, x_j, \ldots, x_n^* + \delta_{Xn}) = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j, \ldots, x_n^*)$$

$$+ \left(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \cdots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) +$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \cdots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 + R(X^*, \Delta X)$$

dimana $R(X^*, \Delta X) \to 0$

Dalam bentuk vektor dapat direduksi dan ditulis menjadi

$$f(X^* + \Delta X) = f(X^*) + (\Delta X)^T \nabla f(X^*) + \tfrac{1}{2} (\Delta X)^T \nabla^2 f(X^*)(\Delta X)$$

Untuk $|\Delta x_j|$ yang kecil, $\tfrac{1}{2} (\Delta X)^T \nabla^2 f(X^*)(\Delta X)$ memiliki order Δx_j^2, sehingga persamaan diatas dapat pula ditulis dalam bentuk

$$f(X^* + \Delta X) = f(X^*) + (\Delta X)^T \nabla f(X^*) + O(\Delta x_j^2)$$

Dari persamaan diatas dapat didefinisikan matriks Hessian n x n dari fungsi f(X)

yaitu : $$H(X^*) = \nabla^2 f(X^*) = \left[\frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_i\, \partial x_j}\right]; \quad i, j = 1,2, \ldots, n.$$

2.3.4 Nilai Ekstrim

Definisi 2.23

Fungsi $f(X)$ dikatakan mempunyai nilai minimum lokal di $X = X^*$ jika terdapat persekitaran $N(X^*,\delta)$ yang memuat X^* sedemikian sehingga $f(X) \geq f(X^*)$ untuk semua X dalam persekitaran $N(X^*, \delta)$.

Definisi 2.24

Fungsi $f(X)$ dikatakan mempunyai nilai minimum global di $X = X^*$ jika $f(X^*) \leq f(X)$, untuk semua $X \in R^n$.

Teorema 2.3

Jika $f(X)$ mempunyai titik ekstrim di $X = X^*$ dan jika derivatif pertama dari $f(X)$ ada di X^*, maka

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_n} = 0$$

Atau $\nabla f(X^*) = 0$

Bukti :

Misalkan derivatif parsial pertama yang ke-i, i=1,2,…,n tidak hilang di X^*, dimana $X^* \in R^n$ sehingga dengan menggunakan deret taylor diperoleh :

$$f(X^* + \Delta X) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \; \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_i} + R(X^*, \Delta X)$$

Yaitu :

$$f(X^* + \Delta X) - f(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + R(X^*, \Delta X)$$

Karena untuk ΔX_i yang kecil suku sisanya mendekati nol sehingga dapat diabaikan maka tanda positif atau negatif dari $f(X^* + \Delta X_i) - f(X^*)$ ditentukan oleh $\delta_{xi} \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Diketahui $f(X)$ mempunyai titik ekstrim, misal minimum di X* (untuk maksimum analog). Karena f(X) minimum di X* sehingga menurut definisi 2.24

$f(X^* + \Delta X_i) - f(X^*) \geq 0$ untuk $\delta X_i > 0$ dan

$f(X^* + \Delta X_i) - f(X^*) \leq 0$ untuk $\delta X_i < 0$

dari hipotesis $f(X)$ mempunyai turunan parsial di X*, sehingga dari persamaan oleh definisi 2.24 diatas diperoleh :

$$\lim_{\delta x_i \to 0^+} \frac{f(X^* + \Delta X_i) - f(X^*)}{\delta x_i} = \lim_{\delta x_i \to 0^-} \frac{f(X^* + \Delta X_i) - f(X^*)}{\delta x_i} = 0$$

Sehingga dari persamaan yang diperoleh dengan deret Taylor diatas diperoleh :

$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_i} = 0$ atau $\nabla f(X^*) = 0$ untuk i =1,2, ..., n. ■

2.4 Bentuk Kuadratis

Definisi 2.25

Suatu polinomial homogen berderajat dua :

$$f(X) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \dots + c_{nn}x_n^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 + \dots,$$

$c_{ij} \in R$, $i,j = 1,2,\dots,n$, disebut bentuk kuadratis dalam n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Jika disubstitusikan $a_{ij} = c_{ji}$, untuk $i = j$, dan $a_{ij} = a_{ji} = 1/2\ c_{ij}$, untuk $i \neq j$, dimana $c_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$, maka bentuk kuadratis dapat ditulis dalam bentuk

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^T AX, \text{ dengan}$$

dimana $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ adalah vektor kolom dan A merupakan matriks simetris orde n, dengan A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.16

Diberikan suatu bentuk kuadratis

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6\,x_2x_3$$

Ubahlah bentuk kuadratis tersebut menjadi bentuk matriks

Penyelesaian :

Dari bentuk kuadratis diatas maka :

$a_{11}=1$, $a_{22}=1$, $a_{33}=1$, $a_{21}=a_{12}=\frac{1}{2}c_{12}=-1$, $a_{11}=1$,

$a_{31}=a_{13}=\frac{1}{2}c_{13}=2$, $a_{23}=a_{32}=\frac{1}{2}c_{23}=-3$

dan matriksnya

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(X)=X^TAX=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.26

Suatu bentuk kuadratis X^TAX dikatakan semidefinit positif jika $X^TAX \geq 0$ untuk semua X dan ada $X \neq 0$ sehingga $X^TAX=0$, dan dikatakan definit positif jika $X^TAX>0$ untuk semua X dimana $X \neq 0$. Suatu bentuk kuadratis dikatakan semidefinit negatif jika $X^TAX \leq 0$ untuk semua X dan ada $X \neq 0$ sehingga $X^TAX=0$, dan dikatakan definit negatif jika $X^TAX<0$ untuk semua X dengan $X \neq 0$. Bentuk kuadratis yang tidak definitif positif (semidefinitif positif) atau tidak definitif negatif (semidefinitif negatif) dikatakan indefinitif.

