BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 MODULE

Untuk membicarakan module tidak lepas dari pengertian struktur ring. Dalam tulisan ini, semua ring R dianggap selalu mempunyai elemen satuan yang disajikan dengan 1 atau e.

Definisi 2.1.1

Pandang M group komutatip terhadap jumlahan dan R ring sebarang . Sehingga M disebut Module kiri atas ring R (atau R-module kiri M), bila terdapat suatu pemetaan :

$$f : RxM \longrightarrow M \text{ dengan } (r,m) \longrightarrow f(r,m) = rm \in M$$

sedemikian hingga memenuhi syarat berikut :

i. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$

ii. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$

iii. $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$

iv. $1.m = m$

untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$.

Sedangkan M disebut module kanan atas ring R (atau R-module kanan M), bila berlaku pemetaan :

$$g : MxR \longrightarrow M \text{ dengan } (m,r) \longrightarrow g(m,r) = mr \in M.$$

sehingga dipenuhi syarat berikut :

sehingga dipenuhi syarat berikut :

i. $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$

ii. $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$

iii. $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$

iv. $m.1 = m$

untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M$ dan $r, r_1, r_2 \in R$.

Jika M module kanan yang sekaligus module kiri atas ring R maka M disebut module atas ring R atau R-module M.

Contoh :

a. Misal R ring dengan definisi pergandaan skalar $rm \in M$ atau $mr \in M$, $r \in R$ dan $m \in M$ yang merupakan pergandaan ring R dengan module M, maka R dapat dipandang sebagai R-module kiri dan sekaligus sebagai R-module kanan.

b. Misalkan M group komutatip dan Z ring bilangan bulat yaitu $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, maka M merupakan module kiri atas Z.

Bukti :

Diketahui M group komutatip terhadap jumlahan dan pada M berlaku untuk $x \in M$, $k \in Z$ maka $kx \in M$. Sehingga terdapat pemetaan $f : Z \times M \longrightarrow M$ dengan $(k,x) \longrightarrow f(k,x) = kx \in M$. Selanjutnya ambil sebarang $x, x_1, x_2 \in M$ dan $k, k_1, k_2 \in Z$ maka :

i. $(k_1 + k_2)x = (x + x + x + \ldots + x)$ dengan $(k_1 + k_2)$ suku

$$= \underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{k_1 \text{ suku}} + \underbrace{(x + x + \ldots + x)}_{k_2 \text{ suku}}$$

$$= k_1 x + k_2 x$$

Berarti berlaku $(k_1 + k_2)x = k_1 x + k_2 x$.

ii. $k(x_1 + x_2) = (\underbrace{x_1 + x_2 + x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_1 + x_2}_{k \text{ suku}})$

$$= (\underbrace{x_1 + x_1 + \ldots + x_1}_{k \text{ suku}}) + (\underbrace{x_2 + x_2 + \ldots + x_2}_{k \text{ suku}})$$

$$= kx_1 + kx_2$$

Berarti berlaku $k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2$

iii. $(k_1 k_2)x = (x + x + x + \ldots + x)$ dengan $(k_1 k_2)$ suku

$$= k_1(\underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{k_2 \text{ suku}})$$

$$= k_1(k_2 x)$$

Berarti berlaku $(k_1 k_2)x = k_1(k_2 x)$

Jadi terbukti M module kiri atas ring Z. Karena Z ring komutatif maka M juga module kanan atas ring Z. Dengan demikian secara umum dapat diperoleh M module atas ring Z atau Z-module M.

2.2 Sub Module

Apabila M module atas ring R dan N $\subseteq$ M, maka N merupakan module atas M bila hanya bila terhadap operasi yang sama dengan operasi yang berlaku pada M sehingga N merupakan module.

Definisi 2.2.1

Suatu himpunan bagian (subset) tak kosong N dari R-module M disebut R-submodule dari M jika dipenuhi :

i. $a - b \in N$ untuk setiap $a, b \in N$

ii. $ra \in N$ dan $ar \in N$ untuk setiap $a \in N$, $r \in R$

Catatan :

Module nol (dinotasikan dengan {0}) dan module M merupakan R-Submodule M yang disebut trivial submodule (submodule tak sejati). Sedangkan bila ada submodule selain {0} dan M dari R-module M maka disebut submodule sejati.

Contoh :

Pandang Z(x) himpunan polinomial derajad 4 dengan koefisien bilangan bulat yang merupakan module atas ring Z. Jika R(x) himpunan polinomial derajad 2 juga koefisien bilangan bulat dengan definisi jumlahan dan pergandaan, maka R(x) merupakan submodule dari Z(x) atas ring Z.

Bukti :

Ambil sembarang elemen $r_1(x)$, $r_2(x)$ dalam R(x) dan $m \in Z$, dengan $r_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ sedangkan, $r_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, dimana a_i, b_i elemen Z untuk setiap i = 0, 1, 2, maka:

i. $r_1(x) - r_2(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2) - (b_0 + b_1x + b_2x^2)$

$$= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2$$

Jelas bahwa $a_i - b_i$ adalah elemen Z untuk i = 0,1,2.

Sehingga $(r_1(x) - r_2(x)) \in R(x)$ untuk setiap $r_1(x), r_2(x) \in R(x)$

ii. $m(r_1(x)) = m(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

$$= ma_0 + ma_1x + ma_2x^2$$

Jadi ma_i adalah bilangan bulat, sehingga $m(r_1(x))$ termuat dalam R(x).

Karena syarat (i) dan (ii) dipenuhi berarti R(x) merupakan submodule dari module Z(x) atas ring Z.

