BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. HIMPUNAN

2.1.1. PENGERTIAN

Himpunan adalah sekelompok obyek-obyek yang berada dalam satu kesatuan atau batasan dan mempunyai sifat keterikatan diantara anggota-anggotanya.

Jika A adalah suatu himpunan dan x anggota dari himpunan A, maka dapat ditulis :

$$x \in A$$

Jika y bukan anggota himpunan A, maka dapat ditulis :

$$y \notin A$$

DEFINISI 1.

Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika himpunan tersebut tidak mempunyai anggota, dinotasikan $\emptyset$.

2.1.2. HUBUNGAN ANTAR HIMPUNAN

DEFINISI 2.

Dua himpunan A dan B dikatakan sama (A = B) jika dan hanya jika untuk setiap anggota dari A, adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

anggota B, dan untuk setiap anggota dari B adalah A, sehingga dapat ditulis :

A = B jhj untuk setiap x, x $\in$ A jhj x $\in$ B.

DEFINISI 3 :

Jika terdapat dua himpunan A dan B, dikatakan A adalah himpunan bagian (Subset) dari B jika dan hanya jika utuk setiap anggota A adalah anggota B, tetapi untuk setiap anggota B belum tetu anggota A, ditulis $A \subset B$.

2.1.3. OPERASI ANTAR HIMPUNAN

DEFINISI 4 :

Irisan (Interseksi) dari dua himpunan A dan B dengan tanda $A \cap B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya dimiliki oleh A dan juga dimiliki oleh B secara bersamaan

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$

DEFINISI 5 :

Gabungan (Union) dari dua himpunan A dan B dengan tanda $A \cup B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota yang berada di A atau berada di B atau berada dikedua-duanya.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$

DEFINISI 6 :

Selisih dari dua himpunan A dan B dengan tanda A - B adalah himpunan yang anggota-anggotanya

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

termasuk di A tetapi tidak termasuk di B.

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$

2.2. FUNGSI DAN RELASI

DEFINISI 7 :

Diberikan himpunan X dan Y , suatu fungsi *f* dari X ke Y yang dinotasikan dengan ,

$$f : X \longrightarrow Y$$

didefinisikan sebagai suatu aturan yang mengawankan setiap elemen x dalam X dengan suatu elemen y dalam Y yang sesuai. Dan y disebut image atau bayangan dari x yang dinotasikan dengan $y = f(x)$.

DEFINISI 8 :

a> Fungsi *f* disebut *injektif* atau fungsi satu-satu, jika tidak ada pasangan anggota yang berbeda dari X yang mempunyai bayangan yang sama, yaitu :

$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'), (x,x' \in X)$

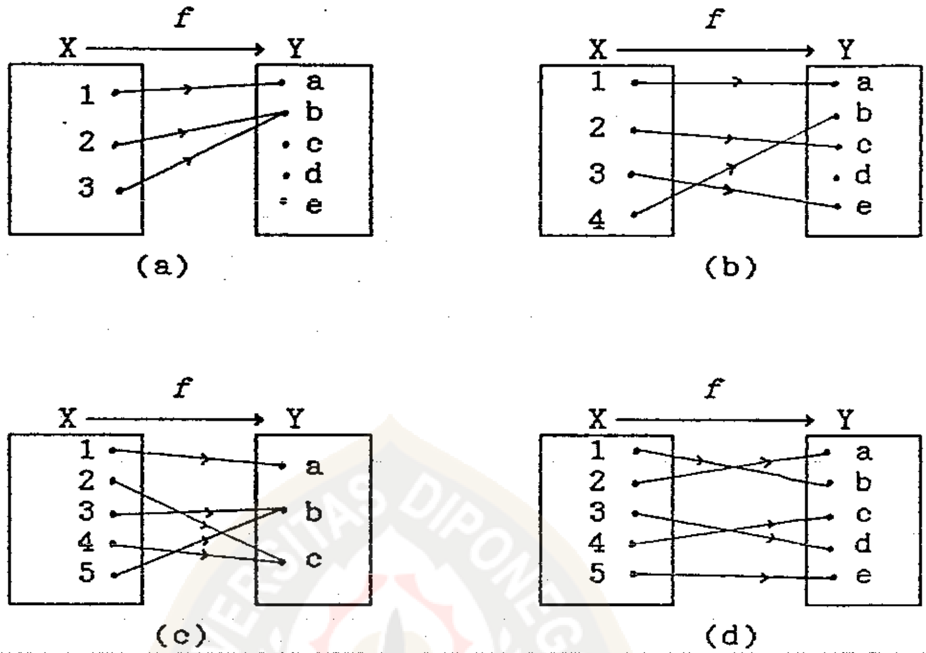
b> Fungsi *f* disebut *surjektif* atau onto jika setiap y dalam Y adalah bayangan x dalam X yaitu:

$(\forall\ y \in Y)\ (\exists\ x \in X)$, dimana $y = f(x)$.

c> Fungsi *f* disebut *bijektif* atau berkorespondensi satu-satu jika memenuhi injektif dan surjektif.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 1:



gambar 1, fungsi-fungsi $f : X \longrightarrow Y$

Gambar 1 melukiskan definisi-definisi diatas yaitu

(a) contoh untuk suatu fungsi

(b) fungsi yang injektif

(c) fungsi yang surjektif (onto)

(d) fungsi yang bijektif

DEFINISI 9 :

Suatu relasi biner dalam X didefinisikan sebagai suatu fungsi,

$$R : X \longrightarrow \mathscr{P}(X)$$

dimana $\mathscr{P}(X)$ adalah power set yaitu kumpulan semua himpunan bagian (subset) dari X.

