BAB II

PENAKSIRAN PARAMETER

2.1. Penaksir.

Dengan statistika kita berusaha untuk menyimpulkan populasi. Untuk ini sifat populasi dipelajari berdasarkan data yang diambil baik secara sampling ataupun sensus.

Dalam kenyataannya mengingat berbagai faktor, untuk keperluan tersebut diambil suatu sampel yang representatif, lalu berdasarkan pada hasil analisa terhadap data sampel, kesimpulan mengenai populasi dibuat. Sifat populasi yang akan ditinjau disini adalah mengenai parameter populasi, dan sampel yang digunakan adalah sampel acak. Data sampel dianalisa, nilai-nilai yang perlu yaitu statistik, dihitung dan dari nilai-nilai statistik ini disimpulkan bagaimana sifat parameter. Cara pengambilan kesimpulan tentang parameter yang akan dibahas adalah sehubungan dengan cara-cara menaksir harga parameter. Jadi harga parameter yang sebenarnya, tetapi tak diketahui akan ditaksir berdasarkan statistik sampel yang diambil dari populasi yang bersangkutan.

Taksiran ini dapat berupa taksiran titik atau dapat berupa taksiran selang.

Yang akan dibahas disini adalah taksiran titik, dan statistik yang digunakan untuk memperoleh taksiran titik ini disebut penaksir.

Suatu penaksir pada sebuah parameter populasi adalah nilai tunggal pada sebuah statistik yang berhubungan dengan parameter tersebut. Lebih jelasnya, jika X sebuah variabel random dengan distribusi probabilita f(x), mempunyai parameter θ yang tidak diketahui, dan jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebuah sampel random yang besarnya n dari X, maka statistik $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang berhubungan dengan θ disebut penaksir θ dan dinotasikan $\hat{\theta}$. Penaksir $\hat{\theta}$ adalah sebuah variabel random, karena penaksir tersebut merupakan sebuah fungsi data sampel.

Penaksir yang baik adalah penaksir yang dapat memberikan hasil sedekat mungkin ke parameter yang ditaksirnya. Jadi jelas sangat dikehendaki $\hat{\theta} = \theta$, yaitu bisa menyebutkan harga θ yang sebenarnya. Kenyataan yang bisa terjadi adalah

a. menaksir θ oleh $\hat{\theta}$ terlalu tinggi, atau

b. menaksir θ oleh $\hat{\theta}$ terlalu rendah.

2.2. Kriteria Kebaikan Suatu Penaksir

Kita mengenal beberapa kriteria kebaikan suatu penaksir seperti Konsisten, Tak Bias, dan Mean square Error. Tetapi untuk keperluan pembahasan pada bab selanjutnya, yang akan dibahas di sini adalah kriteria Tak Bias dan Mean Square Error.

2.2.1. Tak Bias (Unbiased)

Definisi 2.2.1

Suatu penaksir titik $\hat{\theta}$ disebut penaksir tak bias untuk θ jika

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Kriteria ini menyatakan bahwa rata-rata semua harga $\hat{\theta}$ yang mungkin akan sama dengan θ.

Sementara itu penaksir yang tidak tak bias disebut penaksir bias. Jika $\hat{\theta}$ adalah penaksir bias untuk θ dan bias dari penaksir dituliskan sebagai $B(\hat{\theta})$ maka

$$E[\hat{\theta}] = \theta + B(\hat{\theta})$$

Sehingga bias penaksir

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

$$= E[\hat{\theta} - \theta]$$

Contoh 2.2.1

Misal X berdistribusi Uniform dalam interval $(0,\theta)$ dengan fungsi densitas

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , 0 < x < \theta \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ merupakan penaksir bias untuk θ.

$$E[X] = \int_0^\theta x\, f(x|\theta)\, dx = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\emptyset}^{\theta} = \frac{\theta}{2}$$

maka

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\, n\, \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\theta}{2}$$

$$E[X] = \theta - \frac{\theta}{2}$$

Terlihat biasnya adalah $B(\hat{\theta}) = -\frac{\theta}{2}$

Definisi 2.2.2

Penaksir yang memberikan variansi yang paling kecil dibandingkan semua penaksir yang mungkin, disebut penaksir yang paling efisien.

