BAB III

GRAPH KOMPATIBELITAS DAN GRAPH INTERVAL

Dalam bagian ini kita akan bicarakan tentang graph yang mempunyai banyak aplikasi pada bidang-bidang lain.

3.1. Graph Kompatibelitas

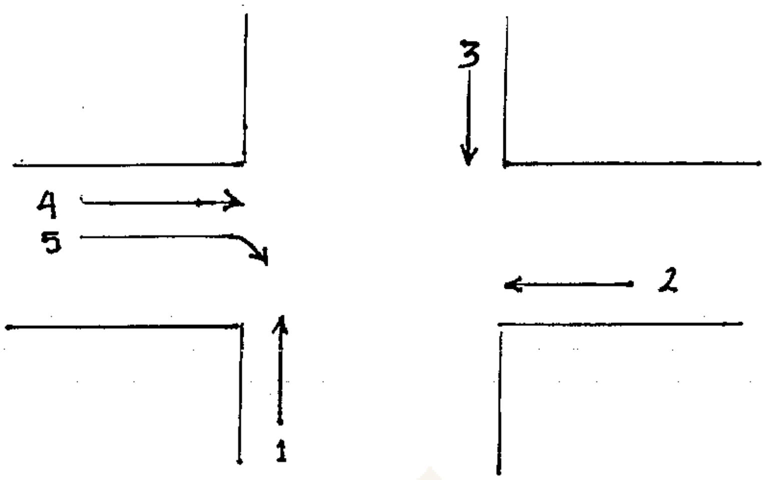
Graph kompatibilitas telah banyak dipakai untuk menyelesaikan berbagai masalah-masalah pada ilmu Biologi, Sosial, teknik. Karena banyak aplikasinya menyebabkan kita tertarik untuk mengetahui tentang graph tersebut dan bentuk aplikasinya.

DEFINISI 3.1.

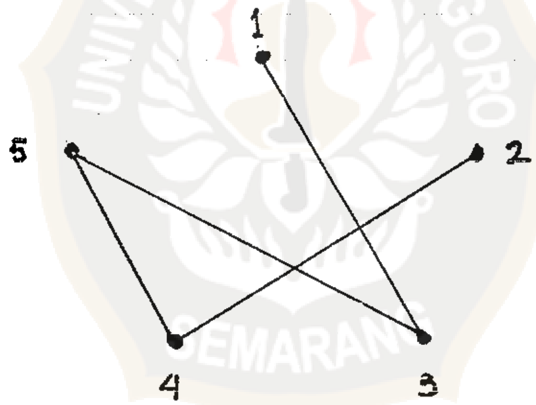
Suatu graph G adalah graph kompatibelitas apabila V(G) merupakan himpunan obyek-obyek dan E(G) adalah merupakan himpunan pasangan-pasangan obyek yang kompatibel.

Contoh 3.1.

Diambil perempatan jalan pada gambar 1.1. Ilustrasi dari perempatan tersebut adalah :



Dengan melihat keadaan arusnya maka didapat graph kompatibelitas sebagai berikut :



Pada graph kompatibelitas ini vertexnya diambil dari arus-arus lalu-lintas dalam perempatan jalan tersebut, sedang edgenya diambil dari pasangan arus-arus yang kompatibel. Arus-arus lalu-lintas dikatakan kompatibel bila arus lalu-lintas tersebut bisa berjalan bersama dengan aman. Berdasar graph kompatibelitas di atas maka hubungan kompatibelitas antar arus adalah:

1. arus 1

   arus 1, dengan arus 2 : tidak kompatibel,

   arus 1, dengan arus 3 : kompatibel,

   arus 1, dengan arus 4 : tidak kompatibel,

   arus 1, dengan arus 5 : tidak kompatibel

Jadi arus 1 kompatibel dengan arus 3

2. arus 2

   arus 2, dengan arus 3 : tidak kompatibel

   arus 2, dengan arus 4 : kompatibel

   arus 2, dengan arus 5 : tidak kompatibel

Arus 2 kompatibel dengan arus 4

3. arus 3

   arus 3, dengan arus 4 : tidak kompatibel

   arus 3, dengan arus 5 : kompatibel

Arus 3 kompatibel dengan arus 5

4. arus 4

   arus 4, dengan arus 5 : kompatibel

3.2 Graph Interval

Graph lain yang mempunyai banyak aplikasi, dan juga mempunyai hubungan dengan graph kompatibelitas adalah graph interval. Namun sebelum kita membahas graph interval kita bicarakan dulu graph irisan.

DEFINISI 3.2.

