BAB II
TEORI DASAR

2.1. MODEL REGRESI LINIER

Suatu model yang menganalisa hubungan antara dua variabel disebut model regresi linier sederhana. Analisa tersebut membutuhkan data yang terdiri dari dua kelompok hasil pengamatan, sehingga menghasilkan pasangan pengamatan sebanyak n yang dinyatakan sebagai pasangan terurut (x_i, y_i), dimana $i = 1,2,3,\ldots\ldots n$.

Model regresi linier sederhana dapat ditulis sebagai berikut :

$$y = x\,\beta + \varepsilon \qquad \ldots.(2.1)$$

dimana;

- y adalah variabel tak bebas
- x adalah variabel bebas
- β adalah parameter yang akan ditaksir
- ε adalah kesalahan random

Dan variabel tak bebas y secara umum dapat dihubungkan dengan p variabel regresor, sehingga diperoleh :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots. + \beta_p x_p + \varepsilon \qquad \ldots(2.2)$$

Model inidisebut model regresi ganda dengan p regressor. Atau dengan kata lain model regresi linier ganda adalah suatu model yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.

Untuk menaksir koefisien regresi pada (2.2) digunakan metode kuadrat terkecil. Dianggap bahwa ada n pengamatan (n>p) dan diambil y_i adalah variabel tak bebas ke-i dan x_{ij}

adalah variabel bebas ke-j, maka (2.2) dapat ditulis sebagai :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots\ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \ , \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n \ \ldots\ldots(2.3)$$

Persamaan - persamaan di atas disebut persamaan linier, karena $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_p$ adalah parameter-parameter yang tidak diketahui, fungsinya adalah linier. Parameter β_j , $j = 0,1,2,\ldots\ldots, p$ disebut koefisien regresi, yang menyatakan perubahan variabel tak bebas y, jika x_j berubah untuk x_i $(i \neq j)$ dianggap konstan.

Diasumsikan bahwa

$$E\ (\varepsilon_i) = 0$$

$$Var\ (\varepsilon_i) = E\ (\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$

$$Cov\ (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad , i \neq j$$

Sesuai dengan (2.3) maka :

$$\varepsilon_i = y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} \qquad \text{sehingga}$$

$$\varepsilon_i^2 = \left[y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} \right]^2$$

Fungsi kuadrat terkecilnya, adalah

$$S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_p) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \beta_0 - \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ij} \right]^2 \quad \ldots(2.4)$$

Fungsi S diminimumkan pada β_0, $\beta_1, \ldots\ldots\ldots, \beta_p$

Estimator kuadrat terkecil dari $\beta_0, \beta_1, \ldots\ldots, \beta_p$ harus memenuhi

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \beta_0}\right|_{\hat\beta_0,\hat\beta_1,\hat\beta_2,\ldots,\hat\beta_p} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat\beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\hat\beta_j x_{ij}\right) = 0 \quad ..(2.4a)$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \beta_j}\right|_{\hat\beta_0,\hat\beta_1,\hat\beta_2,\ldots,\hat\beta_p} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat\beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\hat\beta_j x_{ij}\right) x_{ij} = 0 \quad .(2.4b)$$

Persamaan normal kuadrat terkecil :

$$n\hat\beta_0 + \hat\beta_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat\beta_2\sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \ldots + \hat\beta_p\sum_{i=1}^{n} x_{ip} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\hat\beta_0\sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat\beta_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \hat\beta_2\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} + \ldots + \hat\beta_p\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ip} = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i$$

$$\vdots$$

$$\hat\beta_0\sum_{i=1}^{n} x_{ip} + \hat\beta_1\sum_{i=1}^{n} x_{ip}x_{i1} + \hat\beta_2\sum_{i=1}^{n} x_{ip}x_{i2} + \ldots + \hat\beta_p\sum_{i=1}^{n} x_{ip}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ip}y_i$$

$$\ldots\ldots(2.5)$$

Solusi untuk k = p + 1 persamaan-persamaan normal di atas adalah merupakan taksiran kuadrat terkecil untuk $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, yaitu $\hat\beta_0, \hat\beta_1, \hat\beta_2, \ldots\ldots, \hat\beta_p$

Untuk lebih mudahnya, model regresi ganda dinyatakan dalam bentuk matrik. Hal ini memberikan gambaran yang tepat dari model, data dan hasil.

