BAB II

MATERI PENUNJANG

Metode khusus yang dipakai untuk memperoleh suatu relasi matematik dengan mengasumsikan berlakunya suatu jenis hubungan tertentu, linier atau nonlinier dalam parameter yang belum diketahui disebut metode regresi. Parameter ini diduga berdasarkan asumsi dan bantuan data yang tersedia, sehingga diperoleh persamaannya.

Dengan metode kuadrat terkecil dapat digunakan untuk menganalisa data dan mengambil kesimpulan yang bermakna tentang ketergantungan yang mungkin ada, serta meramalkan data berikutnya disebut analisa regresi.

Untuk mencari nilai parameter dari persamaan regresi, maka sebagai dasar - dasar teori serta perhitungan akan dibahas berikut ini.

2.1. EKSPEKTASI PEUBAH ACAK

Definisi 1 :

Peubah acak adalah suatu peubah yang nilainya dari bilangan yang ditentukan melalui hasil dari suatu percobaan.

Definisi 2 :

Misalkan X suatu peubah acak dengan kemungkinan nilai x_1, x_2, ..., x_t dengan peluang $f(x_1)$, $f(x_2)$,

..., $f(x_t)$. Maka himpunan f yang semua unsurnya adalah pasangan $[x_i, f(x_i)]$, i = 1, 2, ..., t disebut fungsi peluang t.

Definisi 3 :

Misalkan X peubah acak yang kemungkinan nilainya adalah $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Misalkan sampel sebanyak n pengamatan maka rata-rata nilai x untuk sampel ini adalah :

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_t n_t}{n_1 + n_2 + \ldots + n_t} = \frac{\Sigma\ x_i n_i}{\Sigma\ n_i}$$

atau

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i n_i$$

Definisi 4 :

Misalkan X peubah acak, maka harapan (ekspektasi) matematika dari x, dinyatakan E(X) didefinisikan sebagai :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{t} x_i f(x_i),$$

E(X) disebut juga rata-rata dari x, atau rataan populasi.

Teorema 1 :

Misalkan X peubah acak dan H suatu fungsi dari x, maka nilai harapan peubah acak baru H(X) dinyatakan dengan $E[H(X)] = H(x_1)f(x_1) + H(x_2)f(x_2) + \ldots + H(x_t)f(x_t)$ ....(1)

atau

$$E[H(X)] = \sum_{i=1}^{t} H(x_i)\ f(x_i).$$

Bukti :

Misalkan $Y = H(X)$ mendapat nilai y_1 pada m nilai X yang berlainan, katakanlah untuk $X = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$, maka

$$y_1 = H(x_1) = H(x_2) = \ldots = H(x_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Sumbangan padanannya pada rataan Y adalah :

$y_1P(Y = y_1)$ tetapi $P(Y = y_1) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m)$, sehingga $y_1P(Y = y_1) = y_1f(x_1) + y_1f(x_2) + \ldots + y_1f(x_m)$, dengan memperhatikan persamaan (2), maka

$$y_1P(Y = y_1) = H(x_1)f(x_1) + H(x_2)f(x_2) + \ldots + H(x_m)f(x_m)$$

Begitu pula untuk y_2, y_3 dan seterusnya, maka suku kanan persamaan (1) dapat dikelompokkan dalam suku yang berpadanan $y_1P(Y = y_1) + y_2P(Y = y_2) + \ldots = E(Y)$. Jadi persamaan (1) memungkinkan untuk digunakannya fungsi peluang X untuk mendapatkan hasil yang sama diperoleh dengan menghitung rataan $Y = H(X)$ dari fungsi peluang Y. ∎

Teorema 2 :

Misalkan X peubah acak dengan random yang berhingga maka $E(aX + b) = aE(X) + b$ untuk setiap bilangan a dan b tertentu.