Suatu relasi biner R dalam X memenuhi satu atau lebih dari sifat-sifat berikut:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

a) Simetrik : $x' \in R(x) \Longrightarrow x \in R(x')$
$(x,x' \in X)$

b) Anti simetrik : $x' \in R(x) \Longrightarrow x \notin R(x')$
$(x,x' \in X)$

c) Refleksif : $x \in R(x)$, $(x \in X)$

d) Irrefleksif : $x \notin R(x)$, $(x \in X)$

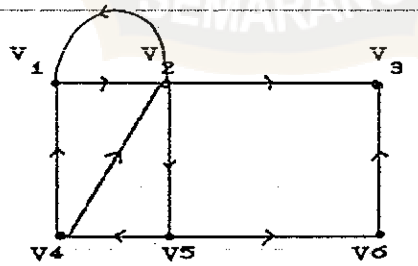
e) Transitif : $z \in R(y),\ y \in R(x) \Longrightarrow z \in R(x)$
$(x,y,z \in X)$

2.3. GRAPH

DEFINISI 10 :

Suatu digraph atau graph berarah D didefinisikan sebagai suatu pasangan (V,F) dimana V adalah himpunan vertek-vertek $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan F himpunan garis-garis berarah atau arc atau force.

CONTOH 2:



gambar 2, digraph D = (V,F)

gambar 2, adalah contoh untuk digraph D = (V,F) dimana $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan F adalah himpunan garis-garis berarah yang diidentifikasikan dengan pasangan terurut vertek-verteknya, sehingga

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$F = \{(v_1,v_2);(v_2,v_1);(v_2,v_3);(v_2,v_5);(v_4,v_1);(v_4,v_2);$
$(v_5,v_4);(v_5,v_6);(v_6,v_3)\}.$

DEFINISI 11.

Jika terdapat suatu arc dari vertek u ke vertek v, maka dikatakan bahwa u adjacent dengan v.

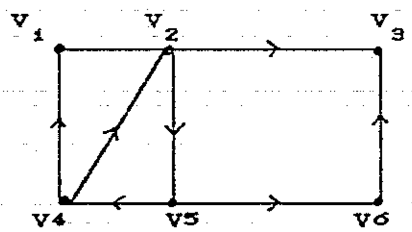
CONTOH 3:

Dalam gambar 2, v_1 adjacent dengan v_2 , v_2 adjacent dengan v_1 ,v_2 adjacent dengan v_3 ,dan seterusnya.

Jika terdapat suatu arc dari u ke v dan suatu arc dari v ke u, maka pasangan arc antara vertek u dan v tersebut dapat diganti dengan garis tak berarah tunggal, yang menghubungkan u dan v, garis tunggal tersebut disebut *edge* dan diidentifikasikan sebagai pasangan tak terurut vertek-verteknya, yaitu (u,v).

CONTOH 4:

Pada gambar 2, digraph D = (V,F) tersebut dapat dilukiskan kembali, sebagai berikut,



gambar 3, digraph D = (V,F)

untuk arc dari v_1 ke v_2 dan arc dari v_2 ke v_1 dapat

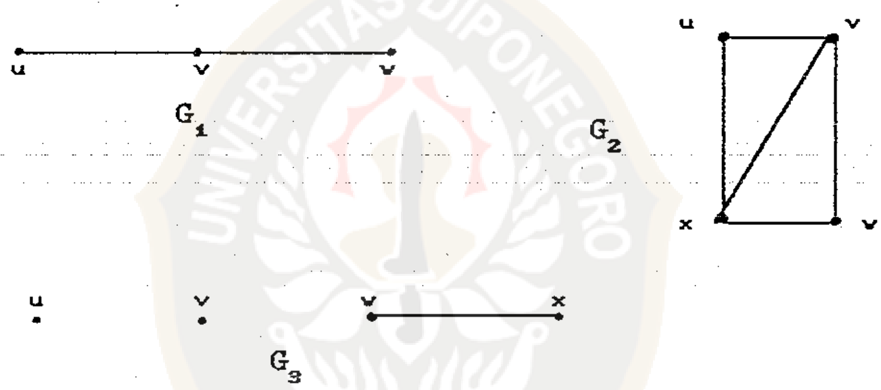
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

diganti dengan satu edge yang menghubungkan v_1 dan v_2.

DEFINISI 12 :

Suatu graph G, didefinisikan sebagai suatu pasangan (V,E) dimana V adalah himpunan vertek-vertek, dan E adalah himpunan adge.

CONTOH 5:



gambar 4, graph-graph G dengan arc-arc disajikan dengan edge-edge.

DEFINISI 13 :

Jika diberikan suatu digraph D = (V,F) yang memenuhi

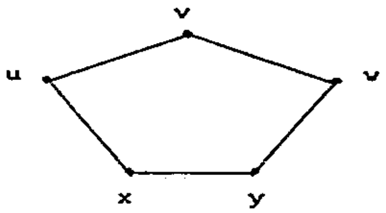
$$F \cap F^{-1} = \emptyset \quad \text{dan} \quad F + F^{-1} = E$$

dengan, $F^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in F\}$,

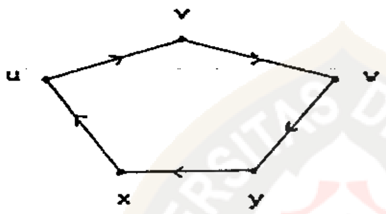
maka F disebut orientasi pada graph G = (V,E).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

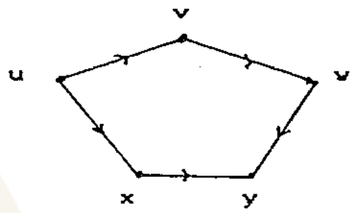
CONTOH 6:



graph G=(V,E)



F_1



F_2

gambar 5, graph G dan dua orientasi yang tidak sama (tidak isomorfis) F_1 dan F_2 pada graph G = (V,E).