Dari persamaan (2.5), maka model pengamatan (2.3) dapat ditulis dalam notasi matrik sebagai :

$$\bar{Y} = \underset{\sim}{X} \, \bar{\beta} + \bar{\varepsilon} \qquad \text{.....(2.6)}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \qquad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Secara umum : $\bar{Y}$ adalah vektor berukuran (n x 1) dari pengamatan

$\underset{\sim}{X}$ matrik berukuran (n x k) dari tingkat variabel regressor

$\bar{\beta}$ vektor berukuran (k x 1) dari koefisien regresi

$\bar{\varepsilon}$ vektor berukuran (n x 1) dari kesalahan random

Selanjutnya akan dicari suatu vektor estimator-estimator kuadrat terkecil, $\hat{\beta}$, dengan meminimumkan :

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}$$

$$= (\bar{Y} - \underset{\sim}{X} \, \bar{\beta})^T \; (\bar{Y} - \underset{\sim}{X} \, \bar{\beta})$$

$$= \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T \underset{\sim}{X} \bar{\beta} + \bar{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X} \bar{\beta}$$
$$= \bar{Y}^T\bar{Y} - 2\, \bar{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \bar{Y} + \bar{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X} \bar{\beta}$$

Karena $\bar{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \bar{Y}$ adalah matrik berukuran (1 x 1), atau suatu skalar, dan tranposnya $(\bar{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \bar{Y})^T = \bar{Y}^T \underset{\sim}{X} \bar{\beta}$ adalah juga suatu skalar yang sama.

Estimator kuadrat terkecil harus memenuhi :

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \bar{\beta}}\right|_{\hat{\bar{\beta}}} = -2 \underset{\sim}{X}^T \bar{Y} + 2 \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X} \hat{\bar{\beta}} = 0$$

Sehingga :

$$\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X} \hat{\bar{\beta}} = \underset{\sim}{X}^T \bar{Y} \quad \ldots.(2.7)$$

Persamaan (2.7) adalah persamaan normal kuadrat terkecil. Persamaan ini identik dengan persamaan (2.5). Untuk penyelesaiannya maka kedua sisi dari (2.7) digandakan dengan invers dari $\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}$. Maka estimator kuadrat terkecil untuk $\bar{\beta}$ adalah :

$$\hat{\bar{\beta}} = (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T \bar{Y} \quad \ldots(2.8)$$

dan ini menunjukkan bahwa $(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1}$ harus ada. Matrik $(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1}$ ini selalu ada jika variabel-variabel bebasnya adalah bebas linier, yaitu jika tidak ada suatu kolom dalam $\underset{\sim}{X}$ yang merupakan kombinasi linier dari kolom-kolom yang lain.

Definisi :

Suatu vektor $\bar{X}$ dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n\}$ sedemikian sehingga

$\bar{X} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_n u_n$

Mudah dimengerti bahwa bentuk matrik dari persamaan normal (2.7) adalah identik dengan bentuk skalar (2.5). Secara detail persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma\, x_{i1} & \Sigma\, x_{i2} \cdots\cdots & \Sigma\, x_{ip} \\ \Sigma\, x_{i1} & \Sigma\, x_{i1} & \Sigma\, x_{i1} x_{i2} \cdots\cdots & \Sigma x_{i1} x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma\, x_{ip} & \Sigma\, x_{ip} x_{i1} & \Sigma\, x_{ip} x_{i2} \cdots\cdots & \Sigma\, x_{ip}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ip} y_i \end{bmatrix} \quad \ldots.(2.8a)$$

Jika perkalian matrik di atas dijalankan, maka bentuk skalar dari persamaan normal (2.5) diperoleh. Dalam display ini terlihat bahwa $\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}$ adalah suatu matrik simetri berukuran (k x k) dan $\underset{\sim}{X}^T \bar{Y}$ adalah suatu vektor kolom berukuran (k x 1). Struktur khusus dari matrik $\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}$ adalah jumlah kuadrat dari elemen-elemen dalam kolom $\underset{\sim}{X}$, dan elemen- elemen di luar diagonal adalah jumlah cross-product dari kolom-kolom $\underset{\sim}{X}$.