Contoh 2.17

Bentuk kuadratis $f(X)=(x_1-x_2)^2+4x_3^2$ merupakan bentuk kuadratis yang semidefinit yang positif, karena selalu bernilai positif untuk $X=(x_1, x_2, x_3)$ yang masing-masing tidak sama dengan nol, dan ada $x_1=x_2 \neq 0$, $x_3=0$ sehingga $f(X)$ bernilai nol.

Bentuk kuadratis $f(X) = -(x_1 - x_2)^2 - 2x_3^2$ merupakan bentuk kuadratis yang semidefinit negatif, karena selalu bernilai negatif untuk $X = (x_1, x_2, x_3)$ yang masing-masing tidak sama dengan nol, dan ada $x_1 = x_2 \neq 0$, $x_3 = 0$ sehingga $f(X)$ bernilai nol.

Bentuk kuadratis $f(X) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ merupakan bentuk kuadratis yang definit negatif karena selalu bernilai negatif untuk $X = (x_1, x_2, x_3)$ yang masing-masing tidak sama dengan nol.

Bentuk kuadratis $f(X) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ merupakan bentuk kuadratis yang definit positif karena selalu bernilai positif untuk $X = (x_1, x_2)$ yang masing-masing tidak sama dengan nol.

Definisi 2.27

Andaikan nilai eigen dari matriks simetrik yang berukuran n x n dinotasikan dengan λ_j, dimana j =1,2,…,n, maka bentuk kuadratis X^TAX :

(i) Definit positif apabila $\lambda_j > 0$, untuk semua λ_j.

(ii) Definit negatif apabila $\lambda_j < 0$, untuk semua λ_j.

(iii) Semidefinit positif apabila $\lambda_j \geq 0$, dimana selain $\lambda_j>0$, ada $\lambda_j = 0$.

(iv) Semidefinit negatif apabila $\lambda_j \leq 0$, dimana selain $\lambda_j < 0$, ada $\lambda_j = 0$.

Contoh 2.18

Untuk bentuk kuadratis :

$$7x_1^2 + 10x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Maka nilai eigen dapat diperoleh dari akar :

$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 24\,\lambda^2 + 180\,\lambda - 432 = 0$$

$$(\lambda - 6)^2\,(\lambda - 12) = 0.$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$, dan $\lambda_3 = 12$

Berdasarkan definisi 2.27, maka bentuk kuadratis diatas adalah definit positif.

Teorema 2.4

Kondisi yang memadai agar titik stasioner X* merupakan titik ekstrim adalah bahwa matriks Hessian H yang dievaluasi di X* adalah :

(i) Definit positif ketika X* berada di titik minimum.

(ii) Definit negatif definit ketika X* berada di titik maksimum

Bukti :

Berdasarkan deret Taylor, untuk $0 < \theta < 1$,

$$f(X^*+\Delta X) - f(X^*) = \Delta X^T\,\nabla f(X^*) + (1/2)\,\Delta X^T H \Delta X \Big|_{X^*+\theta\,\Delta X}$$

Karena X* merupakan titik ekstrrim, berdasarkan teorema 2.3, yaitu vektor gradien

$\nabla f(X^*) = 0$. Jadi

$$f(X^*+\Delta X) - f(X^*) = (1/2)\,\Delta X^T H \Delta X \Big|_{X^*+\theta\,\Delta X}$$

Anggaplah X* adalah titik minimum, maka berdasarkan definisinya,

$f(X^* + \Delta X) > f(X^*)$

untuk semua ΔX yang tidak nol. Ini berarti bahwa agar X^* merupakan titik minimum, haruslah

$$(1/2)\,\Delta X^T H \Delta X \Big|_{X^*+\theta\,\Delta X} > 0$$

Tetapi, kontinuitas dari derivatif parsial kedua menjamin bahwa ekspresi $(1/2)\,\Delta X^T H \Delta X$ harus menghasilkan tanda yang sama ketika dievaluasi baik di X^* maupun di $X^*+\theta\Delta X$. Karena $(1/2)\,\Delta X^T H \Delta X \Big|_{X^*}$ mendefinisikan bentuk kuadratis, ekspresi ini (dan karena itu $(1/2)\,\Delta X^T H \Delta X \Big|_{X^*+\theta\,\Delta X}$) adalah positif jika dan hanya jika $H|_{X^*}$ definit positif. Ini berarti bahwa suatu kondisi yang memadai adalah titik stasioner X^* merupakan titik minimum adalah bahwa matriks Hessian yang dievaluasi di titik yang sama itu adalah definit positif. Bukti serupa dapat diterapkan untuk kasus maksimisasi untuk memperlihatkan bahwa matriks Hessian yang bersesuain adalah definit negatif. ■