Definisi 2.2.2

R-Module M dikatakan dibangun secara hingga oleh m, jika untuk setiap elemen $m \in M$ terdapat elemen $m_1, m_2, .. m_n \in M$ dan $r_i \in R$, $1 \le i \le n$ sedemikian hingga :

$m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_3 m_3 + \ldots + r_n m_n$, dan n berhingga.

Definisi.2.2.3

Jika perpotongan (irisan) N dari semua sub module M yang memuat subset S (elemen S berhingga), maka N juga merupakan submodule dari M yang memuat subset S . Sehingga N disebut submodule M yang dibangun oleh S dan dinyatakan dengan [S].

Teorema 2.2.1

Apabila $(N_i)_{i \in I}$ merupakan keluarga R-submodule dari R-module M , maka $\bigcap_{i \in I} N_i$ juga merupakan R-submodule.

Bukti :

Misalkan $N_1, N_2, \ldots, N_n$ adalah submodule - submodule dari R-module M. Apabila dipandang $N = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n = \bigcap_{i \in I} N_i$ dengan i=1,2,3,..,n, maka akan dibuktikan bahwa N juga merupakan submodule dari R-module M. Sekarang ambil elemen x,y dalam $N = \bigcap_{i \in I} N_i$, maka x adalah elemen dari $N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n$, sehingga $x \in N_i$ untuk setiap i =1,2,3,..,n . Begitu juga $y \in N = \bigcap_{i \in I} N_i$ maka y adalah elemen dari N_i. Karena diketahui N_i submodule dari R-module M, akibatnya bila $x,y \in N_i$ maka $(x-y) \in N_i$.

Berarti $(x-y) \in \bigcap_{i \in I} N_i$ atau $(x-y) \in N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n = N$.

Jadi untuk $x,y \in N_i \longrightarrow (x-y) \in N$ ..... (1).

Ambil $r \in R$, karena $x \in N$ dan $N = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n$, maka untuk setiap $x \in N_i$ berlaku pada R-module M sedemikian hingga $rx \in N_i$ untuk setiap i. Berarti $rx \in N$ atau $rx \in N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n$.
Jadi untuk $r \in R$ dan $x \in N \longrightarrow rx \in N$ ....(2).
Dari (1) dan (2) terbukti N sub module dari R-module M.

Definisi 2.2.4

R-module M disebut jumlahan langsung keluarga submodule $(N_i)/i \in I$, jika setiap elemen $x \in \sum_{i \in I} N_i$ mempunyai pernyataan berikut :

i. $M = \sum_{i=1}^{n} N_i$

ii. $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

Jika M jumlahan langsung, maka dapat dinyatakan dengan :

$M = \bigoplus_{i \in I} N_i = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_n$, dengan i : 1,2,..n.

Definisi 2.2.5

Apabila N adalah submodule dari R-module M, maka himpunan $M/N = \{m+N,\ m \in M\}$ disebut module faktor dari R-module M jika dipenuhi:

i. $(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N$

ii. $(m_1 + N)r = m_1 r + N$

untuk setiap $r \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

Contoh :

Misalkan Z ring bilangan bulat dan $N = \{0, \pm 4, \pm 8, \ldots\} = \{4k,\ k \in Z\}$ submodule dari Z-module M, maka himpunan $M/N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ yaitu himpunan bilangan bulat kelipatan 2 modulo 4 merupakan module faktor dari Z-module M.

Bukti :

Ambil sebarang $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in Z$.

Dengan diketahui $M/N = \{2m + 4k \ / \ m \in M \ , \ k \in Z\}$ sehingga dipenuhi :

i. $(m_1 + N) + (m_2 + N) = (2m_1 + 4k) + (2m_2 + 4k)$

$= (2m_1 + 4k + 2m_2 + 4k)$

$= (2m_1 + 2m_2 + 4k + 4k)$

$= (2m_1 + 2m_2) + 2(4k)$ dengan $2(4k) = 4k = \bar{0}$

$= (m_1 + m_2) + N.$

Terbukti $(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N.$

ii. $(m_1 + N)r = (2m_1 + 4k)r$

$= (2m_1 + 4k) + (2m_1 + 4k) + \ldots + (2m_1 + 4k)$, r suku.

$= (2m_1 + 2m_1 + \ldots + 2m_1) + (4k + 4k + \ldots + 4k)$, r suku.

$= (2m_1)r + (4k)r$

$= m_1 r + N$ dengan $(4k)r = 4k = \bar{0}$

Terbuti $(m_1 + N)r = m_1 r + N.$

Dari hasil (i) dan (ii) berarti M/N merupakan module faktor dari Z-module M.

2.3. Homomorphisma Module

Dalam sub bab berikut dibicarakan R-homomorphisma serta kejadian yang bersangkutan dengannya dan juga akan dibahas teorema Fundamental Homomorphisma untuk module.

Definisi 2.3.1

Misalkan M dan N masing - masing module atas ring R. Jika didefinisikan suatu pemetaan $f : M \longrightarrow N$ yaitu pemetaan dari R-module M ke R-module N, maka f disebut pemetaan homomorphisma module atas ring R (atau R-homomorphisma) yang dinotasikan dengan $Hom_R(M,N)$ bila dan hanya bila dipenuhi :

i. $f(m_1+m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

ii. $f(rm) = rf(m)$

untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$.

Apabila untuk M = N, maka f disebut pemetaan yang Endomorphisma dari M dan dinyatakan dengan $End_R(M)$.

Contoh :

a). Misalkan Z ring dan didefinisikan, M, N masing - masing module atas ring Z. Jika pemetaan $f: M \longrightarrow N$ dengan $f(x) = 3x$ untuk setiap $x \in M$, maka f suatu homomorphisma.