Maksudnya adalah jika $\hat{\theta}$ suatu penaksir untuk θ atas sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan $\hat{\theta}_i$ adalah penaksir untuk θ selain $\hat{\theta}$, maka $\hat{\theta}$ disebut sebagai penaksir yang paling efisien jika $Var(\hat{\theta}) \le Var(\hat{\theta}_i)$.

Definisi 2.2.3

Penaksir yang tak bias dan bervariansi minimum disebut penaksir terbaik.

Suatu penaksir bervariansi minimum jika memenuhi ketaksamaan batas terendah Cramer-Rao atau disebut juga CRLB (singkatan dari Cramer-Rao Lower Bound).

Lebih jelasnya jika $\hat{\theta}$ penaksir $g(\theta)$ yang didasarkan atas sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan densitas $f(X|\theta)$ maka

Var($\hat{\theta}$) akan minimum jika

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{[g^{\prime}(\theta)]^2}{n\, E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\, \ln f(X|\theta)\right]^2}$$

Jika $\hat{\theta}$ penaksir tak bias untuk θ maka $g(\theta) = \theta$ dan

$g^{\prime}(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\, g(\theta) = 1$.

Sehingga $\hat{\theta}$ disebut penaksir terbaik untuk θ jika

1. $E[\hat{\theta}] = \theta$ dan

2. $$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n\, E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\, \ln f(X|\theta)\right]^2}$$

Penaksir terbaik disebut juga BUE (singkatan dari Best Unbiased Estimator) atau UMVUE (singkatan dari Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator).

2.2.2. Mean Square Error (MSE)

Definisi 2.2.4

Jika $\hat{\theta}$ adalah suatu penaksir untuk θ yang didasarkan atas sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ maka Mean Square Error didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{MSE}\ (\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

atau jika dituliskan dalam bentuk lain

$$\mathrm{MSE}\ (\hat{\theta}) = E\left[[\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta\ ]^2\right]$$

$$= E\left[[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + 2\,[(\hat{\theta})-E(\hat{\theta})]\,[E(\hat{\theta})-\theta] + [E(\hat{\theta}) - \theta\,]^2\right]$$

$$= E\,[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + 2\,[E(\hat{\theta})-E(\hat{\theta})]\,[E(\hat{\theta})-\theta] + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2$$

$$= E\,[\,\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\,]^2 + [E(\hat{\theta}-\theta)]^2$$

$$= Var(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2$$

Jadi Mean Square Error atau Rata-rata Error Kuadrat sama dengan varian ditambah bias kuadrat. Jika $\hat{\theta}$ adalah sebuah penaksir yang tak bias, maka Rata-rata Eror Kuadrat sama dengan variansinya.

Mean Square Error merupakan suatu kriteria yang penting untuk perbandingan dua buah penaksir. Misalkan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ adalah dua buah penaksir untuk θ atas sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan misalkan $MSE(\hat{\theta}_1)$ dan $MSE(\hat{\theta}_2)$ berturut-turut MSE dari $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ maka efisiensi relatif $\hat{\theta}_1$ terhadap $\hat{\theta}_2$ didefinisikan sebagai berikut:

$$er(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1) = \frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)}$$

atau jika $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ keduanya merupakan penaksir yang tak bias maka

$$er(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1) = \frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

Jika efisiensi relatif $er(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1)$ lebih kecil dari satu dapat disimpulkan bahwa $\hat{\theta}_1$ adalah sebuah penaksir yang lebih efisien untuk θ dibandingkan $\hat{\theta}_2$, dalam arti bahwa penaksir $\hat{\theta}_1$ mempunyai rata-rata error kuadrat yang lebih kecil dibandingkan $\hat{\theta}_2$, atau jika $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ keduanya penaksir tak bias maka penaksir $\hat{\theta}_1$ mempunyai variansi yang lebih kecil dibandingkan $\hat{\theta}_2$.

Sementara itu, suatu penaksir $\hat{\theta}^*$ yang mempunyai rata-rata error kuadrat kurang dari atau sama dengan rata-rata error kuadrat pada beberapa penaksir lainnya, untuk seluruh nilai parameter θ disebut penaksir optimal θ.

Sebagai contoh, misalkan kita ingin memperkirakan rata-rata μ sebuah populasi. Kita mempunyai sebuah sampel random n observasi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan kita ingin membandingkan dua penaksir yang mungkin untuk μ, yaitu rata-rata sampel $\bar{X}$ dan sebuah observasi tunggal X_i dari sampel tersebut.

