BAB III
PROSES STASIONER DAN AUTOKORELASI

Proses stokastik stasioner didalam waktu diskrit mampu memberikan rumusan alamiah untuk pengembangan dan aplikasi statistika modern. Disini akan dijelaskan mengenai autokorelasi dan autokovarian serta hubungan keduanya pada spektrum. Selain itu akan disajikan juga spektrum campuran dan manifestasinya dalam fungsi distribusi spektral. Proses stasioner diklasifikasikan dalam bentuk real dan kompleks.

Salah satu yang terpenting dari proses stasioner adalah kemampuan meletakkan pijakan /dasar yang sama pada bentuk-bentuk yang berbeda . Tidak semua variabel random sempurna mempunyai spektral yang kontinu dalam kelas yang sama . Sinusoidal random memiliki spektrum diskrit dan campuran dari sinusoidal random murni plus barisan IID . Proses stasioner yang dibicarakan disini khusus dalam bentuk real.

3.1. Proses Gauss

Suatu proses stokastik Z_t ,dimana $t \in T$ disebut proses gauss bila setiap kombinasi linier berhingga variabel random Z_t adalah berdistribusi normal.

Proses gauss disebut juga proses normal dan variabel yang berdistribusi normal disebut juga berdistribusi gauss.

Contoh :

A dan B variabel random independen dan berdistribusi normal dengan mean nol dan varian σ^2. Dan

$$Z_t = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t.$$

Z_t adalah proses gauss, dimana $-\infty < t < \infty$.

Jawab :

Ambil n >0 dan dipilih bilangan real $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Kemudian diketahui persamaan :

$$Z_t = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t$$

Kombinasi linier variabel random Z_t adalah

$$a_1 Z_{t_1} + a_2 Z_{t_2} + \ldots\ldots + a_n Z_{t_n} =$$

$$A(a_1 \cos \lambda t_1 + a_2 \cos \lambda t_2 + \ldots\ldots + a_n \cos \lambda t_n) +$$

$$B(a_1 \sin \lambda t_1 + a_2 \sin \lambda t_2 + \ldots\ldots + a_n \sin \lambda t_n)$$

ini merupakan kombinasi linier yang independen dan $a_i Z_{t_i}$ dimana $i = 1,2,\ldots,n$ adalah berdistribusi normal. Maka kombinasi liniernya berdistribusi normal. ∎

3.2. Pengertian Proses Stasioner

Proses random stokastik adalah koleksi dari variabel random Z_t yang berharga real atau komplek, dengan indeks t, dimana t diambil dalam beberapa indeks himpunan T. Interval $(-\infty,\infty)$ disebut Proses waktu kontinu. interval $(\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots)$ disebut proses waktu diskrit. Gabungan Diskrit dan kontinu disebut proses waktu campuran.

Nilai real dari proses Z_t sebagai proses yang lambat membentang dalam waktu dan akan diselidiki dalam waktu tertentu sehingga menghasilkan suatu barisan dalam waktu diskrit dan sebuah fungsi dalam waktu kontinu. Barisan dan fungsi tersebut merupakan suatu realisasi atau Fungsi sampel atau disingkat rekaman waktu (time record). Koleksi dari semua kemungkinan realisasi disebut ensemble (pasangan).

Untuk beberapa koleksi dari n titik waktu $t_1<t_2<\ldots.<t_n$ distribusi probabilitas dari vektor random $(Z_{t_1},Z_{t_2},\ldots.,Z_{t_n})$ adalah

$$P(Z_{t_1} \le z_1, Z_{t_2} \le z_2, \ldots\ldots, Z_{t_n} \le z_n) \qquad (3.1)$$

$f_{t_1}(z)$ adalah fungsi densitas probabilitas dari Z_{t_1}, maka rata-rata (momen I) dari Z_{t_1} adalah

$$E[Z_{t_1}] = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f_{t_1}(z)\, dz \qquad (3.2)$$

diinterpretasikan sebagai Average across ensemble pada waktu t . Z_{t_1} diasumsikan sebagai persilangan ensemble.