Misalkan F adalah keluarga himpunan-himpunan. Kita mendefinisikan suatu graph G, adalah graph irisan dari F, bila V(G) = F dan jika S, T $\in$ F dengan S $\neq$ T maka

$$\{ S , T \} \in E(G) \Leftrightarrow S \cap T \neq \phi \qquad (3.1)$$

Contoh 3.2

Gambar 3.3.dibawah ini menunjukan graph irisan dari famili F = { S_1, S_2, ...S_6 }, dengan S_1, S_2, ...S_6 di definisikan sebagai :

S_1 = { 1,2,3,4 }

S_2 = { 1,3,6 }

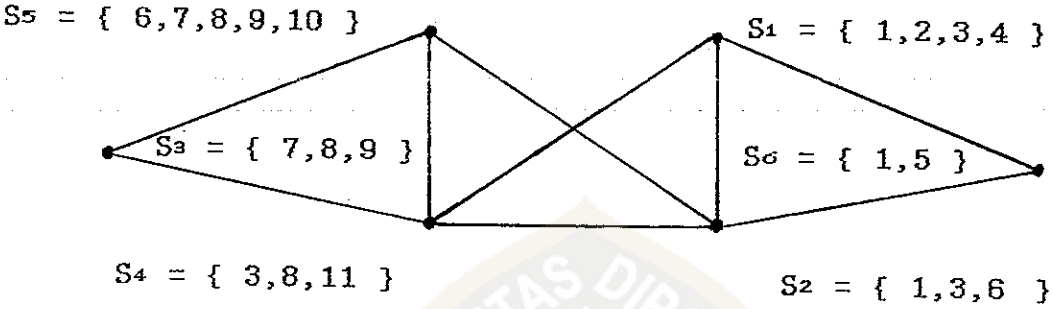
S_3 = { 7,8,9 }

S_4 = { 3,8,11 }

S_5 = { 6,7,8,9,10 }

S_6 = { 1,5 }

graph irisanya adalah



Gambar 3.3 Graph Irisan

Penjelasan

$S_1 \cap S_2 = \{ 1,3 \} \neq \phi \Rightarrow \{ S_1, S_2 \} \in E(G)$

$S_1 \cap S_3 = \phi \Rightarrow \{ S_1, S_3 \} \notin E(G)$

$S_1 \cap S_4 = \{ 3 \} \neq \phi \Rightarrow \{ S_1, S_4 \} \in E(G)$

$S_1 \cap S_5 = \phi \Rightarrow \{ S_1, S_5 \} \notin E(G)$

$S_2 \cap S_3 = \phi \Rightarrow \{ S_2, S_3 \} \notin E(G)$

$S_2 \cap S_4 = \{ 3 \} \Rightarrow \{ S_2, S_4 \} \in E(G)$

$S_2 \cap S_5 = \{ 6 \} \Rightarrow \{ S_2, S_5 \} \in E(G)$

$S_2 \cap S_6 = \{ 1 \} \Rightarrow \{ S_2, S_6 \} \in E(G)$

$S_3 \cap S_4 = \{ 8 \} \Rightarrow \{ S_3, S_4 \} \in E(G)$

$S_3 \cap S_5 = \{ 7,8,9 \} \Rightarrow \{ S_3, S_5 \} \in E(G)$

$S_3 \cap S_6 = \phi \Rightarrow \{ S_3, S_6 \} \in E(G)$

$S_4 \cap S_5 = \{ 8 \} = \phi \Rightarrow \{ S_4, S_5 \} \notin E(G)$

$$S_4 \cap S_6 = \phi \Rightarrow \{ S_4, S_6 \} \notin E(G)$$

$$S_5 \cap S_6 = \phi \Rightarrow \{ S_5, S_6 \} \notin E(G)$$

Suatu pertanyaan yang menarik biasanya adalah sebaliknya : diberikan suatu graph G, apakah graph tersebut sebagai graph irisan dari keluarga himpunan-himpunan yang mempunyai sifat tertentu ?. Pertanyaan tersebut ekuivalen dengan pertanyaan sebagai berikut. Di berikan graph G = (V,E), dapatkah kita memperoleh suatu fungsi S dari V kedalam keluarga himpunan-himpunan dengan sifat tertentu sedemikian, untuk seluruh $u \neq \nu \in V$

$$\{ u,\nu \} \in E \Leftrightarrow S(U) \cap S(\nu) \neq 0 \ ? \qquad (3.2)$$

Jika kita benar-benar bertanya apakah suatu pemberian G adalah graph irisan dari beberapa keluarga himpunan, jawabnya adalah selalu ya. Kita mempunyai theorema berikutnya.

THEOREMA 3.1.

Setiap graph G = (V,E) adalah graph irisan dari beberapa keluarga himpunan.