Bukti :

Misalkan fungsi peluang X adalah $\{[x_i, f(x_i)],\ i = 1, 2, \ldots, t\}$ maka menurut teorema 1,

$E(aX + b) = (ax_1 + b)f(x_1) + (ax_2 + b)f(x_2) + \ldots + (ax_t + b)f(x_t)$ dengan menguraikan ruas kanan dan mengeluarkan a dan b, diperoleh :

$E(aX + b) = a[x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_t f(x_t)] + b\ [x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_t f(x_t)]$.

Suku pertama pada ruas kanan adalah :

$E(X) = \Sigma\ x_i f(x_i)$, dan yang kedua sama dengan 1, karena $\Sigma\ f(x_i) = 1$. Jadi hasil akhirnya $E(aX + b) = aE(X) + b$ ∎

Akibat 1 :

Misalkan X peubah acak dengan rataan $E(X) = \mu$, maka $E(X - \mu) = 0$.

Bukti :

Ambil $a = 1$, $b = -\mu$ pada teorema 2 :

$E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$ ∎

Teorema 3 :

Misalkan X peubah acak dan misalkan G dan H fungsi dari X sedemikian rupa sehingga $E[G(X)]$ dan $E[H(X)]$ keduanya ada, maka $G(X) + H(X)$ mempunyai nilai harapan, $E[G(X) + H(x)] = E[G(X)] + E[H(X)]$.

Bukti :

Misalkan X mempunyai rentangan berhingga kemungkinan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_t$ dengan peluangnya $f(x_i)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, t$.

Dengan menggunakan teorema 1 pada fungsi G + H diperoleh :

$$E[G(X) + H(X)] = \sum_{i=1}^{t} [G(x_i) + H(x_i)]\, f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} G(x_i)\, f(x_i) + \sum_{i=1}^{t} H(x_i)\, f(x_i)$$

$$= E[G(X)] + E[H(X)]$$ ∎

Definisi 5 :

Misalkan X suatu peubah acak dengan rataan μ, yaitu $E(X) = \mu$, maka rataan simpangan mutlak X adalah nilai harapan dari $|X - \mu|$: rataan simpangan mutlak $X = E(|X - \mu|)$.

Definisi 6 :

Misalkan X suatu peubah acak dengan rataan $E(X) = \mu$, variansi X, dinyatakan dengan Var(X), didefinisikan dengan $\mathrm{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$

$$= \sum_{i=1}^{t} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

Sedangkan untuk sampel, Var(X) dinotasikan dengan :

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Untuk variansi sampel gabungan, didefinisikan dengan :

$S_x^2 = \dfrac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, dengan p adalah banyaknya sub sampel gabungan.

Definisi 7 :

Misalkan X peubah acak dengan rataan μ, simpangan baku adalah akar variansi yang positip, dan dinyatakan dengan :

$\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$

Teorema 4 :

Misalkan X peubah acak dengan rataan μ, dan $Var(X) = \sigma^2$, maka :

$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\quad = E(X^2) - \mu^2$

Bukti :

Misalkan fungsi peluang X adalah f(x), maka menurut definisi 4 diperoleh

$\Sigma(x_i^2 f(x_i) = E(X^2)$ ....(3a)

$\Sigma\ x_i f(x_i) = E(X)$ ....(3b)

$\Sigma f(x_i) = 1$ ....(3c)

dan $\Sigma\ (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \Sigma\ x_i^2 f(x_i) - 2\mu\Sigma x_i f(x_i) + \mu^2\Sigma f(x_i)$ ....(4)

Bila ruas kanan persamaan (13a,b,c) dimasukkan pada persamaan (4), maka

$\Sigma(x_i - \mu)^2 f(x_i) = E(X^2) - 2\ \mu E(X) + \mu^2$

$= E(X^2) - 2E(X).E(X) + [E(X)]^2$

$= E(X^2) - \mu^2$ ....(5)

menurut definisi 7, ruas kiri persamaan (4) adalah $E(X-\mu)^2 = \sigma^2$, maka bukti selesai. ∎

Definisi 8 :

Kovariansi dua peubah acak adalah nilai rataan dari perkalian kedua peubah setelah dikurangi dengan masing-masing rataannya, dengan notasi :

$Kov(X,Y) = E\{(X-\mu_x)\ (Y-\mu_y)\}$

hukum komutatif untuk persamaan ini berlaku dan kovariansi peubah acak dengan dirinya sendiri adalah variansinya.