Akan diselidiki apakah F_1 dan F_2 memenuhi ketentuan pada definisi 13.

Diketahui, G = (V,E) dengan,

$V = \{u,v,w,x,y\}$

$E = \{(u,v);(v,u);(u,w);(w,u);(w,y);(y,w);(y,x);(x,y);(x,u);(u,x)\}$.

$F_1 = \{(u,v);(v,w);(w,y);(y,x);(x,u)\}$

$F_1^{-1} = \{(v,u);(w,v);(y,w);(x,y);(u,x)\}$.

$F_1 \cap F_1^{-1} = \emptyset$.

$F_1 + F_1^{-1} = \{(u,v);(v,w);(w,y);(y,x);(x,u);(v,u);(w,v);(y,w);(x,y);(u,x)\}$.

$= E$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$F_2 \;= \{(u,v);(v,w);(w,y);(x,y);(u,x)\}$

$F_2^{-1} = \{(v,u);(w,v);(y,w);(y,x);(x,u)\}$

$F_2 \cap F_2^{-1} = \emptyset.$

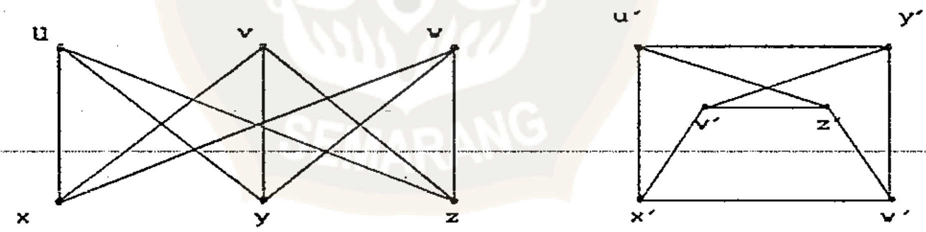
$F_2 + F_2^{-1} = \{(u,v);(v,w);(w,y);(x,y);(u,x);(v,u);(w,v)$
$;(y,w);(y,x);(x,u)\}.$
$= E.$

Sehingga karena memenuhi ketentuan dari definisi 13, maka F_1 dan F_2 adalah orientasi pada G.

DEFINISI 14 :

Dua graph G dan H adalah Isomorfis, dinotasikan dengan G $\cong$ H , jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan vertek-verteknya yang adjacent.

CONTOH 7:



gambar 6, graph-graph yang isomorfis.

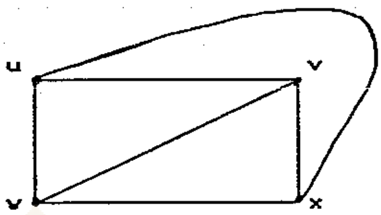
Kedua gambar G dan H diatas adalah isomorfis (G $\cong$ H) karena terdapat korespondensi satu-satu pada vertek-verteknya yang adjacent, misalkan u adjacent dengan z dalam G dan u' adjacent dengan z' dalam H , demikian seterusnya untuk vertek-vertek adjacent lainnya.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

DEFINISI 15 :

Suatu graph G disebut graph *lengkap* jika setiap verteknya adjacent dengan setiap vertek lainnya.

CONTOH 8:



gambar 7, graph lengkap G

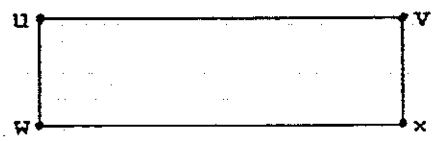
Graph lengkap dengan n vertek, dinotasikan dengan K_n. Maka graph G pada gambar 7 diatas adalah graph K_4.

DEFINISI 16 :

Jika diberikan graph tak berarah G = (V,E), maka *komplemen* dari graph G didefinisikan dengan $\overline{G} = (V.\overline{E})$, dimana,

$$\overline{E} = \{ x,y \in V \mid x \neq y \text{ dan } (x,y) \notin E \}$$

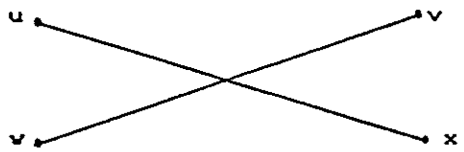
CONTOH 9:



gambar 8, graph G = (V,E)

Berdasarkan definisi 16, maka komplemen dari graph G diatas adalah:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



gambar 9, graph $\overline{G}$.

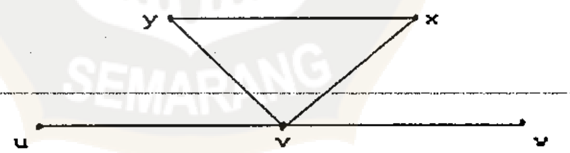
Graph $\overline{G}$ (komplemen graph G) dapat ditunjukkan dengan :

- $V(G) = V(\overline{G})$ (himpunan vertek di G = himpunan vertek di $\overline{G}$).
- dua titik adjacent di $\overline{G}$ bhb dua titik tersebut tidak adjacent di G.

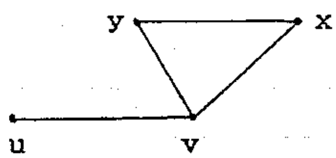
DEFINISI 17 :

Suatu graph G´ disebut *subgraph* dari G jika semua vertek dan edgenya termuat dalam G.