Bukti

Untuk setiap vertex u didalam G, misalkan

$S(u) = \{ (u,\nu) : (u,\nu) \in E \}$

$F \quad = \{ S(u) : u \in V \}$

maka S memenuhi (3.2) untuk semua $u \neq \nu \in V$. Untuk contoh, G adalah graph pada gambar 3.4. Kita mempunyai

$S(a) = \{ (a,b) , (a,c) , (a,d) \}$

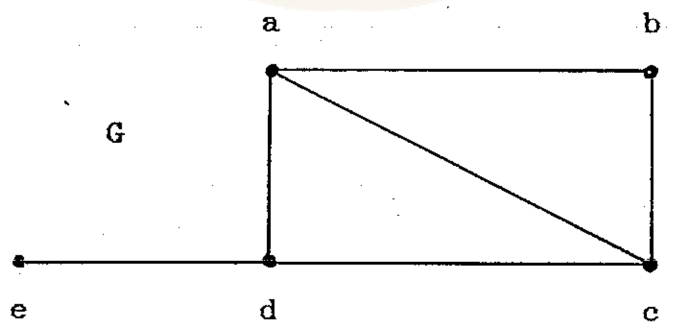
$S(b) = \{ (a,b) , (b,c) \}$

$S(c) = \{ (a,c) , (b,c) , (c,d) \}$

$S(d) = \{ (a,d) , (c,d) , (d,e) \}$

$S(e) = \{ (d,e) \}$

Kemudian sebagai contoh, kita lihat bahwa $\{d,e\} \in E$ dan bahwa $S(d) \cap S(e) \neq \phi$, karena $\{d,e\} \in S(d) \cap S(e)$. Tetapi $\{d,b\} \notin E$ dan $S(d) \cap S(b) = \phi$



Gambar 3.4. G adalah graph irisan

Keluarga himpunan-himpunan yang paling sering dipertimbangkan dalam hubunganya dengan graph irisan adalah keluarga dari interval-interval pada garis riil

Graph irisan dari keluarga interval-interval pada suatu garis untuk selanjutnya disebut graph interval.

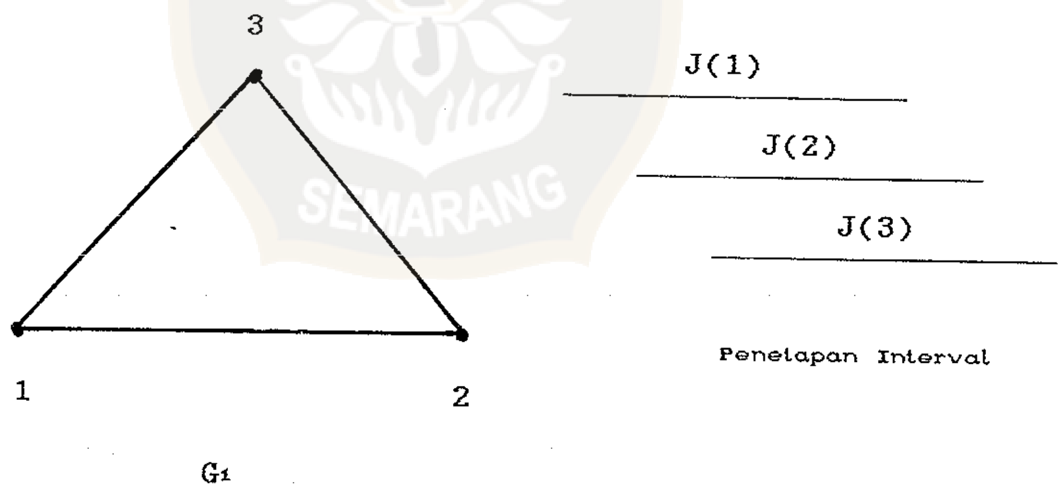
DEFINISI 3.3.

G = (V,E) adalah graph interval jika dan hanya jika terdapat suatu penetapan J dari suatu interval riil J(u) untuk setiap $u \in V$ sehingga untuk semua $u \neq \nu \in V$

$$\{ u,\nu \} \in E \Leftrightarrow J(u) \cap J(v) \neq 0 \qquad (3.3)$$

contoh 3.3

a)



Gambar 3.5

Vertex 1 mempunyai penetapan interval riil J(1)

Vertex 2 mempunyai penetapan interval riil J(2)

Vertex 3 mempunyai penetapan interval riil J(3)

$J(1) \cap J(2) \neq \phi$ karena J(1) dan J(2) overlap (saling meliputi)

$J(1) \cap J(3) \neq \phi$ karena J(1) dan J(3) overlap (saling meliputi)

$J(2) \cap J(3) \neq \phi$ karena J(2) dan J(3) overlap (saling meliputi)