Teorema 5 :

Bila X dan Y bebas, maka $Kov(X,Y) = 0$

Bukti :

Karena $E(XY) = E(X).E(Y) = \mu.\mu_y$, maka bila X dan Y bebas, kovariansinya :

$Kov(X,Y) = E(XY) - \mu.\mu_y = \mu.\mu_y - \mu.\mu_y = 0.$ ∎

Definisi 9 :

Misal X dan Y peubah acak dengan simpangan baku σ_x dan σ_y lebih besar dari nol, maka korelasi antara X dan Y, dinyatakan dengan ρ, didefinisikan :

$\rho = Kov(X',Y')$ dengan $X' = \dfrac{x - \mu x}{\sigma_x}$ dan $Y' = \dfrac{y - \mu y}{\sigma_x}$ atau $\rho = \dfrac{Kov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

Definisi 10 :

Misal X adalah peubah acak dengan densitas $f_X(.)$, nilai ekspektasi e^{tx} dedefinisikan sebagai fungsi pembangkit momen X, jika nilai ekspektasi ada untuk setiap nilai t pada interval $-h < t < h$. Fungsi pembangkit momen dinotasikan dengan m(t).

$$m(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, \text{ jika x kontinu}$$

$$= \sum_x e^{tx} f_X(x) \text{ , jika x diskret.}$$

Definisi 11 :

Fungsi pembangkit momen gabungan (x_1, x_2, $\ldots, x_k$) didefinisikan :

$$m_{X1,X2,\ldots,Xk}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = E\,[\exp. \sum_{j=1}^{k} t_j x_j]$$

jika ekspektasi ada untuk semua nilai t_1, t_2, ..., t_k dengan $-h < t_j < h$ untuk semua $h > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

2.2. Matriks

Dalam penulisan tugas akhir ini, perhitungan persamaannya banyak menggunakan matriks.

Definisi 12 :

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan - bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Contoh 1 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Definisi 13 :

Transpose matriks $A = [a_{ij}]_{N\times M}$, dinotasikan dengan A^T adalah dicapai dengan menukar baris dan kolom dari matriks A yaitu $A^T = [a_{ii}]_{M\times N}$, dimana $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Contoh 2 : $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Definisi 14 :

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran (pxq) dan $B = (b_{ij})$ berukuran (qxr) maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ yang berukuran (pxr) di mana :

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, p$ dan $j = 1, 2, \ldots, r$.

Definisi 15 :

Matriks identitas dinotasikan dengan I adalah matriks bujur sangkar yang memiliki semua elemen diagonalnya satu dan semua elemen bebas diagonal adalah

$$I_{NXN} = \begin{cases} i_{ij} = 0, \text{ untuk } i \neq j \\ i_{ij} = 1, \text{ untuk } i = j \end{cases}$$

Definisi 16 :

Matriks $A_{M\times N}$ dapat dipartisi menjadi sub matriks.

Contoh 3 :

Matriks $A_{M\times N}$ dapat dipartisi menjadi :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

$A_{11} = N_1 x\ N_1$ $\quad A_{12} = M_1 x\ N_2$ $\quad A_{21} = M_2 x\ N_1$

$A_{22} = M_2 x\ M_2$ $\quad M = M_1 + M_2$ $\quad N = N_1 + N_2$

Definisi 17 :

Determinan dari matriks bujur sangkar A_{NxN} dinotasikan dengan $|A|$ didefinisikan dengan iterasi yang memenuhi $|A| = \sum_{i=1}^{N} m_{ij} M_{ij}$, di sini M_{ij} adalah sub matriks dan m_{ij} didefinisikan sebagai $(-1)^{i+j}$ suatu determinan dari submatriks A dibentuk dengan menghapus baris ke-i dengan kolom ke-j, dan di mana determinan dari skalar adalah skalar itu sendiri.