Model regresi yang cocok sehubungan dengan variabel bebas $x_i^T = [\ 1 \quad x_1 \quad x_2 \ \ldots x_p\ ]$ adalah :

$$\hat{y}_i = x_i^T \ \hat{\beta}$$

$$= \hat{\beta}_0 + \sum_{j=i}^{n} \hat{\beta}_j \ x_j$$

Vektor dari nilai yang cocok $\hat{y}_i$ sehubungan dengan nilai pengamatan y_i adalah :

$$\hat{\bar{Y}} = \underset{\sim}{X} \ \hat{\bar{\beta}}$$

$$= \underset{\sim}{X} \ (\underset{\sim}{X}^T \ \underset{\sim}{X})^{-1} \ \underset{\sim}{X}^T \ \bar{Y}$$

$$\hat{\bar{Y}} = \underset{\sim}{P}\,\bar{Y} \qquad .....(2.9)$$

Matrik $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T$ yang berukuran (n x n) disebut matrik prediksi, karena matrik tersebut memetakan vektor nilai pengamatan y_i menjadi vektor nilai yang cocok $\hat{y}_i$.

Residual, dinotasikan dengan e_i , adalah merupakan selisih antara nilai pengamatan y_i dengan nilai yang cocok $\hat{y}_i$, dimana $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

Sehingga residual dapat ditulis dalam notasi matrik sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \bar{Y} - \hat{\bar{Y}} \\ &= \bar{Y} - \underset{\sim}{X}\hat{\beta} \\ &= \bar{Y} - \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\bar{Y} \\ &= \bar{Y} - \underset{\sim}{P}\,\bar{Y} \\ &= (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})\,\bar{Y} \end{aligned}$$

2.2. ASUMSI DASAR

Hasil dari metode kuadrat terkecil harus berdasarkan pada asumsi-asumsi berikut :

1. Asumsi kelinieran

Asumsi ini secara implisit pada model (2.1), yaitu setiap nilai y_i dapat ditulis sebagai fungsi linier baris ke- i dari X, ditulis x_i^T

$$y_i = x_i^T\beta + \varepsilon_i \qquad , i = 1,2, ..., n$$

2. Asumsi Perhitungan

Untuk mendapatkan taksiran $\tilde{\beta}$ yang tunggal, $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}$ harus ada, atau ekivalen dengan rank $(\underset{\sim}{X}) = k$

3. Asumsi distribusi

Analisa statistik yang berdasarkan pada metode kuadrat terkecil (misal uji-t, uji-F) mengasumsikan bahwa :

a. $\underset{\sim}{X}$ diukur tanpa kesalahan

b. ε_i tidak tergantung pada x_i^T , $i = 1,2,\ldots,n$

c. $\varepsilon \sim N_n \; (0, \sigma^2 \underset{\sim}{I})$

4. Asumsi Implisit

Seluruh pengamatan dapat dipercaya dan mempunyai ketentuan yang sama dalam menentukan hasil metode kuadrat terkecil dan pengaruhnya.

Jika asumsi-asumsi di atas dipenuhi, maka teori kuadrat terkecil memberikan hasil-hasil sebagai berikut :

1. Vektor $\hat{\beta}$ berukuran (k x 1) mempunyai sifat-sifat :

a. $E\,(\hat{\bar{\beta}}) = \bar{\beta}$

$\hat{\bar{\beta}}$, adalah estimator tak bias dari $\bar{\beta}$

b. $\hat{\bar{\beta}}$ adalah estimator tak bias linier terbaik untuk $\bar{\beta}$, yang berarti bahwa diantara kelas estimator tak bias linier, $\hat{\bar{\beta}}$ mempunyai variansi terkecil. Variansi untuk $\hat{\bar{\beta}}$ adalah :

$$\mathrm{Var}\,(\hat{\bar{\beta}}) = \sigma^2\,(\underset{\sim}{X}^T\,\underset{\sim}{X})^{-1}, \qquad \ldots.(2.10)$$

c. $\hat{\bar{\beta}} \sim N_k\,(\bar{\beta}, \sigma^2\,(\underset{\sim}{X}^T\,\underset{\sim}{X})^{-1})$

dimana $N_k\;(\mu\,, \Sigma)$ adalah suatu distribusi normal multivariat dengan rata-rata μ, suatu vektor berukuran (k x 1), dan variansi Σ

suatu matrik berukuran (k x k).