Secara umum mean boleh dibedakan dari perbedaan titik waktu, jika didefinisikan $m(t) = E[Z_t]$, tapi selalu $E[Z_t - m(t)] = 0$. $f_{t_1,t_2}(Z_1, Z_2)$ adalah fungsi densitas probabilitas gabungan dari (Z_{t_1}, Z_{t_2}).kemudian momen order kedua diberikan oleh ekspektasi :

$$E[Z_{t_1}, Z_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 \; f_{t_1,t_2}(z_1, z_2) \tag{3.3}$$

menghasilkan Z_{t_1}, Z_{t_2} diasumsi persilangan ensemble.

Dengan mengingat bahwa $\mathrm{cov}[Z_{t_1}, Z_{t_2}]$ dari Z_{t_1} dan Z_{t_2} diberikan oleh :

$$\mathrm{cov}[Z_{t_1}, Z_{t_2}] = E\{[Z_{t_1} - E(Z_{t_1})][Z_{t_2} - E(Z_{t_2})]\}$$

$$= E\{Z_{t_1} Z_{t_2} - Z_{t_1} E(Z_{t_2}) - Z_{t_1} E(Z_{t_2}) + E(Z_{t_1}) E(Z_{t_2})\}$$

$$= E[Z_{t_1} Z_{t_2}] - E[Z_{t_1}] E[Z_{t_2}] - E[Z_{t_2}] E[Z_{t_1}] + E[Z_{t_1}] E[Z_{t_2}]$$

$$= E[Z_{t_1} Z_{t_2}] - 2E[Z_{t_1}] E[Z_{t_2}] + E[Z_{t_1}] E[Z_{t_2}]$$

$$= E[Z_{t_1} Z_{t_2}] - E[Z_{t_1}] \; E[Z_{t_2}] \tag{3.4}$$

jelasnya $\mathrm{cov}[Z_{t_1}, Z_{t_1}] = \mathrm{Var}[Z_{t_1}]$. (3.5)

Fungsi $R(s,t) \equiv \text{cov}\ (Z_s, Z_t)$ disebut covarian atau fungsi autocovarian

Korelasi atau Fungsi Autokorelasi , $\rho(s,t)$ didefinisikan dari fungsi covarian normal.

$$\rho(s,t) = \frac{R(s,t)}{\sqrt{R(s,s)}\ \sqrt{R(t,t)}} \tag{3.6}$$

Dan dipenuhi $\rho(s,t) = \rho(t,s)$ dan $|\rho(s,t)| \leq \rho(t,t)$
Dengan cara yang sama kita dapat memperoleh momen order tinggi dan fungsi momen variabel random yaitu

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Pada densitas probabilitas dimensional ke-n vektor random dari proses $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots\ldots Z_{t_n})$. kemudian

$$E[\varphi(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots\ldots Z_{t_n}] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z_1, z_2 \ldots, z_n)\ f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)dz_1 \ldots dz_n \tag{3.7}$$

Proses stokastik $\{Z_t\}$ dikatakan proses stasioner sempurna jika distribusi gabungan / bersama dari $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n})$ sama dengan distribusi gabungan dari $(Z_{t_1+\tau}, Z_{t_2+\tau}, \ldots, Z_{t_n+\tau})$, untuk semua $t_1, t_2, \ldots, t_n, n, \tau$. Dengan kata lain selama jarak relatif antara titik-titik waktu tetap , distribusi gabungan tidak berubah.

Jadi jika momen order pertama ada , diambil $t = -\tau$ maka :

$$E[Z_t] = E[Z_{t+\tau}] = E[Z_0] = m \tag{3.8}$$

dimana m adalah konstan.