Definisi 17 :

A adalah matriks NxN dikatakan non singular jika determinannya tidak sama dengan nol. Jika determinannya sama dengan nol disebut singular.

Definisi 19 :

Jika A matriks bujur sangkar nonsingular, invers dari A didefinisikan sebagai A^{-1} adalah matriks bujur sangkar nonsingular sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Teorema 6 :

Jika A adalah matriks NxN yang memiliki invers, maka untuk setiap vektor B yang berdimensi n, sistem persamaan $AX = B$ mempunyai tepat satu penyelesaian yakni $X = A^{-1}B$.

Bukti :

Pandang $B = B$ dan $AA^{-1} = I$

$$IB = B$$
$$(AA^{-1})B = B$$
$$A(A^{-1})B = B$$

maka $X = A^{-1}B$ adalah penyelesaian $AX = B$.

Untuk membuktikan solusi tunggal maka anggap X_o adalah sembarang solusi dan kemudian diperlihatkan bahwa X_o harus merupakan penyelesaian $A^{-1}B$.

Jika X_o suatu penyelesaian, maka $AX_o = B$

$$AX_o = B$$
$$A^{-1}AX_o = A^{-1}B$$
$$X_o = A^{-1}B$$

Jadi $X = X_o = A^{-1}B$ terbukti bahwa solusi tunggal.■

Definisi 20 :

A_{NXN} disebut simetris jika $A = A^T$, dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Definisi 21 :

Bentuk kuadratik dari variabel x_1, x_2, ..., x_N dapat ditulis sebagai $X^TAX = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_N]\ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{NN}x_N^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_ix_j$$

dengan A matriks simetris NxN.

Definisi 22 :

Bentuk kuadratik X^TAX disebut definit positif jika $X^TAX > 0$ untuk setiap $X \neq 0$, sedangkan matriks simetris A disebut matriks definit positif jika X^TAX adalah bentuk kuadratik definit positif.

Contoh 4 : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Perluasan dari bentuk kuadratik pada definisi 21 adalah sebagai berikut :

Misalkan matriks $X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix}$ dan

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ maka

$$X^TX = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i2} & \ldots & \Sigma x_{ik} \\ \Sigma x_{i1} & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_{i1}x_{i2} & \ldots & \Sigma x_{i1}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma x_{ik} & \Sigma x_{ik}x_{i1} & \Sigma x_{ik}x_{i2} & \ldots & \Sigma x_{ik}^2 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{dan } X^TY = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_{i1} y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_{ik} y_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\text{sehingga} \quad (X^TX)^{-1} = \frac{1}{n\ \Sigma\ (\bar{x}^2 - x_i)} \cdot \ X^TX \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

di mana selain elemen diagonal dikalikan dengan (-1).

2.3. Matriks Acak

Definisi 23 :

Matriks acak (random) adalah matriks yang elemen - elemennya dari peubah acak.

Definisi 24 :

Harga harapan matriks acak adalah harga harapan dari setiap elemen-elemennya. Misal $X_{pxn} = \{x_{ij}\}$, maka $E(X) = [E(x_{ij})]$

Teorema 7 :

Bila X dan Y adalah matriks acak dengan dimensi sama, maka A dan B adalah matriks konstan yang dapat digandakan dengan X. (AXB ada) maka

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(AXB) = AE(X)B$

Bukti :

Untuk bukti teorema ini sesuai dengan sifat pada ekspektasi matematik pada peubah acak, hanya saja X, Y adalah matriks dengan dimensi sama. Sesuai teorema 3. ∎

Definisi 25 :

Bila X adalah matriks random berdimensi MxN dengan mean : $E(X) = [E(X_i)] = [\mu_i]$, kovarian : Kov (X) = $V(X) = E(x-\mu)(x-\mu)^T = [\sigma_{ij}]$, matriks korelasi : ρ = $[\rho_{ij}]$ dengan $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$ standar deviasi akar positif dari variansinya yaitu :

$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{s^2(\Sigma x\ )}$ analog untuk sampel $E(X)$ = $[\bar{x}]^T$ dan $kov(X) = V(X) = [s_{ij}] = [\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{p}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2]$

2.4. Distribusi - distribusi peubah acak

Dalam penulisan dan perhitungan selanjutnya diperlukan distribusi -distribusi peubah acak dan beberapa pengertian akan definisikan di bawah ini.