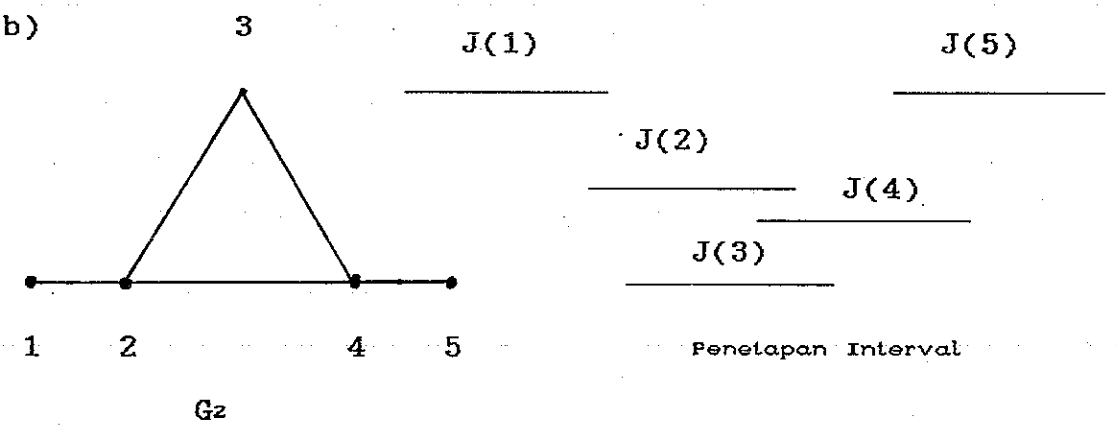
$(1,2) \in E \iff J(1) \cap J(2) \neq \phi$

$(1,3) \in E \iff J(1) \cap J(3) \neq \phi$

$(2,3) \in E \iff J(2) \cap J(3) \neq \phi$

Jadi graph G_1 adalah graph interval karena mememnuhi persamaan(3.3) untuk setiap $u \neq \nu \in V$

b)



Gambar 3.6

Vertek (1) mempunyai penetapan interval riil J(1)

Vertek (2) mempunyai penetapan interval riil J(2)

Vertek (3) mempunyai penetapan interval riil J(3)

Vertek (4) mempunyai penetapan interval riil J(4)

Vertek (5) mempunyai penetapan interval riil J(5)

$J(1) \cap J(5) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(4) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(3) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(2) \neq \phi$ karena overlap

$J(2) \cap J(5) = \phi$ karena tidak overlap

$J(2) \cap J(4) \neq \phi$ karena overlap

$J(2) \cap J(3) \neq \phi$ karena overlap

$J(3) \cap J(5) = \phi$ karena tidak overlap

$J(3) \cap J(4) \neq \phi$ karena overlap

$J(4) \cap J(5) \neq \phi$ karena overlap

$(1,2) \in E \Leftrightarrow J(1) \cap J(2) \neq \phi$

$(2,3) \in E \Leftrightarrow J(2) \cap J(3) \neq \phi$

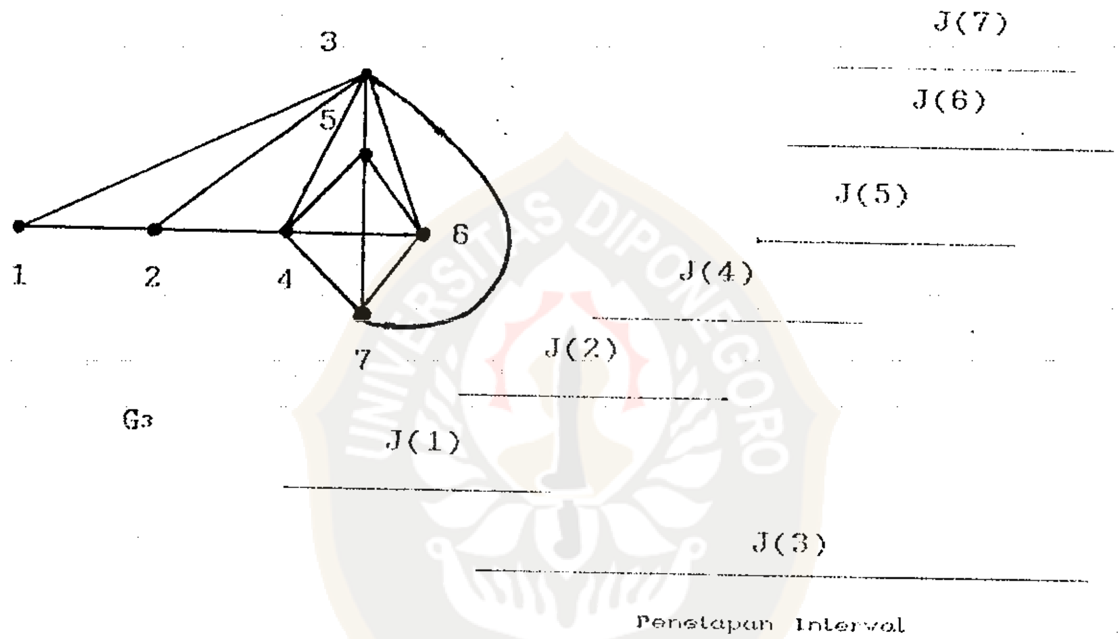
$(2,4) \in E \Leftrightarrow J(2) \cap J(4) \neq \phi$