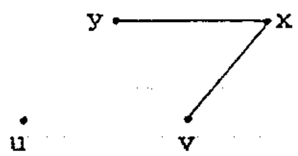
CONTOH 10:



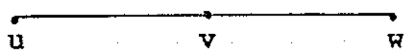
graph G



(G´)



(G")



(G"´)

gambar 10, graph G dan tiga subgraph dari G

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

DEFINISI 18 :

Untuk subset $A \subseteq V$ dari graph $G = (V,E)$, subgraph yang dibangun oleh A, adalah $G_A = (A,E_A)$, dimana ,

$$E_A = \{ (x,y) \in E \mid x \in A \text{ dan } y \in A \}$$

CONTOH 11:

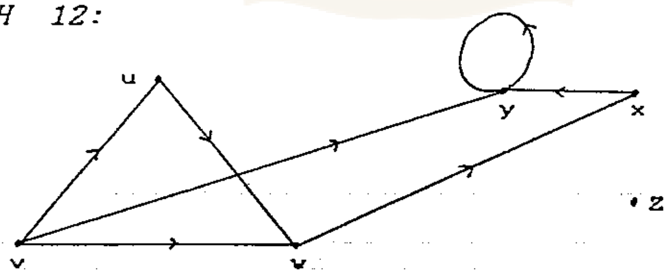
Pada gambar 10, diatas maka graph G´ dan G"´ adalah subgraph yang dibangun berturut-turut oleh $A' = \{u,v,x,y\}$ dan $A''' = \{u,v,w\}$.

DEFINISI 19 :

Diberikan suatu graph berarah atau digraph $D = (V,F)$ sembarang, maka:

- In-degree suatu vertek x ($d^-(x)$) adalah banyaknya arc yang menuju ke vertek x.
- Out-degree suatu vertek x ($d^+(x)$) adalah banyaknya arc yang meninggalkan vertek x.

CONTOH 12:



gambar 11, digraph D = (V,F).

Pada vertek u , $d^+(u) = 1$

$d^-(u) = 1$

untuk vertek w, $d^+(w) = 1$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$d^{-}(w) = 2.$$

Suatu vertek x yang mana out-degree ($d^{+}(x)$) atau in-degree ($d^{-}(x)$) sama dengan nol, disebut *sink (source)*.

Contohnya : Untuk vertek v, d (x) = 0, maka v adalah sink.

Jika keduanya $d^{+}(x) = 0$ dan $d^{-}(x) = 0$, maka x adalah suatu vertek terasing (*isolated vertek*).

Contohnya : adalah vertek z.

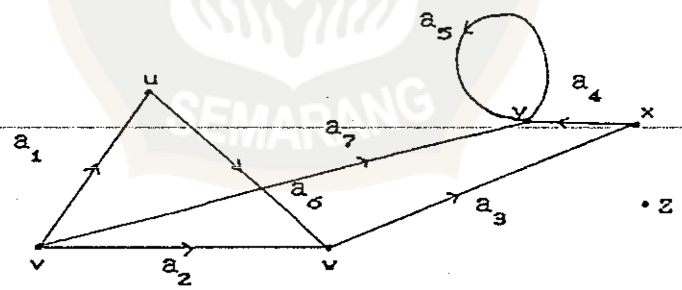
DEFINISI 20 :

Diberikan suatu digraph D = (V,F) . Suatu path dalam D adalah suatu barisan dari vertek dan arc bergantian.

$$u_1, a_1, u_2, a_2, \ldots, u_t, a_t, u_{t+1}$$

dimana $t \geq 0$, $u_i \in V$, dan $a_i \in F$, $a_i = (u_i, u_{i+1})$.

CONTOH 13:



gambar 12, digraph D

Pada gambar diatas barisan (lintasan) v, a_1, u, a_6, w. adalah suatu path, juga untuk lintasan $v, a_2, w, a_3, x, a_4, y, a_5, y$, adalah suatu path.

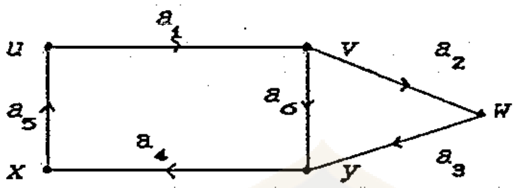
Suatu path disebut *simple path* (path sederhana) jika tidak pernah melalui vertek yang sama lebih dari sekali.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

DEFINISI 21 :

Suatu path tertutup, yaitu vertek akhir sama dengan vertek awal, disebut cycle (path tertutup sederhana).

CONTOH 14:



gambar 13, digraph D

Pada gambar diatas, lintasan $\{u,a_1,v,a_2,w,a_3,y,a_4,x,a_5,u\}$, adalah suatu path tertutup atau cycle.

DEFINISI 22 :

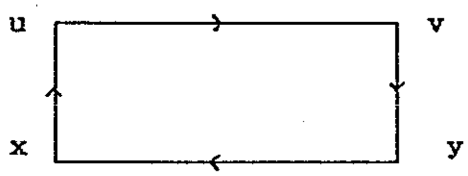
Suatu cycle $\{u_1,a_1,u_2,a_2,u_3, \ldots ,a_{l-1},u_l,a_l,u_1\}$, adalah cycle tanpa garis (*chordless cycle)* jika $(u_i,u_j) \notin F$, untuk i dan j yang mempunyai selisih lebih dari 1(mod(l+1)).

CONTOH 15:

Pada gambar 13 diatas, lintasan $\{u,a_1,v,a_6,y,a_4,x,a_5,u\}$, adalah cycle tanpa garis. Sedang untuk cycle pada contoh 14 diatas bukan suatu cycle tanpa garis, karena vertek v dan y mempunyai arc, a_6, dalam F atau $(v,y) \in F$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Chordless cycle dengan n vertek dinotasikan dengan C_n.