Definisi 26 :

Sebuah peubah acak X, dengan rataan μ dan variansi σ^2 berdistribusi normal jika fungsi densitasnya diberikan dengan :

$$f_x(x) = f_x(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \text{ exp. } -(x - \mu)^2/2\sigma^2$$

Untuk rataannya nol dan variansinya 1 maka :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ exp. } (-1/2\ x^2)\ dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

disebut berdistribusi normal standar, dan ditulis N(0,1). Dan untuk peubah acak multivariabel, ditulis dengan $N(0, I\sigma^2)$ dengan I adalah matriks identitas.

Definisi 27 :

Misal variabel acak dua dimensi (x,y) mempunyai fungsi densitas gabungan :

$$f_{x,y}(x,y) = f(x,y) \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \text{ exp. } \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\left(\frac{x-\mu x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho \frac{x-\mu x}{\sigma_x} \frac{y-\mu y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu y}{\sigma_y}\right)^2 \right] \right\}$$

maka peubah acak (x,y) disebut berdistribusi normal bivariat.

Berdasarkan definisi 11, tentang fungsi pembangkit momen gabungan untuk x dan y ditunjukkan dengan :

$$m_{x,y}(t_1,t_2) = m(t_1,t_2) = E\ [e^{t_1x+t_2y}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x + t_2y} f(x,y)\ dy\ dx$$

Teorema 8 :

Fungsi pembangkit momen gabungan yang berdistribusi normal bivariat adalah :

$$m(t_1,t_2) = \exp.[t_1\mu_x + t_2\mu_y + 1/2\ (t_1^2\sigma_x^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_x\sigma_y$$

$$+ t_2^2\sigma_y^2)].$$

Bukti :

Dengan substitusi $u = \dfrac{x - \mu_x}{\sigma_x}$ dan $v = \dfrac{y - \mu_y}{\sigma_y}$,

maka :

$$m(t_1,t_2) = e^{\left(t_1\mu_x + t_2\mu_y\right)} \int\int\left[e^{\left(t_1\sigma_x u + t_2\sigma_y v\right)} \cdot\right.$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp. -\left[\frac{1/2}{(1-\rho^2)}\right] \cdot$$

$$\left.(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right] dv\ du$$

Kombinasi eksponen dalam integral dapat ditulis :

$$-\frac{1}{(1-\rho^2)}\ \{[u - \rho v - (1-\rho^2)t_1\sigma_x]^2 + (1-\rho^2)\ (v -$$

$$\rho t_1\sigma_x - t_2\sigma_y)^2 - (1-\rho^2)\ (t_1^2\sigma_x^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_x\sigma_y + t_2^2\sigma_y^2)\}$$

jika disubstitusi

$$w = \frac{u - \rho v - (1-\rho^2)t_1\sigma_x}{\sqrt{1-\rho^2}} \text{ dan } z = v - \rho t_1\sigma_x - t_2\sigma_y$$

menjadi :

$$-1/2\ w^2 - 1/2\ z^2 + 1/2\ (t_1^2\sigma_x^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_x\sigma_y + t_2^2\sigma_y^2)$$

dan fungsi momen gabungannya :

$$m(t_1,t_2) = e^{(t_1\mu_x + t_2\mu_y)}\ \exp.\ [\ (1/2)\ \ (t_1^2\sigma_x^2 +$$

$$2\rho t_1 t_2 \sigma_x \sigma_y + t_2^2 \sigma_y^2)] . \int \int \frac{1}{2\pi} e^{(-w^2/2 - z^2/2)} \, dw \, dz$$

$$= \exp. [t_1 \mu_x + t_2 \mu_y + (1/2) (t_1^2 \sigma_x^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_x \sigma_y + t_2^2 \sigma_y^2)]$$ ∎

Teorema 9 :

Jika (x,y) mempunyai distribusi normal bivariat maka $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$, $Var(X) = \sigma_x^2$, $Var(Y) = \sigma_y^2$ $Kov(x,y) = \rho\sigma_x\sigma_y$ dan $\rho_{x,y} = \rho$.