2. Nilai vektor prediksi $\hat{Y}$ berukuran (n x 1) adalah :

$$\hat{Y} = \underset{\sim}{X}\,\hat{\beta} = \underset{\sim}{X}\,(\underset{\sim}{X}^T\,\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T\,\bar{Y} \quad = \underset{\sim}{P}\bar{Y} \qquad \text{....(2.11)}$$

mempunyai sifat-sifat :

a. $E\,(\hat{Y}) = \underset{\sim}{X}\bar{\beta}$ ...(2.11.a)

b. $Var\,(\hat{Y}) = \sigma^2\,\underset{\sim}{P}$ ...(2.11.b)

c. $\hat{Y} \sim N_n\,(\underset{\sim}{X}\bar{\beta}\,,\ \sigma^2\,\underset{\sim}{P})$ ...(2.11.c)

3. Vektor berukuran (n x 1) dari residual :

$$\bar{e} = \bar{Y} - \hat{Y} \ = \bar{Y} - \underset{\sim}{P}\bar{Y} = \ (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})\ \bar{Y} \qquad \text{...(2.12)}$$

mempunyai sifat-sifat :

a. $E\,(\bar{e}) = 0$ ...(2.12.a)

b. $Var\,(\bar{e}) = \sigma^2\ (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})$ ...(2.12.b)

c. $\bar{e} \sim N_n\ (0,\sigma^2\ (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}))$ ...(2.12.c)

4. Suatu estimator tak bias dari σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\bar{e}^T\,\bar{e}}{n-k} = \frac{\bar{Y}^T(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P})\bar{Y}}{n-k} \qquad \text{....(2.13)}$$

dimana $\bar{e}^T\bar{e}$ adalah jumlah kuadrat residual.

2.3. MATRIK PREDIKSI

Model regresi linier umum adalah

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \text{....(2.14)}$$

dengan asumsi-asumsi pada sub bab (2.2) dan dari estimasi kuadrat terkecil yang sudah dibahas sebelumnya bahwa matrik

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}\ (\underset{\sim}{X}^T\ \underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T \qquad \text{.....(2.15)}$$

menentukan beberapa standart hasil kuadrat terkecil.

Matrik $\underset{\sim}{P}$ mempunyai peranan yang penting pada analisa regresi linier dan memiliki sifat-sifat penting yang digunakan untuk memperoleh beberapa hasil pada pembahasan tentang pendeteksian pengamatan berpengaruh. Matrik $\underset{\sim}{P}$ disebut matrik prediksi karena matrik tersebut jika dikalikan dengan $\bar{Y}$ menghasilkan nilai prediksi untuk $\bar{Y}$, yaitu $\hat{\bar{Y}}$.

Elemen-elemen dari matrik $\underset{\sim}{P}$ adalah

$$p_{ij} = x_i^T(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}x_j \quad , \ i,j=1,2,\ldots n \quad \ldots(2.15a)$$

$$p_{ii} = x_i^T(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}x_i \quad , \ i,j=1,2,\ldots n \quad \ldots(2.15b)$$

dimana

p_{ij} = elemen ke-ij matrik $\underset{\sim}{P}$

p_{ii} = elemen diagonal ke-i dari matrik $\underset{\sim}{P}$

x_i^T = baris ke-i dari matrik $\underset{\sim}{X}$

x_j = kolom ke-j dari matrik $\underset{\sim}{X}$

Sifat-sifat matrik prediksi :

Sifat 2.1.

Matrik $\underset{\sim}{P}$ dan $(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P})$ adalah simetri dan idempoten (suatu matrik P dikatakan simetri bila $\underset{\sim}{P}^T = \underset{\sim}{P}$ dan $\underset{\sim}{P}$ dikatakan idempoten bila $\underset{\sim}{P}.\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}^2 = \underset{\sim}{P}$)

Bukti :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{P}^T &= \left[\underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T \right]^T \\ &= \underset{\sim}{X} \left[(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \right] \underset{\sim}{X}^T \\ &= \underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T \\ &= \underset{\sim}{P} \end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{P}.\underset{\sim}{P} = \left[\underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T \right] \left[\underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T \right]$$

$$= \underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{I} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T$$

$$= \underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T$$

$$= \underset{\sim}{P}$$

$$(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P})^T = (\underset{\sim}{I}^T - \underset{\sim}{P}^T)$$

$$= \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}$$

$$(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P})(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}) = \underset{\sim}{I}.\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{I}.\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P}.\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}.\underset{\sim}{P}$$

$$= \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{P}$$

$$= \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}$$

Sifat 2.2 :