$(4,5) \in E \Leftrightarrow J(4) \cap J(5) \neq \phi$

$(3,4) \in E \Leftrightarrow J(3) \cap J(4) \neq \phi$

Jadi graph G_2 adalah graph interval karena memenuhi persamaan (3.3)

$$(u,v) \in E \Leftrightarrow J(u) \cap J(v) \neq \phi \text{ untuk semua } u \neq v \in V$$



Gambar 3.7

Vertex (1) mempunyai penetapan interval J(1)
Vertex (2) mempunyai penetapan interval J(2)
Vertex (3) mempunyai penetapan interval J(3)
Vertex (4) mempunyai penetapan interval J(4)
Vertex (5) mempunyai penetapan interval J(5)
Vertex (6) mempunyai penetapan interval J(6)
Vertex (7) mempunyai penetapan interval J(7)

$J(1) \cap J(7) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(6) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(5) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(4) = \phi$ karena tidak overlap

$J(1) \cap J(3) \neq \phi$ karena overlap

$J(1) \cap J(2) \neq \phi$ karena overlap

$J(2) \cap J(7) = \phi$ karena tidak overlap

$J(2) \cap J(6) = \phi$ karena tidak overlap

$J(2) \cap J(5) = \phi$ karena tidak overlap

$J(2) \cap J(4) \neq \phi$ karena overlap

$J(2) \cap J(3) \neq \phi$ karena overlap

$J(3) \cap J(7) \neq \phi$ karena overlap

$J(3) \cap J(6) \neq \phi$ karena overlap

$J(3) \cap J(5) \neq \phi$ karena overlap

$J(3) \cap J(4) \neq \phi$ karena overlap

$J(4) \cap J(7) \neq \phi$ karena overlap

$J(4) \cap J(6) \neq \phi$ karena overlap

$J(4) \cap J(5) \neq \phi$ karena overlap

$J(5) \cap J(7) \neq \phi$ karena overlap

$J(5) \cap J(6) \neq \phi$ karena overlap

$J(6) \cap J(7) \neq \phi$ karena overlap

$(1,2) \in E \Leftrightarrow J(1) \cap J(2) \neq \phi$

$(1,3) \in E \Leftrightarrow J(1) \cap J(3) \neq \phi$

$(2,3) \in E \Leftrightarrow J(2) \cap J(3) \neq \phi$

$(2,4) \in E \Leftrightarrow J(2) \cap J(4) \neq \phi$

$(3,4) \in E \Leftrightarrow J(3) \cap J(4) \neq \phi$

$(3,5) \in E \Leftrightarrow J(3) \cap J(5) \neq \phi$

$(3,6) \in E \Leftrightarrow J(3) \cap J(6) \neq \phi$

$(3,7) \in E \Leftrightarrow J(3) \cap J(7) \neq \phi$

$(4,5) \in E \Leftrightarrow J(4) \cap J(5) \neq \phi$

$(4,7) \in E \Leftrightarrow J(4) \cap J(7) \neq \phi$

$(5,6) \in E \Leftrightarrow J(5) \cap J(6) \neq \phi$

$(5,7) \in E \Leftrightarrow J(5) \cap J(7) \neq \phi$

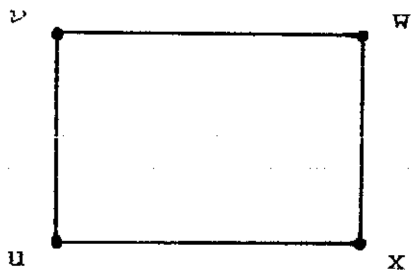
$(6,7) \in E \Leftrightarrow J(6) \cap J(7) \neq \phi$

Jadi graph G_3 adalah graph interval, karena memenuhi persamaan (3.3) :

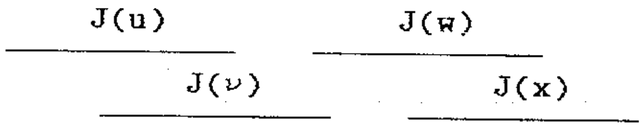
$$(u,v) \in E \Leftrightarrow J(u) \cap J(v) \neq \phi$$

untuk semua $u \neq v \in V$

Tidak setiap graph adalah graph interval. Sirkuit yang panjangnya 4, Z_4 sebagaimana ditujunkan pada gambar 3.7 dibawah ini, adalah bukan interval graph