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in M$ dan $r \in Z$ maka dipenuhi :

i. $f(x + y) = 3(x + y)$

$= 3x + 3y$

$= f(x) + f(y)$

Terbukti $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii. $f(rx) = 3(rx) = 3rx$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$

$= r(3x) = rf(x)$

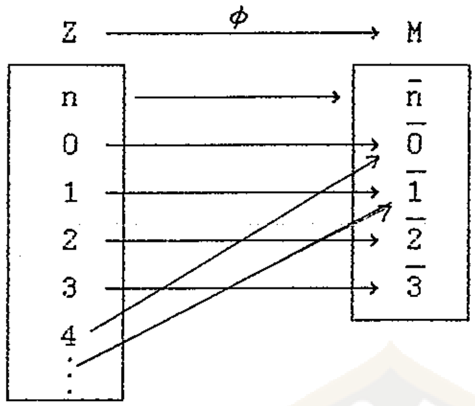
Terbukti $f(rx) = rf(x)$.

Dari (i) dan (ii) maka terbukti f suatu homomorphisma.

b). Misal $\phi : Z \longrightarrow M$, dengan Z dan M module atas ring R. Apabila Z himpunan bilangan bulat dan $M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, maka pemetaan $\phi : n \longrightarrow \bar{n}$ merupakan homomorphisma.

Bukti :

Dari permasalahan tersebut diperoleh :



Sehingga berlaku :

$$\begin{array}{lcl} Z & \xrightarrow{\phi} & M \\ a & \longrightarrow & \bar{a} = \phi(a) \\ b & \longrightarrow & \bar{b} = \phi(b) \\ \hline a + b & \longrightarrow & \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} = \phi(a) + \phi(b) \end{array}$$

Berarti $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.

$$rb \longrightarrow \overline{rb} = r\bar{b} = r\phi(b)$$

Berari $\phi(rb) = r\phi(b)$. untuk setiap $a,b \in Z$ dan $r \in R$.

Dengan demikian terbukti ϕ homomorphisma.

Definisi 2.3.2

Apabila $f:M \longrightarrow N$ adalah pemetaan dari R-module M ke R-module N, maka himpunan semua elemen x dalam M sedemikian hingga $f(x) = 0$ disebut kernel(f) yang ditulis ker(f). Jadi $Ker(f) = \{x \in M \ / \ f(x) = 0\}$.

Teorema 2.3.1

Misalkan M dan N masing - masing module atas ring R. Apabila pemetaan $f:M \longrightarrow N$ adalah suatu homomorphisma, maka f monomorphisma jika dan hanya jika $ker(f) = \{0\}$.

Bukti :

$\longrightarrow$ Diketahui f pemetaan monomorphisma. Jadi untuk $f(x_1)=f(x_2)$, maka $x_1=x_2$. Dari hal tersebut diperoleh $f(x_1)-f(x_2)=0$, sehingga $f(x_1-x_2) = 0$ (sebab f homomorphisma). Berarti $(x_1-x_2)\in ker(f)$ dan karena $x_1 = x_2$ maka $x_1-x_2 = 0$. Akhirnya terlihat bahwa jika $(x_1-x_2)\in ker(f)$ maka $x_1-x_2 = 0$. Jadi $ker(f) = \{0\}$.

$\longleftarrow$ Apabila $ker(f)=\{0\}$ maka f monomorphisma. Untuk membuktikan hal ini maka f harus injektif. Ambil sebarang $f(x_1),f(x_2) \in N$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ maka $f(x_1)-f(x_2) = 0$. Jadi $f(x_1-x_2) = 0$ (karena f homomorphisma). Berarti $(x_1-x_2)\in ker(f) = \{0\}$. Sehingga untuk $(x_1-x_2) = 0$ maka diperoleh hasil $x_1 = x_2$. Jadi dengan demikian $f(x_1)=f(x_2)\longmapsto x_1=x_2$ untuk setiap $f(x_1),f(x_2) \in N$. Terbukti f homomorphisma yang injektif, sehingga f monomorphisma.

Definisi 2.3.3

Apabila $f:M \longrightarrow N$ adalah pemetaan dari R-module M ke R-module N, maka himpunan elemen-elemen y dari N sedemikian hingga terdapat $x\in M$ dan $f(x) = y$ disebut Image dari f ditulis Im(f). Jadi $Im(f) = \{y\in N \mid \ni x\in M \text{ dan } f(x)=y\}$.

Contoh :

Pandang Z ring dengan elemen bilangan bulat, M dan N adalah module atas ring Z, dimana $M = \{0,\pm2,\pm4,...\}=\{2k, k\in Z\}$ dan $N = \{0,\pm4,\pm8,...\}=\{4k, k\in Z\}$. Didefinisikan pemetaan $f:M\longrightarrow N$ dengan $f(x) = 2x$, $x\in M$ maka dapat diperoleh dari persoalan diatas bahwa $f(x) = 0$ hanya dipenuhi oleh $x = 0$ sehingga $\ker(f) = \{0\}$. Sedangkan diperoleh hasil pemetaan f yakni Im(f) adalah semua elemen dalam N. Jadi Im(f) = N.

Teorema 2.3.2

Misalkan M dan N masing - masing module atas ring R. Apabila pemetaan $f : M \longrightarrow N$ adalah suatu homomorphisma, maka f epimorphisma bila dan hanya bila Im(f) = N.