Bukti :

Jika momen dihitung dengan evaluasi pendekatan derivatif $m(t_1,t_2)$ pada $t_1 = 0$ dan $t_2 = 0$ maka :

$$E[X] = \frac{\partial m}{\partial t_1} \bigg|_{t_1, t_2 = 0} \mu_x \text{ dan}$$

$$E[X^2] = \frac{\partial^2 m}{\partial t_1^2} \bigg|_{t_1, t_2 = 0} = \mu_x^2 + \mu_y^2$$

Maka variansi x adalah $E[(x - \mu_x)^2] = E[X^2] - \mu_x = \sigma_x^2$ demikian pula untuk derivatif terhadap t_2 akan ditemukan rata-rata dan variansi y adalah μ_y dan σ_y^2.

Kovariansi X dan Y adalah :

$$\begin{aligned} E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] &= E[XY - X_{\mu y} - Y_{\mu x} + \mu_x \mu_y] \\ &= E[XY - \mu_x \mu_y] \\ &= \rho\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

dengan ρ adalah korelasi antara X dan Y. ∎

Definisi 28 :

Jika X adalah peubah acak yang mempunyai fungsi densitas :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma[(v_1+v_2)/2]}{\Gamma(v_1/2)\,\Gamma(v_2/2)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1/2} \frac{X^{(v_1-2)/2}}{[\,1 + (\frac{v_1}{v_2})X]^{(v_1/v_2)2}}$$

$I_{(0,\infty)}(x)$. maka X didefinisikan sebagai peubah acak yang berdistribusi F dengan derajat bebas v_1 dan v_2.

Di mana $\Gamma(.)$ menyatakan suatu fungsi gamma dengan $\Gamma(n) = (n-1)!$ dan mempunyai sifat $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

Pada distribusi F ada 2 macam derajat bebas yaitu v_1 = derajat bebas pembilang = banyaknya parameter = p, v_2 = derajat bebas penyebut = n-p, dan taraf nyata α, dapat dilihat dalam tabel.

Misal n = 16, p = 2, α = 0,05 maka ditulis $F_{v_1,v_2,1-\alpha} = F_{p,n-p,1-\alpha} = F_{2,14,0,95} = 3,74$.

Definisi 29 :

Jika X peubah acak yang mempunyai fungsi densitas :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\,[(v+1)/2]}{\Gamma\,(v/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \cdot \frac{1}{(1+x^2/v)^{(v+1)/2}}$$

maka X didefinisikan mempunyai distribusi t dengan derajat bebasnya v.

Pada distribusi t terdapat n-p derajat bebas dinotasikan dengan v, taraf nyata α maka tingkat kepercayaannya $1-\alpha/2$.

Misal n = 16 α = 0,05 maka ditulis $t_{v,1-\alpha/2} = t_{14;0,975} =$ 2,13.

2.5. Fungsi

Berikut ini disajikan beberapa definisi dan teorema dari fungsi.

Definisi 30 :

Misalkan f(X) terdefinisi pada interval I, maka :

i. Jika $X_1 < X_2$ mengakibatkan bahwa $f(X_1) < f(X_2)$, untuk setiap $X_1, X_2 \in I$, maka f dikatakan fungsi monoton naik pada interval I.

ii. Jika $X_1 < X_2$ mengakibatkan $f(X_1) > f(X_2)$, untuk setiap $X_1, X_2 \in I$, maka f dikatakan fungsi monoton turun pada interval I.

Definisi 31 :

Fungsi f $\in$ R dikatakan mempunyai harga minimum lokal pada $X = X^*$ jika terdapat persekitaran $N(X^*,\varepsilon)$ yang memuat X^* sedemikian sehingga $f(X^*) \le f(X)$ untuk setiap X dalam persekitaran $N(X^*,\varepsilon)$.