$E(X_i) = \mu$ untuk semua $i=1,2,\ldots,n$ dan

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$
$$= \mu$$

Ternyata X_i dan $\bar{X}$ keduanya penaksir tak bias untuk μ, konsekuensinya rata-rata error kuadrat kedua penaksir adalah variansinya sendiri.

$$MSE(X_i) = Var(X_i) = \sigma^2$$

$$MSE(\bar{X}) = Var(\bar{X})$$
$$= Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n\, \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

Selanjutnya efisiensi relatif $\overline{X}$ terhadap X_i adalah

$$er(X_i, \overline{X}) = \frac{\mathrm{Var}(\overline{X})}{\mathrm{Var}(X_i)} = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2} = \frac{1}{n}$$

Karena $(1/n) < 1$ untuk sampel yang besarnya $n \geq 2$, kita dapat menyimpulkan bahwa rata-rata sampel $\overline{X}$ adalah penaksir yang lebih baik untuk μ daripada observasi tunggal X_i.

2.3. Metode Penaksiran

Kita mengenal beberapa metode untuk menaksir suatu parameter, seperti metode Momen, metode Maksimum Likelihood dan lainnya.

Yang akan dibahas disini adalah metode Maksimum Likelihood.

2.3.1. Metode Maksimum Likelihood

Metode Maksimum Likelihood merupakan metode yang paling populer untuk mencari penaksir parameter.

Definisi 2.3.1

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random independen dari populasi dengan densitas $f(x|\theta)$, maka fungsi Likelihood didefinisikan

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

Penaksir Maksimum Likelihood atau disebut MLE (singkatan dari Maximum Likelihood Estimator) dari θ yang dicari adalah nilai $\hat{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi Likelihood $L(\theta)$.
Jadi jika $L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ maka nilai $\hat{\theta}$ yang dicari harus memenuhi

$$f(x_1, \ldots, x_n|\hat{\theta}) = \max f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$$

Bila fungsi Likelihood didifferensialkan ke θ_i, $\frac{\partial}{\partial\theta_i} L(\theta)$, maka calon MLE yang mungkin adalah penaksir yang memenuhi

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} L(\theta) = 0$$

Dari persamaan ini akan diperoleh penaksir untuk θ_i selanjutnya untuk menunjukkan bahwa penaksir yang diperoleh adalah MLE untuk θ_i maka dicek dengan turunan kedua yaitu

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} L(\theta) < 0$$

Harga-harga θ yang memaksimumkan $L(\theta)$, juga akan memaksimumkan logaritma Likelihood, $\ln L(\theta)$, tetapi karena fungsi logaritma Likelihood monoton naik, maka digunakan turunan pertama

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} \ln L(\theta) = 0$$

dan bentuk Persamaan Likelihood :

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}_i} \ln L(\hat{\theta}) = 0$$

Selanjutnya dengan menyelesaikan Persamaan Likelihood akan diperoleh penaksir maksimum Likelihood untuk θ_i yaitu $\hat{\theta}_i$.

Contoh 2.3.1

Misalkan X variabel random dari distribusi Bernoulli.

Fungsi probabilitasnya adalah :

$$f(x|p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{untuk } x=0,1 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

p adalah parameter yang akan ditaksir.

Fungsi Likelihood sebuah sampel yang besarnya n

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\Sigma x_i} (1-p)^{n-\Sigma x_i}$$

Logaritma Likelihood

$$ln\ L(p) = ln \left[p^{\Sigma x_i} (1-p)^{n-\Sigma x_i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \ ln\ p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) ln\ (1-p)$$

Maka

$$\frac{\partial}{\partial p} ln\ L(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)}{(1-p)}$$

Untuk mencari penaksir maksimum Likelihood maka harus dipenuhi $\frac{\partial}{\partial \hat{p}} ln\ L(\hat{p}) = 0$ yang disebut sebagai Persamaan Likelihood.

$$0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)}{(1-\hat{p})}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} = \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)}{(1-\hat{p})}$$

$$\hat{p} \left[n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right] = (1-\hat{p}) \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n\hat{p} - \hat{p} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{p} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Jadi penaksir maksimum Likelihood untuk p adalah

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$