Bukti :

$\longrightarrow$ Diketahui f epimorphisma, maka f merupakan homomorphisma yang surjektif. Jadi f menghabiskan semua elemen dalam N artinya untuk setiap $y \in N$ terdapat $x \in M$ sedemikian hingga $f(x) = y$ atau semua elemen dalam N mempunyai kawan di M. Terbukti Im(f) = N.

$\longleftarrow$ Diketahui Im(f)=N artinya $Im(f)=\{y \in N / \ni x \in M \ \& \ f(x)=y\} = N$. Sehingga diperoleh untuk setiap $y \in N$ terdapat $x \in M$ sedemikian hingga $f(x)=y$ atau f menghabiskan N. Dengan demikian f adalah pemetaan homomorphisma yang surjektif. Terbukti f epimorphisma.

Definisi 2.3.4

Apabila $f : N \longrightarrow M$ homomorphisma dari R-module N ke R-module M, maka di definisikan cokernel dan coimage dari f sebagai berikut:

Cokernel(f) = Coker(f) = M/Im(f) dan

Coimage(f) = Coim(f) = N/ker(f)

Khususnya untuk N submodule dari M dan pemetaan inklusi:

$j : N \longrightarrow M$ maka Coker(f) = M/Im(j) = M/N.

Definisi 2.3.5

Misalkan M adalah module atas ring R dan N submodule dari R-module M. Pemetaan $\rho : M \longrightarrow M/N$ sedemikian hingga $\rho(x) = x + N$, untuk setiap $x \in M$ dengan M/N module faktor dari M yang dibangun oleh N, sehingga ρ disebut pemetaan proyeksi dari M onto M/N.

Contoh :

Apabila Z ring bilangan bulat, $M=\{0,\pm 3,\pm 6,..\}=\{3k, k\in Z\}$ module atas ring Z dan $N=\{0,\pm 9,\pm 18,..\}=\{9k, k\in Z\}$ adalah sub module dari Z-module M, maka $M/N = \{\bar{0},\bar{3},\bar{6}\}$ yakni himpunan bilangan bulat kelipatan 3 module 9 merupakan module faktor dari M yang dibangun N. Sehingga pemetaan $\rho : M \longrightarrow M/N$ dengan $\rho(x)=x + N$ untuk setiap $x\in M$ merupakan proyeksi dari M onto M/N. Jadi ρ merupakan epimorphisma sebab setiap $\bar{x}\in M/N$ terdapat $x\in M$ sedemikian hingga $\rho(x) = x + N = \bar{x}\in M/N$.

Teorema 2.3.3. Fundamental homomorphisma module

Misalkan N submodule dari R-module M dan $v : M \longrightarrow M/N$ pemetaan kanonik. Jika M' adalah R-module dan $\theta : M \longrightarrow M'$ homomorphisma sedemikian hingga $N \subseteq \ker(\theta)$, maka terdapat dengan tunggal homomorphisma $\phi : M/N \longrightarrow M'$ sedemikian hingga $\phi \circ v = \theta$.

Bukti :

Bukti :

Dari permasalahan diatas dapat digambar secara diagram sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\theta"] \arrow[drr, "v"'] & & M' \\ & & M/N \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Didefinisikan pengawanan adalah :

$$\phi : M/N \longrightarrow M'$$

$$\bar{m} \longrightarrow \phi(\bar{m}) = \theta(m)$$

dengan $m \in M$ sedemikian hingga $v(m)=\bar{m}$, maka dibuktikan pengawanan tersebut well-defined. Misalkan $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ maka ada $(m_1 - m_2) \in N$. Karena $N \subseteq \ker(\theta)$ sehingga $(m_1 - m_2) \in \ker(\theta)$, dengan kata lain $\theta(m_1 - m_2) = 0$. Akibatnya $\phi(\bar{m}_1) - \phi(\bar{m}_2) = \theta(m_1) - \theta(m_2) = \theta(m_1 - m_2) = 0$, berarti $\phi(\bar{m}_1) = \phi(\bar{m}_2)$. Jadi terdapat pengawanan well-defined.

Untuk membuktikan ϕ homomorphisma sebagai berikut.

Karena θ homomorphisma, maka:

$$\begin{aligned} \phi(\bar{m}_1 + \bar{m}_2) &= \phi(\overline{m_1 + m_2}) \\ &= \theta(m_1 + m_2) \\ &= \theta(m_1) + \theta(m_2) \\ &= \phi(\bar{m}_1) + \phi(\bar{m}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(r\bar{m}) &= \phi(\overline{rm}) = \theta(rm) \\ &= r\theta(m) \\ &= r\phi(\bar{m}) \end{aligned}$$

untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$.

Jadi terbukti ϕ homomorphisma.

Dalam hal ini juga harus dibuktikan diagram komutatif sebagai berikut: Ambil sebarang $m \in M$ maka $(\phi \circ v)(m) = \phi(v(m)) = \phi(\bar{m}) = \theta(m)$. Karena ini berlaku untuk setiap $m \in M$ sehingga $\phi \circ v = \theta$. Sedangkan untuk membuktikan ketunggalan homomorphisma sebagai berikut: Misalkan ada homomorphisma ϕ' selain ϕ sedemikian hingga berlaku $\phi' \circ v = \theta$, maka nantinya harus $\phi = \phi'$. Sekarang ambil sebarang $x \in M/N$ maka $x = \bar{m}$ untuk setiap $m \in M$ dan $v(m) = x$. Akibatnya $\phi'(x) = \phi'(v(m)) = (\phi' \circ v)(m) = \theta(m)$. Karena $\phi \circ v = \theta$ dan $\phi' \circ v = \theta$ untuk setiap $x \in M/N$, jadi terbukti $\phi = \phi'$. Sehingga terdapat dengan tunggal homomorphisma $\phi = M/N \longrightarrow M'$ sedemikian hingga $\phi \circ v = \theta$.