Z_4



Penetapan Interval

Gambar 3.7

Vertek u mempunyai penetapan interval riil J(u)

Vertek ν mempunyai penetapan interval riil J(ν)

Vertek w mempunyai penetapan interval riil J(w)

Vertek x mempunyai penetapan interval riil J(x)

Untuk membuktikan bahwa Z_4 bukan graph interval, andaikan terdapat penetapan interval J yang memenuhi persamaan (3.3). Maka J(u) dan J(ν) harus overlap (saling meliputi). Oleh karena simetris letaknya, kita mungkin lebih baik meletakan J(ν) disebelah kanan dari J(u). Sekarang J(w) harus di sebelah kanan J(ν) karena J(w) overlap dengan J(ν), tidak dengan J(u). Demikian pula J(x) disebelah kanan dari J(w). Kita dapatkan akhirnya J(x) dan J(u), tidak overlap (lihat gambar 3.7), sehingga kontradiksi dengan $(u,x) \in E$.

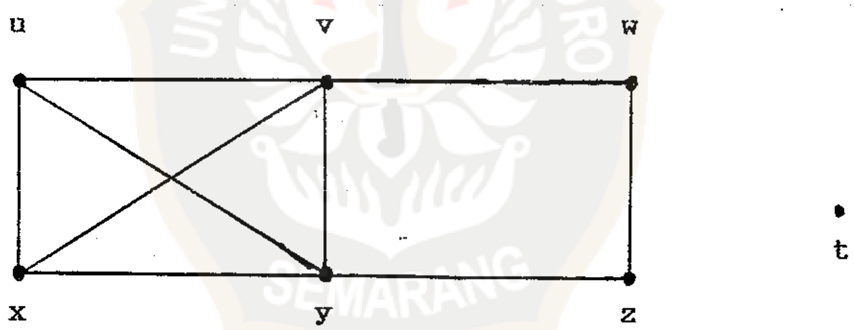
3.3 Pemeranan dari Graph Interval

Sebagai ide awal, akan diberikan pengertian tentang clique dan selanjutnya hubunganya dengan graph interval.

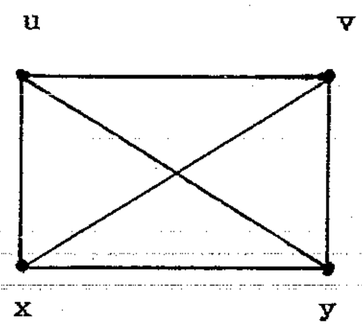
DEFINISI 3.4.

Diberikan graph G(V,E). Suatu subgraph yang lengkap dari graph G disebut clique.

contoh 3.4

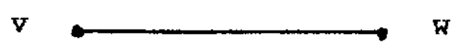


Graph G

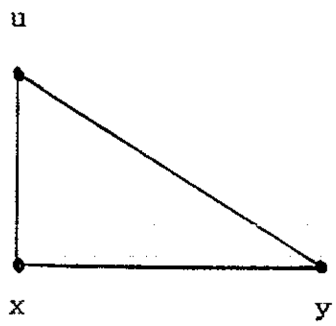


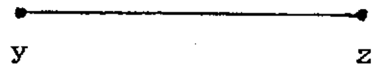
(K_4)

(K_2^1)



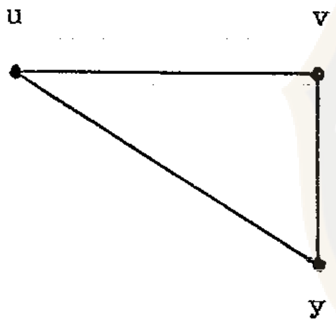
(K_2^7)





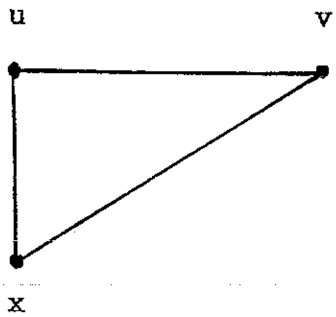
(K_2^8)

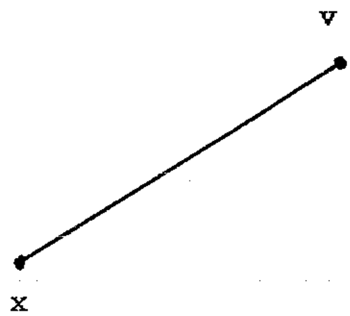
(K_3^1) (K_2^2)



(K_2^3)