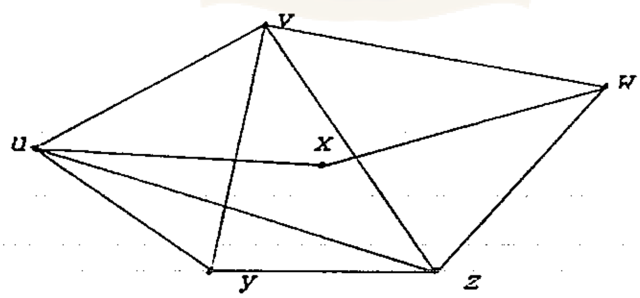
gambar 14, chordless cycle dengan 4 vertek (C_4) dari digraph D = (V,F), dari gambar 13.

DEFINISI 23 :

Himpunan A (A ⊆ V) dari graph G = (V,E) disebut klik jika setiap dua titik yang berbeda di A adalah adjacent.

Himpunan A, dengan r titik (vertek) dinotasikan dengan r-klik.

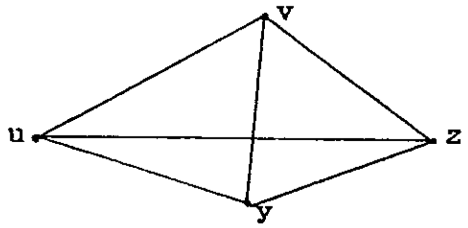
CONTOH 16:



gambar 15, graph G = (V,E)

Ambil A = {u,v,y,z} dari graph G = (V,E) tersebut diatas. A ⊆ V , maka gambar dibawah ini menunjukkan suatu klik dari graph G .

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



gambar 16, 4-klik dari graph G

Suatu r-klik dikatakan maksimal jika tidak ditemukan s-klik dari G dengan s > r.

Bilangan klik dari G ($\omega(G)$) adalah banyaknya titik (vertek) dari klik maksimal.

CONTOH 17:

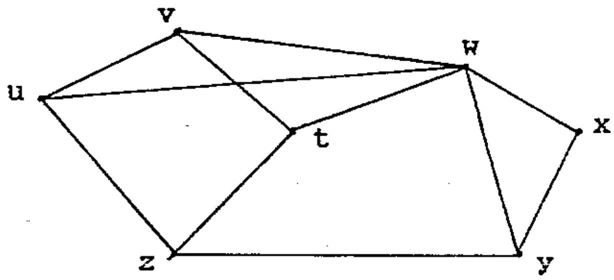
Untuk graph G = (V,E) dari gambar 15 mempunyai klik maksimal 4-klik, sebagaimana gambar 16, sehingga $\omega(G) = 4$.

DEFINISI 24 :

Subset $S \subseteq V$ dari graph G = (V,E) disebut himpunan stabil, jika tidak terdapat dua vertek dalam S yang adjacent.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 18:



gambar 17, graph G = (V,E)

Terdapat subset-subset dari V pada graph G diatas.

$S_1 = \{u,t\}$

$S_2 = \{u,t,y\}$.

$S_3 = \{t,x,u\}$

$S_4 = \{z,w\}$

$S_5 = \{u,z\}$

$S_6 = \{t,x\}$

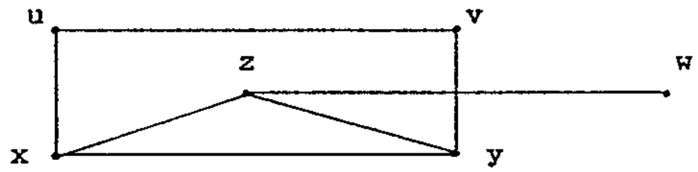
maka S_i dengan $i = 1, \ldots, 6$, tersebut adalah himpunan-himpunan stabil dari G.

DEFINISI 25 :

Perwarnaan titik suatu graph adalah pemberian warna pada vertek-vertek dalam graph tersebut sedemikian sehingga tidak terdapat dua titik yang adjacent dengan warna yang sama.

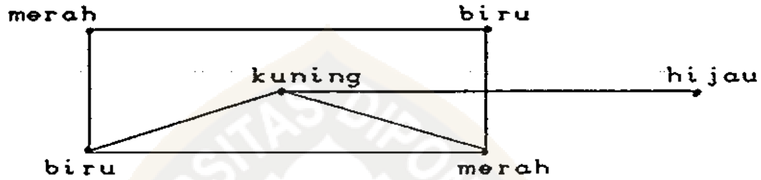
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 19:



gambar 18, graph G

Pada graph G ini dilakukan pewarnaan titik, sebagai berikut:



gambar 19, graph G yang telah terwarnai.

Suatu graph G diberikan pewarnaan dengan n warna , dikatakan n-pewarnaan pada G. Maka graph pada gambar 18, adalah 4-pewarnaan.

DEFINISI 26 :

Bilangan kromatik $\chi(G)$ dari suatu graph G, didefinisikan sebagai jumlah minimum warna yang digunakan untuk mewarnai titik (vertek-vertek) pada graph G tersebut.

CONTOH 20:

Untuk graph G pada gambar 18, maka diperoleh bilangan kromatiknya $\chi(G) = 4$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4. GRAPH COMPARABILITY

DEFINISI 27.

Suatu graph tak berarah G = (V,E) disebut graph comparability jika terdapat suatu orientasi (V,F) pada G yang memenuhi

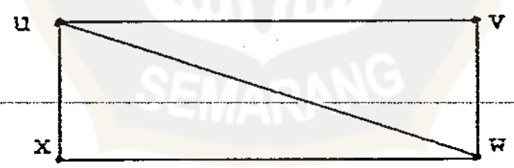
$$F \cap F^{-1} = \emptyset , \quad F + F^{-1} = E , \quad F^2 \subseteq F$$

dimana $F^2 = \{ac \mid ab, bc \in F$, untuk suatu vertek $b\}$ dan F disebut suatu *orientasi transitif* pada G.