Definisi 32 :

Fungsi f dikatakan mempunyai harga minimum global pada $X = X^*$ jika $f(X^*) \le f(X)$ untuk setiap $X \in R^N$.

Definisi 33 :

Fungsi $f \in R^N$, jika $f(X^*) < f(X)$ untuk setiap $X \in$

$N(X^*,\varepsilon)$, $X \neq X^*$, untuk suatu $\varepsilon > 0$, maka X^* disebut minimum lokal terbatasi.

Teorema 10 :

Misalkan $f: R \longrightarrow R$ mempunyai turunan dengan orde $(N+1) f^{(N+1)}(x)$ diselang $(a-r,\ a+r)$ dan misalkan ada konstanta $M > 0$ demikian berlaku $|f^{(N+1)}(x)| \leq M$, untuk semua x diselang tersebut. maka untuk setiap x diselang itu, f(x) dapat dituliskan menjadi bentuk $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! + \ldots + f^{(N)}(a)(x-a)^N/N! + R_N$

$$\text{dengan } |R_N| \leq M \frac{|x-a|^{(N+1)}}{(N+1)!}$$

Bukti :

$|f^{(N+1)}(x)| \leq M$ ditulis sebagai $-M \leq f^{(N+1)}(x) \leq M$

Jika semua ruas diintegrasikan dari a hingga x, diperoleh $-M(x-a) \leq f^{(N)}(x) - f^{(N)}(a) \leq M(x-a)$

hasil ini diintegrasikan lagi dari a sampai x maka didapat

$$\frac{-M(x-a)^2}{2!} \leq f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(a) - f(a)^{(N)}(x-a)$$

$$\leq \frac{M(x-a)^2}{2!}$$

Proses integrasi ini di selang (N-1) kali lagi dan hasilnya sebagai berikut :

$-M(x-a)^{(N+1)} \leq f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \ldots$

$$f''(a)(x-a)^2/2! - f^{(N)}(a)\ (x-a)^N/N! \le \frac{M(x-a)^{(N+1)}}{(\ N+1\ )!}$$

Jika ruas tengah $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) -$

$f''(a)(x-a)^2/2! - \ldots f^{(N)}(a)\ (x-a)^N/N! = R_N$

maka diperoleh :

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! + \ldots +$

$f^{(N)}(a)\ (x-a)^N/N! + R_N$

dengan $|R_N| \le M\ |x-a|^{N+1}/(N+1)!$

Hasil ini yang disebut deret Taylor untuk $f(x)$ disekitar $x = a$, dengan R_N sebagai suku sisa. ■

Sebagai perluasan deret Taylor dari teorema 10 sehingga ditulis definisi berikut.

Definisi 34 :

Differensial ke-r dari F, jika semua derivatif parsial dari fungsi F memenuhi orde $r \ge 1$ ada dan kontinu pada titik X^*, maka polinomial

$$d^rF(X^*) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \ldots \sum_{k=1}^{N} \delta_i\ \delta_j \ldots \delta_k\ \frac{\partial^r F(X^*)}{\partial X_i\ \partial X_j \ldots \partial X_k}$$

disebut differensial ke-r dari F pada X^*, sehingga ekspansi deret Taylor dari $F(X)$ disekitar X^* diberikan :

$$F(X) = F(X^*) + \frac{1}{2!}\ d^2F(X^*) + \frac{1}{3!}\ d^3F(X^*) + \ldots +$$

$$\frac{1}{N!}\ d^NF(X^*) + R_N(X^*,\delta)$$

di mana $R_N(X^*,\delta) = \frac{1}{N!}\ d^{N+1}F(X^*+t\delta)$ untuk $0 < t < 1$ dan $\delta = X - X^*$.

Definisi 35 :

Persekitaran ε dari X dalam R^N didefinisikan sebagai himpunan dari semua titik Y dalam R^N sedemikian sehingga $\|Y - X\|_2 < \varepsilon$, di mana $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$.