Distribusi gabungan (Z_t, Z_s) dan $(Z_{t+\tau}, Z_{s+\tau})$ mempunyai distribusi yang sama pada t, s, τ dan dikatakan stasioner, diambil $\tau = -s$, jika momen order kedua ada, maka :

$$E[Z_t Z_s] = E[Z_{t+\tau} Z_{s+\tau}] = E[Z_{t-s} Z_0] \tag{3.9}$$

$$R(t,s) = \text{cov}\,[Z_t, Z_s] = R\,(t-s) \tag{3.10}$$

Fungsi autokovarian dari proses stasioner bernilai real adalah fungsi dari waktu lag (perbedaan waktu) τ.

$$R(\tau) = \text{cov}\,(Z_{t+\tau}, Z_t) = \text{cov}\,(Z_\tau Z_0) \tag{3.11}$$

$$\text{var}\,[Z_t] = R(0) \quad \text{dan } R(\tau) = R(-\tau)$$

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} \tag{3.12}$$

Autokorelasi adalah fungsi dari τ yang tunggal

Autokorelasi $\rho(\tau)$ adalah pengukuran korelasi antara $Z_{t+\tau}$ dan Z_t sebagai fungsi dari perbedaan indeks secara bebas dari t. $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$ dan $|\rho(\tau)| \leq \rho(0) = 1$. Proses stasioner waktu diskrit selalu dikaitkan dengan R_k dan ρ_k, dimana k = ...,-2,-1,0,1,2,.... dengan konvensi R_0 adalah varian dan ρ_1 adalah autokorelasi order pertama.

Secara umum ,untuk stasioner sempurna dan eksistensi momen order tingkat yang lebih tinggi dapat ditulis :

$$E\left[Z_t Z_{t+t_1} Z_{t+t_2}\right] = E\left[Z_0 Z_{t_1} Z_{t_2}\right] \tag{3.13}$$

Dalam kasus real $R_k = R_{-k}$ dan genap , sehingga didefinisikan R_k sebagai berikut :

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda)\, F(d\lambda) \tag{3.14}$$

dan secara sama dalam waktu kontinu $R(\tau) = R(-\tau)$ sehingga

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau\lambda)\, F(d\lambda) \tag{3.15}$$

Ketika densitas spektral ada , oleh simetrisnya autokovarian , $f(\lambda) = f(-\lambda)$ dan dalam dua persamaan (3.14) dan (3.15) kita dapat menyatakan $F(d\lambda)$ oleh $f(\lambda)d\lambda$ sehingga

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda \tag{3.16}$$

dan begitu juga untuk waktu kontinu :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda \tag{3.17}$$

3.3 . Penyajian spektral

Kita definisikan proses $\{Z_t\}$ dengan mean 0 dan integral melalui $g(\lambda)$ oleh $g(t,1)$, t= 0,+1,+2,.....

$$Z_t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t,\lambda)\,\xi(d\lambda) \qquad (3.18)$$

dan ini mengacu pada (3.14), dari

$$E[Z_s\overline{Z_t}] = \int_{-\pi}^{\pi} g(s,\lambda)\,\overline{g(t,\lambda)}\,F(d\lambda) \qquad (3.19)$$

Penyajian spektral dalam kasus real dimana $\{Z_t\}$ real, berarti $-d\lambda$ sebagai interval terkecil memuat $-\lambda$:

$$\xi(-d\lambda) = \overline{\xi(d\lambda)}$$

Jika kita definisikan $\xi_1(d\lambda)$ dan $\xi_2(d\lambda)$ oleh

$$\xi_1(d\lambda) = \xi(d\lambda) + \overline{\xi(d\lambda)}$$

$$\xi_2(d\lambda) = i\,\{\xi(d\lambda) - \overline{\xi(d\lambda)}\} \qquad \times\, i$$

$$\xi_1(d\lambda) - i\xi_2(d\lambda) = 2\,\xi(d\lambda)$$

Jadi $\xi(d\lambda) = \frac{1}{2}\,\{\xi_1(d\lambda) - i\xi_2(d\lambda)\}$

$\xi_1(d\lambda)$ adalah ganjil dan $\xi_2(d\lambda)$ adalah genap.