Graph comparability disebut juga graph terorientasi secara transitif (transitively orientable).

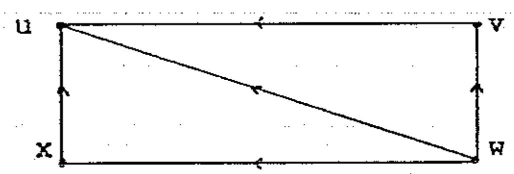
CONTOH 21:

Diberikan suatu graph G = (V,E), sebagai berikut:



gambar 20, graph G

Graph G = (V,E) tersebut diberikan suatu orientasi (V,F) sedemikian sehingga graph tersebut dapat dilukiskan kembali sebagai berikut:



gambar 21 , digraph (V,F)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dengan orientasi tersebut, terlihat bahwa:

$F = \{(x,u);(v,u);(w,v);(w,x);(w,u)\}$

$F^{-1} = \{(u,x);(u,v);(v,w);(x,w);(u,w)\}$

$F^2 = \{ wu \mid wx \text{ , } xu \in F \} \subseteq F$

$\{ wu \mid wv \text{ , } vu \in F \} \subseteq F$

$F \cap F^{-1} = \emptyset$

$F + F^{-1} = \{(x,u);(v,u);(w,v);(w,x);(w,u);(u,X);(u,v);(v,w);(x,w);(u,w)\}.$

$= E$

Karena dipenuhi $F \cap F^{-1} = \emptyset$, $F + F^{-1} = 1$, dan $F^2 \subseteq F$, maka graph tersebut pada gambar 20, adalah graph comparability dan gambar 21, adalah orientasi transitifnya.

DEFINISI 28 :

Didefinisikan relasi biner Γ pada edge suatu graph tak berarah $G = (V,E)$ sebagai berikut:

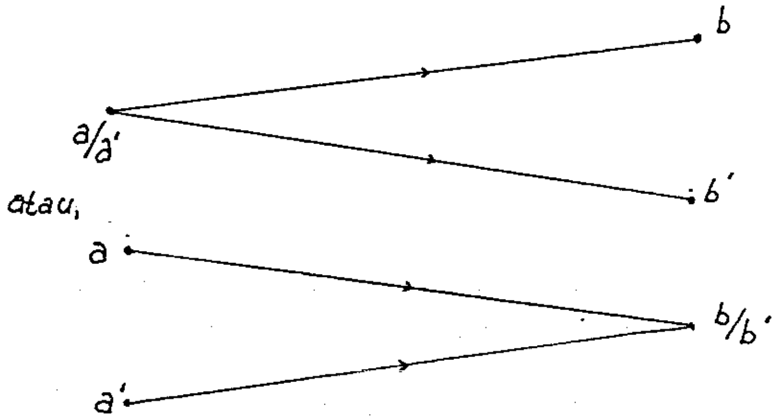
$$ab \ \Gamma \ a'b' \quad \text{jhj} \quad \begin{cases} a = a' \text{ dan } bb' \notin E \\ \text{atau,} \\ b = b' \text{ dan } aa' \notin E. \end{cases}$$

Jika $ab \ \Gamma \ a'b'$, maka dikatakan ab directly force a'b'.

CONTOH 22:

Gambar dibawah ini melukiskan suatu relasi biner Γ untuk $ab \ \Gamma \ a'b'$ yaitu ab directely forcing a'b'.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



gambar 22, ab Γ a'b'

DEFINISI 29 :

Relasi Γ^* merupakan penutup simetrik dari Γ yang juga bersifat refleksif, sehingga merupakan relasi ekivalen pada E yang membagi E kedalam klas-klas implikasi dari G. Sehingga edge ab dan cd berada dalam klas implikasi yang sama jhj terdapat suatu barisan edge berikut:

$$ab = a_0b_0 \ \Gamma \ a_1b_1 \ \Gamma \ a_2b_2 \ \Gamma \ a_3b_3 \ \Gamma \ \ldots \ \Gamma \ a_kb_k = cd,$$

dengan $k \geq 0$.

Barisan tersebut disebut rantai-Γ dari ab ke cd. dan dikatakan ab forces cd, untuk ab Γ^* cd.

TEOREMA 1 :

Diberikan suatu klas implikasi A pada graph tak berarah G. Jika G mempunyai suatu orientasi transitif F, maka dipenuhi salah satu:

$$F \cap \hat{A} = A \quad \text{atau} \quad F \cap \hat{A} = A^{-1}$$

dan dalam hal lain $A \cap \hat{A} = \emptyset$, dimana $\hat{A} = A \cup A^{-1}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti :

Dengan berdasar definisi Γ, suatu orientasi transitif F pada G berlaku :

jika $ab \; \Gamma \; a'b'$, dan $ab \in F$, maka $a'b' \in F$.

maka diperoleh $F \cap A = \emptyset$ atau $A \subseteq F$.

Karena (i) $A \subseteq F + F^{-1}$ dan (ii) $F \cap F^{-1} = \emptyset$

diperoleh:

$$F \cap A = \emptyset \implies A \subseteq F^{-1} \quad \text{(berdasar i)}$$

$$\implies A^{-1} \subseteq F \implies F \cap \hat{A} = A^{-1}.$$

dan,

$$A \subseteq F \implies A^{-1} \subseteq F^{-1} \implies F \cap A^{-1} = \emptyset$$

(berdasar ii)

$$\implies F \cap \hat{A} = A.$$

Dimana dalam hal lain bahwa $A \cap \hat{A} = \emptyset$. $\blacksquare$.