2.4. Module-module Khusus

2.4.1. Module Bebas

Dalam pembahasan module bebas M, dibatasi hanya pada module bebas dengan basis berhingga. Jika M module bebas dengan basis X, maka setiap $m \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$, dengan $r_i \in R$ dan $x_i \in X$.

Definisi 2.4.1.1

Himpunan bagian S dari R-module M disebut basis jika S membangun M dan bebas linier.

Contoh :

Dalam ruang vektor $v = R^n$ atas field bilangan riil $\mathbb{R}$, pandang himpunan dari $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dengan $e_i = (0, ..1, ..0)$

yakni komponen ke-i adalah 1 sedangkan lainnya 0, maka himpunan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bebas linier dan membangun R^n. Sehingga e_i merupakan basis.

Bukti :

Misal diambil sebarang skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sehingga dapat dinyatakan sebagai $\Sigma\lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.
Sehingga :

$$\lambda_1(1,0,\ldots,0) + \lambda_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + \lambda_n(0,0,\ldots,1) = 0$$
$$(\lambda_1,0,\ldots,0) + (0,\lambda_2,\ldots,0) + \ldots + (0,0,\ldots,\lambda_n) = 0$$
$$(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = (0,0,\ldots,0)$$

Jadi diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Terbukti e_i merupakan basis, untuk setiap $i=1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.4.1.2

R-module M disebut module bebas jika M mempunyai basis.

Contoh :

a) Module nol adalah module bebas dengan basis himpunan kosong.

b) Z_n dipandang sebagai Z-module adalah bukan module bebas. Misal diambil $x \in Z_n$ maka $nx = 0$ dengan $n \neq 0$. Sehingga untuk setiap $x \in Z_n$ dimana $\{x\}$ tidak bebas linier. Jadi setiap himpunan bagian Z_n yang tidak kosong tidak bebas linier. Dengan demikian Z_n tidak mempunyai basis, sehingga bukan module bebas

Teorema 2.4.1.1

Misalkan F adalah R-module bebas, $\phi : M \longrightarrow N$ adalah epimorphisma dari R-module M kedalam R-module N. Sehingga terdapat homomorphisma $\psi : F \longrightarrow N$ untuk setiap $\alpha : F \longrightarrow M$ homomorphisma, sedemikian hingga berlaku $\phi \circ \alpha = \psi$.

Bukti :

Bila digambar secara diagram sebagai berikut :

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

Misalkan F adalah module bebas dengan basis S, maka untuk setiap $x \in F$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = \Sigma r_i s$ dengan $r_i \in R$. Untuk homomorphisma $\alpha : F \longrightarrow M$ didefinisikan $\alpha(x) = \alpha(\Sigma r_i s) = \Sigma r_i \alpha(s) = \Sigma r_i m_s$. Jadi setiap $x \in F$ dipetakkan ke $\alpha(x) \in M$. Karena S bagian dari F, maka setiap $s \in S$ dipetakkan ke $\alpha(s) \in M$.

Diketahui ϕ epimorphisma, akibatnya untuk setiap $s \in S$ terdapat $m_s \in M$ sedemikian hingga $\phi(m_s) = \psi(s)$.

Dibuktikan $\psi : F \longrightarrow N$ terdefinisi dengan baik.

Jika ambil sebarang $x, x' \in F$ dan $x = x'$, dengan $x = \Sigma r_i s$, $x' = \Sigma r_i' s$, $r_i, r_i' \in R$, maka $r_i = r_i'$ untuk setiap i.

Didefinisikan $\psi : F \longrightarrow N$ sehingga :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(\Sigma r_i s) = \Sigma r_i \phi(m_s) \\ &= \phi(\Sigma r_i m_s) = \phi(\Sigma r_i' m_s) \\ &= \Sigma r_i' \phi(m_s) = \psi(\Sigma r_i' s) \\ &= \psi(x') \end{aligned}$$

Sekarang dibuktikan ψ suatu homomorphisma sebagai berikut:

Ambil sebarang $x,y \in F$ dan $m \in R$, misal $x = \Sigma r_i s$, $y = \Sigma b_i s$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar, maka dipenuhi :

i. $\psi(x+y) = \psi(\Sigma r_i s + \Sigma b_i s) = \psi(\Sigma(r_i + b_i)s)$

$= \Sigma(r_i + b_i)\phi(m_s) = \phi(\Sigma(r_i + b_i)m_s)$

$= \phi(\Sigma r_i m_s + \Sigma b_i m_s) = \phi(\Sigma r_i m_s) + \phi(\Sigma b_i m_s)$

$= \Sigma r_i \phi(m_s) + \Sigma b_i \phi(m_s)$

$= \psi(\Sigma r_i s) + \psi(\Sigma b_i s)$

$= \psi(x) + \psi(y)$

ii. $\psi(mx) = \psi(\Sigma m r_i s) = \Sigma m r_i \phi(m_s)$

$= \phi(\Sigma m r_i m_s)$

$= m\phi(\Sigma r_i m_s)$

$= m(\Sigma r_i \phi(m_s))$

$= m\psi(r_i s)$

Terbukti bahwa ψ adalah suatu homomorphisma.