Ambil matrik $\underset{\sim}{X}$ berukuran (n x k), maka trace $[\underset{\sim}{P}]$ = rank $[\underset{\sim}{P}]$ = k

$\underset{\sim}{X}$ berukuran (n x k), maka berdasarkan asumsi yang ke dua yaitu asumsi perhitungan maka rank $(\underset{\sim}{X})$ = k. Maka $\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}$ adalah matrik yang berukuran (k x k), dan $\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}$ adalah matriknon singular. Jadi rank $(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})$ = k , demikian juga rank $[\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}]^{-1}$=k . Jadi rank [P] =

rank $[\underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T]$ = rank $[\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}]^{-1}$ = k

Trace $(\underset{\sim}{P})$ = trace $(\underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T)$,

dari sifat trace (AC) = trace (CA) maka

Trace $(\underset{\sim}{P})$ = trace $(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1})$

Trace $(\underset{\sim}{P})$ = trace I_k

Trace $(\underset{\sim}{P})$ = k = rank $(\underset{\sim}{P})$

Lemma 2.1.

Invers suatu matrik terpartisi

Ambil $\mathbf{A}$ matrik partisi sbb :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

(a) Jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{A}_{11}$ adalah non singular, maka

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\ \mathbf{A}_{12}\ \mathbf{M}\ \mathbf{A}_{21}\ \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\ \mathbf{A}_{12}\ \mathbf{M} \\ -\mathbf{M}\ \mathbf{A}_{21}\ \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.16a)$$

dimana $\mathbf{M} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\ \mathbf{A}_{11}^{-1}\ \mathbf{A}_{12})^{-1}$

(b) Jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{A}_{22}$ adalah non singular, maka

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & -\mathbf{N}\ \mathbf{A}_{12}\ \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\ \mathbf{A}_{21}^{-1}\ \mathbf{N} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\ \mathbf{A}_{21}\ \mathbf{N}\ \mathbf{A}_{12}\ \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.16b)$$

dimana $\mathbf{N} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\ \mathbf{A}_{22}^{-1}\ \mathbf{A}_{21})^{-1}$

Bukti :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{12}^{-1} \\ \mathbf{A}_{21}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{11}$ non singular, dibuktikan $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{A}_{11}\ \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}^{-1} = \mathbf{I} \quad \ldots\ldots. (1)$$

$$\mathbf{A}_{11}\ \mathbf{A}_{12}^{-1} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots. (2)$$

$$\mathbf{A}_{21}^{-1}\ \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots. (3)$$

$$\mathbf{A}_{21}^{-1}\ \mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I} \quad \ldots\ldots. (4)$$

Misalkan $\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} = \underset{\sim}{M}$, maka dari persamaan (2) diperoleh

$$\underset{\sim}{A}_{12}^{-1} = -\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12}\ \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} = -\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12}\ \underset{\sim}{M}$$

dari persamaan (3) diperoleh :

$$\underset{\sim}{A}_{21}^{-1} = -\underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} = -\ \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}$$

dari persamaan (1) diperoleh :

$$\underset{\sim}{A}_{11}^{-1} = \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} - \underset{\sim}{A}_{12}\ \underset{\sim}{A}_{21}^{-1} = \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} - \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12}(-\underset{\sim}{M}\ (\underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}))$$

$$\underset{\sim}{A}_{11}^{-1} = \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} + (\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12})\ \underset{\sim}{M}\ (\underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1})$$

Substitusi ke persamaan (4) diperoleh :

$$-\ \underset{\sim}{M}\ (\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1})\ \underset{\sim}{A}_{12} + \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{A}_{22} = \underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{M}\ (\ \underset{\sim}{A}_{22} - (\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ )\ \underset{\sim}{A}_{12}\ ) = \underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{M} = (\ \underset{\sim}{A}_{22} - (\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ )\ \underset{\sim}{A}_{12})^{-1}$$

terbukti $\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} + (\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12})\ \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} & -\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12}\ \underset{\sim}{M} \\ -\ \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}$

dan $\underset{\sim}{M} = (\underset{\sim}{A}_{22} - \underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12})^{-1}$