Kebalikan dari teorema tersebut, juga berlaku yaitu, jika $A \cap A^{-1} = \emptyset$ untuk setiap klas implikasi A, maka G mempunyai suatu orientasi transitif.

DEFINISI 30 :

Diberikan $ab = a_0b_0 \; \Gamma \; a_1b_1 \; \Gamma \; a_2b_2 \; \Gamma \; \ldots \Gamma \; a_kb_k = cd$, untuk setiap $i = (1,2, \ldots ,k)$, didapat:

$$a_{i-1}b_{i-1} \; \Gamma \; a_ib_{i-1} \; \Gamma \; a_ib_i \; , \; \ldots$$

karena adanya penambahan suatu edge diantara dua edgenya.

Jika $ab \; \Gamma^* \; cd$, maka terdapat suatu rantai-Γ dari ab ke cd dalam bentuk:

$$ab = a_0b_0 \; \Gamma \; a_1b_0 \; \Gamma \; a_1b_1 \; \Gamma \; a_2b_1 \; \Gamma \; \ldots \; \Gamma \; a_kb_k = cd,$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

yang disebut rantai-Γ beraturan (*canonical* Γ*-chain*).

TEOREMA 2 :

Diberikan suatu graph tak berarah $G = (V,E)$, maka G adalah graph comparability jhj setiap cycle pada edge, $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_qv_1 \in E$ dan $v_{q-1}v_1, v_qv_2, v_{i-1}v_{i-1} \notin E$ (untuk $i = 2, \ldots, q-1$) mempunyai panjang genap.

Bukti :

($\Longrightarrow$)

Andaikan $v_1v_2 \in A \cap A^{-1} \neq \emptyset$. (G bukan graph comparability), maka dengan rantai-Γ beraturan, didapat ,

$v_1v_2 \;\Gamma\; v_3v_2 \;\Gamma\; v_3v_4 \;\Gamma \ldots \Gamma\; v_qv_{q-1} \;\Gamma\; v_qv_{q+1} = v_2v_1$,

dengan susunan tersebut, maka q adalah ganjil, karena semua koordinat pertamanya mempunyai indek ganjil. Sedang $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_qv_1$ adalah cycle. Terdapat kontradiksi.

($\Longleftarrow$)

Andaikan E mempunyai cycle dengan panjang ganjil q, maka,

$$v_1v_2 \;\Gamma\; v_3v_2 \;\Gamma\; v_3v_4 \;\Gamma \ldots \Gamma\; v_qv_{q-1} \;\Gamma\; v_qv_1 \;\Gamma\; v_2v_1,$$

adalah suatu rantai-Γ dalam E, maka $A \cap A^{-1} \neq \emptyset$, untuk klas implikasi A yang memuat v_1v_2.

Terdapat kontradiksi. ∎.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5. GRAPH INTERSEKSI

DEFINISI 31 :

Jika diberikan $\mathcal{F}$ suatu keluarga himpunan-himpunan, maka suatu graph G, disebut graph interseksi pada $\mathcal{F}$ jika memenuhi :

$V(G) = \mathcal{F}$ dan jika $S,T \in \mathcal{F}$ dengan $S \neq T$,

maka, $\{S,T\} \in E(G) \Longleftrightarrow S \cap T \neq \emptyset$.

CONTOH 23:

Diberikan $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_6\}$ dengan $S_1, S_2, \dots, S_6$, ditentukan sebagai berikut:

$S_1 = \{1,2,3,4\}$

$S_2 = \{1,3,6\}$

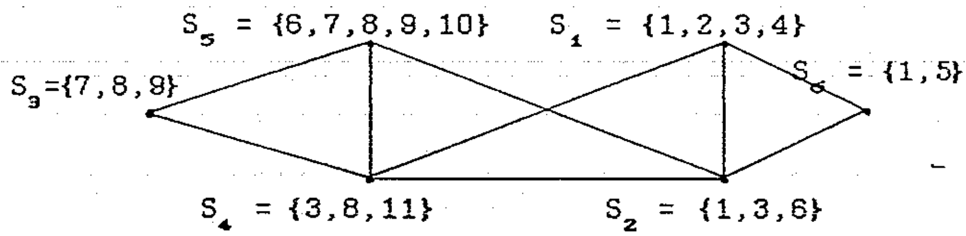
$S_3 = \{7,8,9\}$

$S_4 = \{3,8,11\}$

$S_5 = \{6,7,8,9,10\}$

$S_6 = \{1,5\}$.

sehingga gambar dibawah ini adalah graph interseksi pada $\mathcal{F}$.



gambar 23, graph G

- $V(G) = \mathcal{F}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

- $\{S_i, S_j\} \in E(G) \Longleftrightarrow S_i \cap S_j \neq \emptyset$, untuk $S_i \neq S_j$

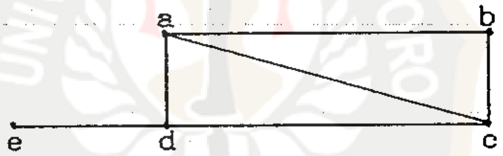
Gambar 23 diatas untuk S_5 dan S_1, karena $S_5 \cap S_1 = \emptyset$, maka $\{S_5, S_1\} \notin E(G)$.

Equivalen dengan definisi 31, jika pada suatu graph $G = (V,E)$, dapat ditemukan suatu fungsi S dari V kedalam suatu keluarga himpunannya, dan mempunyai sifat, untuk semua $u \neq v \in V$,

$$\{u,v\} \in E \Longleftrightarrow S(u) \cap S(V) \neq \emptyset.$$

maka graph $G = (V,E)$ adalah graph interseksi.