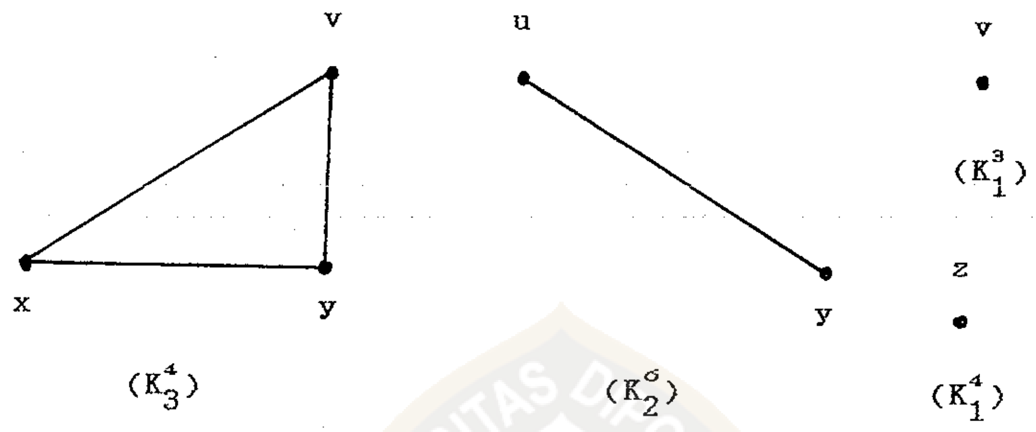
(K_3^2) (K_2^4) (K_2^0)





(K_1^1)

(K_3^3) (K_2^5) (K_1^2)



Gambar 3.8

Gambar 3.8 adalah gambar graph G dengan clique-cliquenya.

DEFINISI 3.5.

Suatu clique adalah clique maksimal jika clique tersebut tidak termuat dalam clique yang lebih besar.

Kita lihat gambar 3.8, subgraph yang dihasilkan oleh vertex u dan v adalah clique (clique K_2^3), tetapi bukan clique yang maksimal, karena clique tersebut termuat dalam clique yang lebih besar yang dihasilkan oleh vertex u, v, dan x (clique K_3^3). Dan clique terakhir juga bukan clique maksimal, karena clique tersebut termuat dalam clique (u, v, x, y) yang merupakan clique yang maksimal. Dari gambar 3.8 di atas yang merupakan clique maksimal adalah : K_4, K_2^7, K_2^8, K_2^9, K_1^1.

THEOREMA 3.2.

Diberikan $G = (V, E)$, adalah suatu graph.

(a). Jika K adalah clique maksimal dari graph G dan vertex $u \in V$ tidak berada dalam K, maka terdapat suatu vertex $v \in K$ sehingga $(u,v) \notin E$.

(b). Jika K dan L adalah clique yang maksimal dari graph G dan $K \neq L$, maka terdapat $u \in K$ dan $v \in L$ sehingga $(u,v) \notin E$.

(c). Jika $(u,v) \in E$ maka terdapat clique maksimal dari G sehingga u dan v adalah berada dalam K.

Bukti

(a). Jika diambil vertex yang bukan v, maka subgraph yang dibangun oleh u ditambah vertex-vertex dari K akan menjadi suatu clique yang lebih besar dari K. Hal ini akan kontradiksi dengan K adalah suatu clique yang terbesar. Sehingga benar jika K adalah clique yang maksimal dari graph G dan vertex $u \in V$ tidak berada dalam K maka terdapat suatu vertex $v \in K$ sehingga $(u,v) \notin E$.

(b). Karena $K \neq L$, maka terdapat u yang berada di dalam $(K - L) \cup (L - K)$. Misalkan kita menduga bahwa u berada di dalam $K - L$. Karena $u \notin L$, maka sesuai dengan bagian (a) yaitu jika L adalah clique maksimal dari grap G dan vertex $u \notin L$, maka terdapat suatu vertex $v \in L$, sehingga $(u,v) \notin E$.

Contoh 3.5

Kita lihat gambar 3.8,dan diambil K_4dan K_2^7 yang dua-duanya adalah clique maksimal dengan $K_4 \neq K_2^7$. Kita ambil $x \in K_4$ Maka x akan b e rada dalam $K_4 - K_2^7$ dengan $x \notin K_2^7$. Maka untuk $x \in V$ dengan $x \notin K_2^7$ dapat ditemukan suatu elemen K_2^7 yaitu $w \in K_2^7$, sehingga $(x,w) \notin E$.