(b) $\underset{\sim}{A}_{22}$ non singular,

$$\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{11} + \underset{\sim}{A}_{12}^{-1}A_{21} = \underset{\sim}{I} \quad \text{.........} \quad (5)$$

$$\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\ \underset{\sim}{A}_{12} + \underset{\sim}{A}_{12}^{-1}\underset{\sim}{A}_{22} = \underset{\sim}{0} \quad \text{.........} \quad (6)$$

$$\underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{11}^{-1} + \underset{\sim}{A}_{22}\underset{\sim}{A}_{21}^{-1} = \underset{\sim}{0} \quad \text{.........} \quad (7)$$

$$\underset{\sim}{A}_{21}\ \underset{\sim}{A}_{12}^{-1} + \underset{\sim}{A}_{22}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} = \underset{\sim}{I} \quad \text{.........} \quad (8)$$

dimisalkan $\underset{\sim}{A}_{11}^{-1} = \underset{\sim}{N}$

dari persamaan (6) diperoleh :

$$\underset{\sim}{A}_{12}^{-1} = -\ \underset{\sim}{N}\ A_{12}\ \underset{\sim}{A}_{22}^{-1}$$

dari persamaan (7) diperoleh :

$$\underset{\sim}{A}_{21}^{-1} = - \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21} \underset{\sim}{N}$$

dari persamaan (8) diperoleh :

$$\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} = \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} - \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21} \underset{\sim}{A}_{12}^{-1}$$

$$\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} = \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} - \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21} (-\underset{\sim}{N} \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1})$$

$$\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} = \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} + \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1}$$

Substitusi ke persamaan (5) diperoleh :

$$\underset{\sim}{N} \underset{\sim}{A}_{11} + (- \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1}) \underset{\sim}{A}_{21} = \underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{N} (\underset{\sim}{A}_{11} - \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21}) = \underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{N} = (\underset{\sim}{A}_{11} - \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21})^{-1}$$

Terbukti $\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} & - \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \\ - \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21} \underset{\sim}{N} & \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} + \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

dimana $\underset{\sim}{N} = (\underset{\sim}{A}_{11} - \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \underset{\sim}{A}_{21})^{-1}$

Sifat 2.3

Diketahui $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{X}_1 : \underset{\sim}{X}_2)$ dimana

$\underset{\sim}{X}_1$ matrik berukuran (n x r) dengan rank $(\underset{\sim}{X}_1) = r$

$\underset{\sim}{X}_2$ matrik berukuran (n x (k-r)) dengan rank $(\underset{\sim}{X}_2) = k-r$

Ambil $\underset{\sim}{P}_1 = \underset{\sim}{X}_1 (\underset{\sim}{X}_1^T \underset{\sim}{X}_1)^{-1} \underset{\sim}{X}_1^T$ matrik prediksi untuk $\underset{\sim}{X}_1$,

$\underset{\sim}{W} = (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1) \underset{\sim}{X}_2$ proyeksi dari $\underset{\sim}{X}_2$ pada komplemen ortogonal $\underset{\sim}{X}_1$

dan $\underset{\sim}{P}_2 = \underset{\sim}{W} (\underset{\sim}{W}^T \underset{\sim}{W})^{-1} \underset{\sim}{W}^T$ adalah matrik prediksi untuk $\underset{\sim}{W}$

Maka matrik prediksi $\underset{\sim}{P}$, dapat ditulis sebagai :

$$\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T = \underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T + (\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2(\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2)^{1}\underset{\sim}{X}_2^T(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_1) \quad \ldots (2.17)$$

atau $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_2$ ... (2.17a)

Bukti :

Diketahui $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{X}_1 : \underset{\sim}{X}_2)$ maka $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 & \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1^T \underset{\sim}{X}_1 & \underset{\sim}{X}_1^T \underset{\sim}{X}_2 \\ \underset{\sim}{X}_2^T \underset{\sim}{X}_1 & \underset{\sim}{X}_2^T \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1^T \\ \underset{\sim}{X}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Dengan menggunakan (2.16.a) untuk menghitung invers dari $(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})$ dalam bentuk dipartisikan, didapat :

$$(\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1} + (\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1} & -(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1}\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M} \\ -\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T\underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T\underset{\sim}{X}_1)^{-1} & \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}$$

... (2.18.a)

dengan
$$\begin{aligned} \underset{\sim}{M} &= \left[\underset{\sim}{X}_2^T \underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{X}_2^T \underset{\sim}{X}_1 (\underset{\sim}{X}_1^T \underset{\sim}{X}_1)^{-1} \underset{\sim}{X}_1^T \underset{\sim}{X}_2\right]^{-1} \\ &= \left[\underset{\sim}{X}_2^T (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{X}_1(\underset{\sim}{X}_1^T \underset{\sim}{X}_1)^{-1} \underset{\sim}{X}_1^T)\underset{\sim}{X}_2\right]^{-1} \\ &= \left[\underset{\sim}{X}_2^T (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1)\underset{\sim}{X}_2\right]^{-1} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan (2.18.a) ke dalam (2.18), diperoleh