Selanjutnya dibuktikan sifat komutatifitas sebagai berikut:

Ambil sebarang $x \in F$ maka $x = \Sigma r_i s$ sehingga,

$(\phi \circ \alpha)(x) = \phi(\alpha(x)) = \phi(\alpha(\Sigma(r_i s))$

$= \phi(\Sigma\alpha(r_i s)) = \phi(\Sigma r_i \alpha(s))$

$= \phi(\Sigma r_i m_s) = \Sigma\phi(r_i m_s)$

$= \Sigma r_i \phi(m_s) = \Sigma r_i \Psi(s)$

$= \psi(\Sigma r_i s)$

$= \psi(x).$

Jadi terbukti berlaku $\phi \circ \alpha = \psi$.

2.4.2. Module Torsi

Definisi 2.4.2.1

Elemen m dari R-module M disebut elemen torsi, jika ada $r \in R$ dan $r \neq 0$ sedemikian hingga $rm=0$. Sedangkan R-module torsi jika setiap elemen dari M adalah elemen torsi.

Contoh :

a)pandang Z_3 sebagai Z-module, maka Z_3 adalah module torsi. Sebab jika diambil sebarang $x \in Z_3$, maka ada $3 \in Z$ dan $3 \neq 0$ sedemikian hingga $3x = 0$ untuk setiap $x \in Z_3$. Jadi setiap elemen dari Z_3 adalah elemen torsi.

Definisi 2.4.2.2

Elemen yang bukan elemen torsi disebut elemen bebas torsi, yakni m elemen bebas torsi jika untuk $rm = 0$ maka dipenuhi dengan $r=0$. Sedangkan R-module M disebut module bebas torsi jika setiap elemen dari M yang tidak nol adalah elemen bebas torsi.

Contoh :

b)pandang Z_3 sebagai Z_3-module, maka Z_3 adalah module bebas torsi. Untuk membuktikannya sebagai berikut:
Jika diperhatikan suatu tabel pergandaan berikut:

M\R	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dimana $R = Z_3$ dan $M = Z_3$, sehingga terlihat dalam tabel tersebut, jika $m \neq 0$, $m \in M$ dan $rm=0$ maka hanya dipenuhi untuk $r=0$. Jadi setiap elemen tidak nol adalah bebas torsi.

Teorema 2.4.2.1

i. Setiap submodule dari module bebas torsi adalah bebas torsi.

ii. Setiap submodule dari module torsi adalah module torsi.

Bukti :

i. Misalkan N submodule dari module bebas torsi M. Karena M bebas torsi sehingga berlaku jika $rm=0$ maka $r=0$, untuk setiap $m \in M$. Karena $N \subseteq M$ maka kondisi tersebut berlaku pada N, sehingga terbukti N bebas torsi.

ii. Misalkan N submodule dari module torsi M. Karena M module torsi, maka setiap elemen $m \in M$ adalah elemen torsi. Karena $N \subseteq M$ maka elemen $n \in N$ juga elemen torsi. Untuk n elemen torsi sehingga terbukti N module torsi.

Teorema 2.4.2.2

Misalkan M module atas daerah Integral R dan T merupakan himpunan elemen torsi dari M. Sehingga T merupakan submodule dari M dan M/T adalah module faktor yang bebas torsi.

Bukti :

Misalkan $t_1, t_2 \in T$ maka menurut definisi ada elemen $r_1, r_2 \in R^* = R/\{0\}$ sedemikian hingga $r_i t_i = 0$ untuk i : 1,2.

Jadi $r_1 r_2(t_1 - t_2) = (r_1 . r_2)t_1 - (r_1 . r_2)t_2$

$= r_2(r_1 . t_1) - r_1(r_2 . t_2)$

$= r_2 . 0 - r_1 . 0 = 0$

Karena R^* tidak mempunyai pembagi nol sejati (R^* daerah Integral) dan $r_1, r_2 \in R^*$, sehingga $t_1 - t_2$ elemen torsi. Dengan kata lain bahwa $(t_1 - t_2) \in T$. Akibatnya jika $r \in R$ maka $r_1(rt_1) = r(r_1 t_1) = r.0$ dan $rt_1 \in T$. Jadi menurut definisi 2.2.1 berarti T merupakan submodule dari M.

Dalam membuktikan M/T bebas torsi, maka dimisalkan $r\bar{x} = \bar{0}$ dengan $\bar{x} \in M/T$, $r \in R$ dan $r = 0$. Karena $r\bar{x} = r(x+T) = \bar{0}$, maka $rx \in T$ sehingga ada $s \in R^*$ sedemikian hingga $s(rx) = (sr)x = 0$. Karena $sr = 0$ (sebab R^* daerah Integral) maka $x \in T$ yang berakibat $\bar{x} = x + T = T = \bar{0}$.

Jadi elemen torsi dari M/T hanyalah $\bar{0}$, sehingga terbukti bahwa M/T bebas torsi.

2.5. Diagram dan Barisan Eksak

2.5.1. Diagram

Misalkan A,B,C,D dan E menyatakan module atas ring R dan f homomorphisma dari A ke B, g homomorphisma dari B ke C, h homomorphisma dari D ke E, dan u homomorphisma dari B ke D serta v homomorphisma dari C ke E. Keadaan ini dapat diringkas dalam bentuk diagram berikut :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "v"] \\ & D \arrow[r, "h"] & E \end{tikzcd}$$

Dimana simbol $A \xrightarrow{f} B$ secara skematis menyatakan f homomorphisma dari A ke B yang nantinya dapat diringkas menjadi $A \longrightarrow B$

Definisi 2.5.1.1

Apabila A,B,C dan D masing - masing module atas ring sebarang dan f,g,h,k suatu homomorphisma, maka diagram berikut :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

adalah komutatif, jika terpenuhi komposisi $A \longrightarrow B \longrightarrow D$ dan $A \longrightarrow C \longrightarrow D$ sama atau $g \circ f = k \circ h$.