CONTOH 24:



gambar 24, graph G

Diberikan graph G seperti gambar 24, terdapat:

$S(a) = \{(a,b),(a,c),(a,d)\}$

$S(b) = \{(a,b),(b,c)\}$

$S(c) = \{(a,c),(b,c),(c,d)\}$

$S(d) = \{(a,d),(c,d),(d,e)\}$

$S(e) = \{(d,e)\}$

Dapat dilihat bahwa $(d,e) \in E$ dan $S(d) \cap S(e) \neq \emptyset$, karena $(d,e) \in S(d) \cap S(e)$, tetapi $(d,b) \notin E$ dan $S(d) \cap S(b) = \emptyset$.

Sehingga graph G diatas adalah graph interseksi.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.6. GRAPH INTERVAL

DEFINISI 32 :

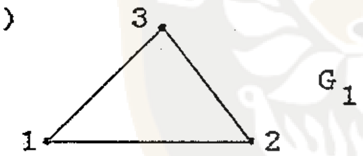
Suatu graph G disebut graph interval, jika graph G tersebut merupakan graph interseksi pada keluarga interval-interval dalam garis riil, yaitu jhj terdapat suatu I pada suatu interval I(u) untuk setiap $u \in V$, sedemikian sehingga untuk semua $u \neq v \in V$,

$$\{u,v\} \in E \iff I(u) \cap I(v) \neq \emptyset.$$

CONTOH 25:

Gambar yang berikut menunjukkan contoh graph interval dan interval yang memenuhinya:

(a)



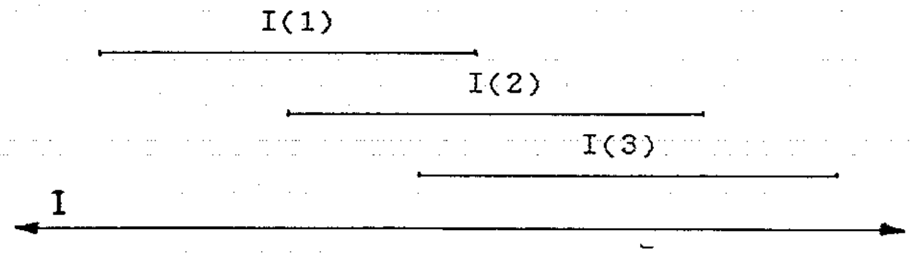
(3,1), (2,1), (2,3), (1,3), (1,2), (3,2) $\in$ E

$I(1) \cap I(3) \neq \emptyset$

$I(2) \cap I(1) \neq \emptyset$

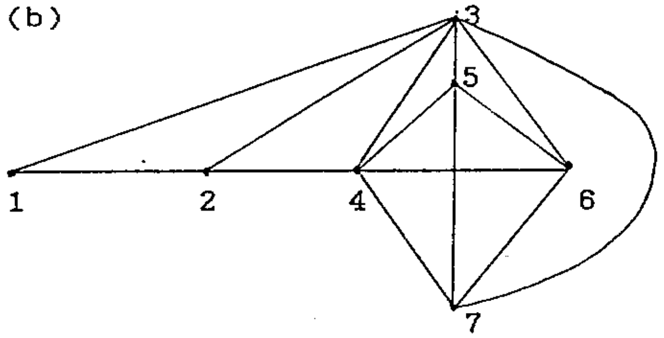
$I(3) \cap I(2) \neq \emptyset$

maka interval I nya, sebagai berikut;



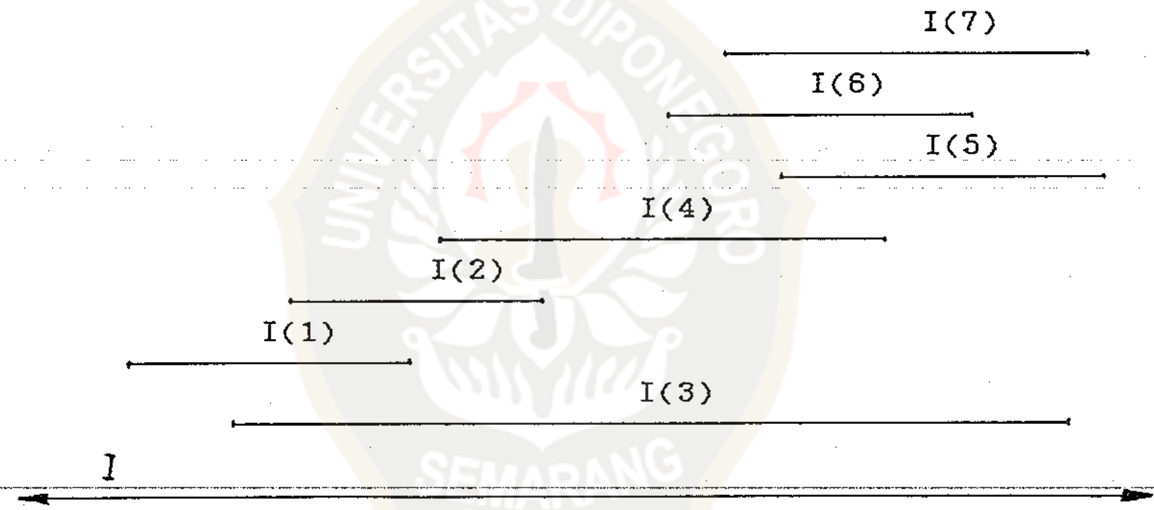
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(b)



G_2

dengan cara yang sama seperti pada G_1 maka diperoleh interval I untuk G_2 sebagai berikut:



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)