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{P} &= \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_1\underset{\sim}{X}_2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_2^T \underset{\sim}{P}_1 - \underset{\sim}{P}_1 \underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_2^T - \underset{\sim}{X}_2 \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_2^T \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_1^2 \underset{\sim}{X}_2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_2^T - 2\underset{\sim}{P}_1 \underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_2^T + \underset{\sim}{X}_2\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_2^T \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1) \underset{\sim}{X}_2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_2^T (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1) \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1) \underset{\sim}{X}_2 [\underset{\sim}{X}_2^T (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1) \underset{\sim}{X}_2]^{-1} \underset{\sim}{X}_2^T (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}_1) \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{W} (\underset{\sim}{W}^T \underset{\sim}{W})^{-1}\underset{\sim}{W}^T \\ &= \underset{\sim}{P}_1 + \underset{\sim}{P}_2 \end{aligned}$$

Sifat 2.4

Untuk $i = 1,2, \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots\ldots, n$ maka

(a) $0 \le p_{ii} \le 1$, untuk semua i

(b) $-0,5 \le p_{ij} \le 0,5$, untuk semua $j \ne i$

(c) Jika $p_{ii} = 0$ atau 1 maka $p_{ij} = 0$

(d) $$p_{ii} + \frac{e_i^2}{\bar{e}^T \bar{e}} \le 1$$

Bukti :

(a) Dengan menggunakan sifat (2.1), elemen diagonal ke-i dari matrik $\underset{\sim}{P}$ dapat ditulis sebagai :

$$p_{ii} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = p_{ii}^2 + \sum_{j \ne i} p_{ij}^2 \qquad \ldots (2.19a)$$

dari persamaan tersebut maka $0 \le p_{ii} \le 1$, untuk semua i.

b) Persamaan (2.19a) dapat juga ditulis sebagai :

$$p_{ii} = p_{ii}^2 + p_{ij}^2 + \sum_{r \ne i,j} p_{ir}^2 \qquad \ldots (2.19b)$$

dari persamaan ini diperoleh $p_{ij}^2 \le p_{ii}(1 - p_{ii})$,

atau

$$-\sqrt{p_{ii}(1-p_{ii})} \le p_{ij} \le \sqrt{p_{ii}(1-p_{ii})}$$

dan karena $0 \le p_{ii} \le 1$ maka didapat $-0,5 \le p_{ij} \le 0,5$

(C) Dari persamaan (2.19.a) jelas bahwa $p_{ii} = 0$ atau 1, untuk semua $i \ne j$ maka $p_{ij} = 0$

(d) didefinisikan $\underset{\sim}{Z} = (\underset{\sim}{X} : \underset{\sim}{Y})$, $\underset{\sim}{P}_x = \underset{\sim}{X} (\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}^T$ dan $\underset{\sim}{P}_z = \underset{\sim}{Z} (\underset{\sim}{Z}^T \underset{\sim}{Z})^{-1} \underset{\sim}{Z}^T$

Berdasarkan (2.17.a) maka diperoleh :

$$\underset{\sim}{P}_z = \underset{\sim}{P}_x + \frac{(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_x)\,\bar{Y}\bar{Y}^T\,(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_x)}{\bar{Y}^T\,(\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{P}_x)\,\bar{Y}}$$

$$= \underset{\sim}{P}_x + \frac{\bar{e}\,\bar{e}^T}{\bar{e}^T\bar{e}}$$

Maka elemen-elemen diagonal $\underset{\sim}{P}_z$ lebih kecil atau sama dengan 1.

Contoh :

Suatu garis lurus pada suatu himpunan data yang terdiri dari lima titik, empat titik berada pada x = 1 dan satu titik pada x = 4

Sehingga diperoleh :

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{maka } \underset{\sim}{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 20 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}^T = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{P}) = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank $[\underset{\sim}{P}] = 2 = \Sigma\, p_{ii}$

Terlihat bahwa $p_{5,5} = 1$

$p_{5,j} = p_{j,5} = 0$ untuk $j = 1,2,3,4$