Pada diagram tersebut dapat diperluas lagi yakni misalkan suatu diagram adalah sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \end{tikzcd}$$

Diagram diatas komutatif jika dan hanya jika berlaku :

$f' \circ a = b \circ f$, $g' \circ b = c \circ g$, dan $h' \circ c = d \circ h$.

2.5.2. Barisan Eksak

Definisi 2.5.2.1

Diagram $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ disebut barisan eksak, jika $Im(f) = ker(g)$.

Definisi 2.5.2.2

Dari definisi 2.5.2.1 dapat diperluas menjadi berikut:

Diagram $A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \ldots\ldots A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$

disebut barisan eksak pada A_i jika $Im(f_i) = ker(f_{i+1})$, dengan i : 1,2,...n-1.

Definisi 2.5.2.3

Barisan $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ disebut barisan eksak pendek jika Im(f) = Ker(g), f monomorphisma dan g epimorphisma.

Contoh :

1). Misalkan Z ring bilangan bulat, A dan B module atas ring Z. Jika f monomorphisma, maka barisan $0 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} B$ eksak.

Bukti :

Terlihat dalam barisan tersebut Im(a) = 0, karena setiap nol dipetakkan ke nol. Sedangkan diketahui f monomorphisma, maka menurut teorema 2.3.1 kernel(f) = {0} sehingga Im(a) = Ker(f) = {0}. Dengan demikian terbukti barisan eksak.

2). Misalkan Z ring bilangan bulat, A dan B module - module atas ring Z. Jika g epimorphisma maka barisan $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{b} 0$ eksak.

Bukti :

Bukti :

Karena g epimorphisma,maka menurut teorema 2.3.2 Im(g) = B yaitu setiap elemen dalam B berasal dari A. Sehingga terlihat bahwa B dipetakkan ke 0. Jadi ker(b)=B dengan demikian Im(g)=ker(b)=B, sehingga terbukti barisan eksak.

Teorema 2.5.2.1

Jika diketahui diagram :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Komutatif, dengan $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ dan $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow 0$ eksak, maka pernyataan berikut ini berlaku:

i. Jika α,γ dan f′ monomorphisma maka β monomorphisma.

ii. Jika α,γ dan g epimorphisma maka β epimorphisma.

Bukti :

i. Dibuktikan β injektif dengan membuktikan $\ker(\beta)=\{0\}$. Ambil sebarang $b\in\ker(\beta)$ maka $\beta(b)=0$. Karena sifat komutatif maka $\gamma g(b) = g'\beta(b)=g'(0)=0$. Sedangkan γ monomorphisma maka g(b) = 0, sehingga $b\in\ker(g)$. Mengingat diagram $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ eksak, sehingga ker(g)=Im(f) berarti $b\in Im(f)$. Jadi terdapat $a\in A$ sedemikian hingga b=f(a). Mengingat diagram komutatif, maka $f'\alpha(a)=\beta f(a)=\beta(b)=0$. Karena f′ monomorphisma dan α juga monomorphisma sehingga untuk $\alpha(a)=0$, maka a=0 sehingga b=f(a)=f(0)=0. Berarti $\ker(\beta)=\{0\}$, sehingga β injektif.

ii. Dibuktikan β surjektif. Jika diambil sebarang $b'\in B'$ maka $g'(b')\in C'$. Karena γ epimorphisma, maka $g'(b')=\gamma(c)$ untuk suatu $c\in C$. Mengingat g epimorphisma maka terdapat $b\in B$ sehingga $c=g(b)$. Dengan diagram komutatif maka $g'\beta(b) = \gamma g(b) = g'(b')$ berarti $g'(\beta(b)-b')=0$, sehingga $\beta(b)-b' \in \ker(g') = \mathrm{Im}(f')$. Dengan didefinisikan $\beta(b)-b'=f'(a')$ untuk suatu $a'\in A'$, mengingat α epimorphisma maka terdapat $a\in A$ sedemikian hingga $a'=\alpha(a)$. Karena $b,f(a)\in B$ shingga $(b-f(a))\in B$. Dengan diagram komutatif maka $\beta f(a)=f'\alpha(a) = f'(a') = \beta(b)-b'$. Sehingga $\beta(b - f(a)) = \beta(b)-\beta f(a) = \beta(b)-(\beta(b)-b') = b'$, berarti untuk setiap $b'\in B'$ terdapat $y=b-f(a)\in B$ sehingga $\beta(b - f(a)) = b'$. Terbukti β surjektif.

Definisi 2.5.2.4

Misalkan N submodule dari R-module M dan j injeksi dari N into M, maka N disebut direct summand dari M jika terdapat homomorphisma $\rho : M \longrightarrow N$ sedemikian hingga $\rho\circ j = 1_N$

Contoh :

Misalkan Z ring bilangan bulat dan $M_1=\{\bar{0},\bar{1}\}$, $M_2=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ adalah module - module atas ring Z sehingga $M=M_1 x M_2$ yaitu $M = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$ adalah juga merupakan module atas ring Z. Selanjutnya bila diperhatikan $N=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}$ submodule dari M, maka pemetaan $j:N \longrightarrow M$ dengan $j(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x},\bar{y})$, untuk setiap $(\bar{x},\bar{y})\in N$ merupakan injeksi dari N into M.

Jika didefinisikan $\rho : M \longrightarrow N$ dengan $\rho(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{0},\bar{y})$ untuk setiap $(\bar{x},\bar{y}) \in M$, maka N Direct Summand dari M.