(c). Subgraph yang dihasilkan oleh vertex-vertex u dan v adalah suatu clique. Jika clique tersebut bukan merupakanclique yang maksimal, maka penuhi jumlah vertex-vertexsampai suatu clique maksimal dapat tercapai

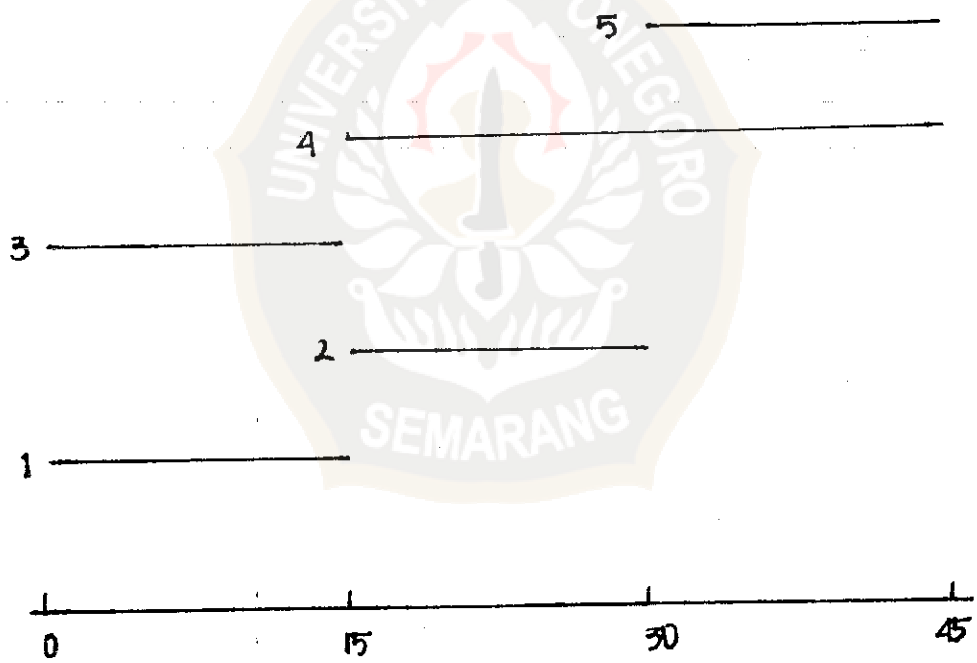
Setiap graph interval, bisa ditemukan clique maksimalnya.

Clique maksimal K_1 dari suatu graph G artinya suatu subgraph lengkap dari graph G yang memiliki satu vertex tanpa edge, dan tidak termuat dalam subgraph lengkap yang lebih besar. Sedangkan clique maksimal K_2 dari suatu graph G artinya, suatu subgraph lengkap dari graph G yang mempunyai dua vertex yang dihubungkan oleh suatu edge dan tidak termuat dalam subgraph lengkap yang lebih besar.

Dalam graph interval bila tidak bisa ditemukan suatu subgraph lengkap yang hanya terdiri dari satu vertex tanpa edge, dan tidak termuat dalam subgraph lengkap yang lebih besar, pasti bisa di temukan suatu subgraph lengkap yang minimal mempunyai dua vertex yang adjacent. Bila dalam graph interval tersebut subgraph pertama bisa ditemukan maka graph interval tersebut memiliki clique maksimal K_1. Untuk subgraph yang kedua, bila subgraph tersebut tidak termuat dalam subgraph lengkap yang lebih besar maka graph interval akan memiliki clique maksimal K_2, akan tetapi bila subgraph tersebut termuat dalam subgraph lengkap yang lebih besar, maka subgraph lengkap yang terbesar yang memuat subgraph tersebut merupakan clique maksimalnya.

Setiap graph interval adalah graph kompatibelitas tetapi setiap graph kompatibelitas belum tentu merupakan graph interval.

G = (V,E) adalah graph interval jika dan hanya jika terdapat suatu penetapan J dari suatu interval riil J(u) untuk setiap $u \in V$ sehingga untuk semua $u \neq \nu \in V$, $\{u,\nu\} \in E \Leftrightarrow J(u) \cap J(\nu) \neq 0$. Jadi edge akan terjadi apabila dua buah vertex (yang merupakan suatu interval dalam garis riil), terdapat anggota yang sama. G adalah graph kompatibelitas apabila V(G), merupakan himpunan obyek-obyek dan E(G) adalah merupakan himpunan pasangan-pasangan obyek yang kompatibel (sesuai menurut suatu sarat tertentu). Jadi dalam graph interval obyek-obyeknya adalah interval-interval, dan interval yang kompatibel adalah interval yang memiliki anggota yang sama. Untuk menjelaskan setiap graph kompatibelitas belum tentu graph interval, kita lihat contoh graph kompatibelitas pada perempatan jalan pada Gambar 1.1.Kalau alokasi waktu tiap phase disajikan dalam bentuk interval maka akan didapat ilustrasi sebagai berikut :



Dari ilustrasi di atas maka dapat kita lihat vertex 3 adjacent dengan vertex 5, tetapi dalam ilustrasi tersebut vertex 3 dan 5 tidak overlap. Padahal dalam graph interval setiap vertex adjacent penetapan interval dalam garis riil adalah overlap. Sehingga dapat dibuktikan bahwa setiap graph kompatibelitas belum tentu merupakan graph interval.