Definisi 36 :

Barisan $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ dari vektor dalam R^N dikatakan konvergen ke-X terhadap norma $\| \cdot \|_2$ jika diberikan suatu $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan integer $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $\|X_k - X\|_2 < \varepsilon$, untuk setiap $k \geq N(\varepsilon)$.

Definisi 37 :

Jika untuk setiap vektor X dalam $D \subseteq R^N$, terdapat bilangan riil F(X) tunggal maka F(X) dikatakan fungsi berharga riil dari X, dinotasikan $F : D \subseteq R^N \longrightarrow R$.

Definisi 38 :

F(X) dikatakan kontinu pada X_0 jika untuk setiap bilangan riil $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\eta > 0$, sedemikian sehingga :

$$\|X - X_0\|_2 < \eta \longrightarrow \|F(X) - F(X_0)\|_2 < \varepsilon.$$

Definisi 39 :

Misalkan $K \subset R^N$ himpunan konveks, F(X) terdefinisi di K untuk setiap X_1, $X_2 \in K$, $\lambda \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Fungsi F disebut konveks jika :

$F(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\ F(X_1) + (1-\lambda)F(X_2)$ untuk $\lambda \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definisi 40 :

Fungsi F(.) didefinisikan dalam open konveks $D_o \subseteq R^N$ atau $F : D_o \longrightarrow R^N$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz dengan konstanta $k > 0$ jika :

$\|F(X) - F(Y)\|_2 \leq k\ \|X - Y\|_2^2$ untuk semua $X, Y \in D_o$, dinotasikan $F \in Lip(k)$.

Teorema 11 :

Jika $F : D_o \longrightarrow R^N$ adalah fungsi Lipschitz, maka F adalah kontinu uniform pada D_o.

Bukti :

Jika pertidaksamaan (definisi 43) terpenuhi, maka dengan mengambil $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/k$ dan $\|X - Y\|_2 < \delta(\varepsilon)$ akan mengakibatkan bahwa $\|F(X) - F(Y)\|_2 < k\ (\varepsilon/k)$

$$\|F(X) - F(Y)\|_2 < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definisi 41 :

Jika ada bilangan p dan $\alpha \neq 0$, sehingga

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\| x_{k+1} - x \|}{\| x_k - \overset{*}{x} \|^p} = \alpha$, maka p disebut order konvergen barisan $\{x_k\}$ dan $\| x_k - x^* \|$ disebut kesalahan pendekatan ke-k. Jika p = 1 suku konvergen barisan $\{x_k\}$ disebut linier, p > 1 disebut superlinier dan untuk $p = 2$ disebut kuadratik.

2.6. Model Linier dan Model Nonlinier

Linier ataupun nonlinier pada model statistik digambarkan pada parameter yang tidak diketahui dalam persamaan matematika. Untuk model linier disajikan dalam definisi berikut.

Definisi 42 :

Suatu fungsi f(.) didefinisikan dengan $f(u) = z = \alpha_0 + \alpha_1 u$ untuk semua u, yang mempunyai rata- rata μ dan variansi σ^2 untuk n pasangan amatan (u_1,z_1), (u_2,z_2), ..., (u_n,z_n) mempunyai $E(z_i) = \alpha_0 + \alpha_1 u_i$ dan $Var(z_i) = \sigma^2$, untuk $i = 1, 2, ..., n$ disebut model regresi linier.

Selain model tersaji dalam definisi 42 adalah model nonlinier.

Misalnya untuk pencocokan data percobaan tekanan uap (P) pada variasi perubahan waktu (t), dapat diperoleh model :

$$P = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 \qquad (10)$$

$$P = \exp\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + t}\right) \qquad (11)$$

Model pertama adalah model tipe polinomial ordo dua dengan parameter β_1, β_2, β_3 tidak diketahui. Model kedua adalah model tekanan uap air nonlinier dalam parameter β_1, β_2, dan β_3.

Kedua model diatas nonlinier dalam variabel bebas t, tetapi pada model (10) linier pada parameter dan model (11) nonlinier pada parameter.