Penyelesaian :

Didefinisikan $\rho : M \longrightarrow N$ dengan $\rho(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{0},\bar{y})$ untuk setiap $(x,y) \in M$, sehingga ρ suatu homomorphisma sebab :

Ambil $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2,\bar{y}_2) \in$ sehingga ρ harus memenuhi :

i. $\rho((\bar{x}_1,\bar{y}_1)+(\bar{x}_2,\bar{y}_2)) = \rho(\bar{x}_1,\bar{y}_1) + \rho(\bar{x}_2,\bar{y}_2)$

untuk $\rho((\bar{x}_1,\bar{y}_1)+(\bar{x}_2,\bar{y}_2)) = \rho((\overline{x_1+x_2}),(\overline{y_1+y_2}))$

$= (\bar{0},\overline{y_1+y_2}) = (\bar{0},\bar{y}_1+\bar{y}_2)$

$= (\bar{0},\bar{y}_1) + (\bar{0},\bar{y}_2)$

$\rho((\bar{x}_1,\bar{y}_1)+\rho(\bar{x}_2,\bar{y}_2)) = (\bar{0},\bar{y}_1) + (\bar{0},\bar{y}_2)$

Terbukti $\rho((\bar{x}_1,\bar{y}_1)+(\bar{x}_2,\bar{y}_2)) = \rho(\bar{x}_1,\bar{y}_1) + \rho(\bar{x}_2,\bar{y}_2)$

ii. $\rho(a(\bar{x}_1,\bar{y}_1) = a\rho(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$

untuk :

$\rho(a(\bar{x}_1,\bar{y}_1) = \rho(a\bar{x}_1,a\bar{y}_1) = \rho(\overline{ax}_1,\overline{ay}_1)$

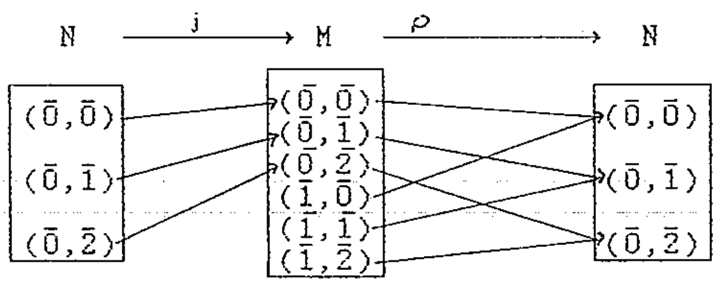
$= (\bar{0},a\bar{y}_1)$

$a\rho(\bar{x}_1,\bar{y}_1) = a(\bar{0},\bar{y}_1) = (a\bar{0},a\bar{y}_1)$

$=(\bar{0},a\bar{y}_1)$ untuk setiap $a \in Z$

Terbukti $\rho(a(\bar{x}_1,\bar{y}_1) = a\rho(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$.

Karena syarat (i) dan (ii) dipenuhi, maka ρ suatu homomorphisma. Selanjutnya bila diperhatikan pada diagram berikut :



Sehingga terbukti terdapat ρ homomorphisma sedemikian hingga $\rho \circ j = 1_N$. Jadi N direct summand dari M.

Definisi 2.5.2.5

Barisan eksak $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ disebut barisan split eksak, jika dipenuhi dari salah satu berikut :

i. Terdapat $\gamma : P \longrightarrow M$ dengan $g\gamma = 1_P$

ii. Terdapat $\delta : M \longrightarrow N$ dengan $f\delta = 1_N$

dimana γ dan δ suatu homomorphisma.

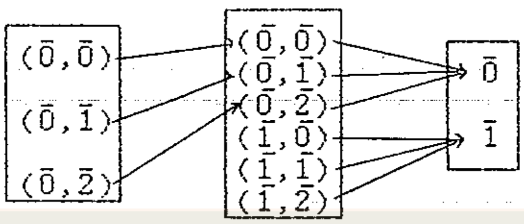
Contoh :

Pandang Z ring bilangan bulat dan $M_1 = \{\bar{0},\bar{1}\}$, $M_2=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ adalah module atas ring Z. Apabila $M=M_1 x M_2$, maka $M=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$. Selanjutnya ambil untuk $N = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}$ adalah submodule dari M. Didefinisikan pemetaan $j:N \longrightarrow M$ dengan $j(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x},\bar{y})$ untuk setiap $(\bar{x},\bar{y}) \in N$ dan $f:M \longrightarrow M_1$ dengan $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}$ untuk setiap $(\bar{x},\bar{y}) \in M$. Jika didefinisikan $\rho(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{0},\bar{y})$, maka barisannya split :

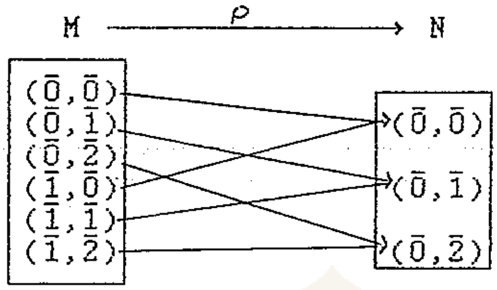
Penyelesaian :

Dari permasalahan tersebut bila digambar secara diagram sebagai berikut :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} M \xrightarrow{f} M_1 \longrightarrow 0$$



Karena barisan eksak, maka diperoleh Im(j) = ker(f). Sekarang didefinisikan $\rho(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{0},\bar{y})$ yaitu memetakan module M ke module N secara diagram adalah :



Dengan demikian barisannya split karena berlaku $\rho \circ j = 1_N$.