$$\xi_1(-d\lambda) = \xi_1(d\lambda) \;,\; \xi_2(-d\lambda) = -\xi_2(d\lambda)$$

Juga dari definisi :

$$\xi_1(\{0\}) = 2\,\xi(\{0\}) \quad , \quad \xi_2(\{0\}) = 0$$

dengan mensubstitusi $\xi(d\lambda)$ penyajian spekral dalam waktu diskrit pada kasus real sehingga dapat ditulis :

$$Z_t = \frac{1}{2}\xi_1(\{0\}) + \int_{0+}^{\pi} \cos(t\lambda)\xi_1(d\lambda) + \int_{0+}^{\pi} \sin\,(t\lambda)\xi_2(d\lambda) \qquad (3.20)$$

$\xi_1(d\lambda)$ dan $\xi_2(d\lambda)$ adalah ukuran random ortogonal dan tidak berkorelasi.

Untuk semua $\lambda,\omega \in (0,\pi)$:

$$E\,[\,\xi_1(d\lambda)\,\overline{\xi_2(d\lambda)}\,] = 0$$

$$E\,[\,\xi_1(d\lambda)\,\overline{\xi_1(d\lambda)}\,] =$$

$$E\,[\,\xi_2(d\lambda)\,\overline{\xi_2(d\lambda)}\,] = \begin{cases} 2F(d\lambda) & ,\text{jika } \lambda = \omega \\ 0 & ,\text{jika } \lambda \neq \omega \end{cases}$$

$$R_k = F(\{0\}) + 2\int_{0+}^{\pi} \cos\,(k\lambda)F(d\lambda)$$

Fungsi distribusi spektral dapat dipisahkan menjadi komponen kontinu dan diskrit :

$$F(d\lambda) = F_c(d\lambda) + F_d(d\lambda) \qquad (3.21)$$

F_c dapat diekspresikan sebagai integral nonnegatif densitas spektral $f(\lambda)$:

$$F_c(\Lambda) = \int_{\Lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

dan $$F_d(\Lambda) = \sum_{\lambda_j \varepsilon \Lambda} P(\lambda_j)$$

$F_d(\Lambda) = 0$ jika tidak ada beberapa λ_j diskrit .

Gabungan keduanya dengan frekuensi Λ diberikan :

$$F(\Lambda) = \int_{\Lambda} f(\lambda)\, d\lambda + \sum_{\lambda_j \varepsilon \Lambda} P(\lambda_j) \qquad (3.22)$$

Fungsi massa $P(\lambda)$ disebut fungsi spektral diberikan daya pada frekuensi diskrit λ_j.

$$F(\{\lambda_j\}) = F_d(\{\lambda_j\}) = P(\lambda_j)$$

Jadi spektral garis berkoresponden pada λ_j, dengan definisi sebagai berikut :

$$P(\lambda_j) > 0 \text{ , jika } \lambda_j \text{ ada}$$
$$P(\lambda_j) = 0 \text{ , jika } \lambda_j \text{ tidak ada} \qquad (3.23)$$

Oleh simetri dari $F(d(\lambda)$ pada Proses bernilai real maka $f(-\lambda) = f(\lambda)$ dan $P(-\lambda) = P(\lambda)$.

Dari jumlahan fungsi diskrit dan kontinu maka dapat ditulis R_k sebagai berikut :

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda)\ f(\lambda)\ d\lambda + \sum_{\lambda_j > 0} \cos\ (k\lambda_j)\ P(\lambda_j) \qquad (3.24)$$

dan

$$R_o = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\ d\lambda + \sum_{\lambda_j > 0} P(\lambda_j) \qquad (3.25)$$

Untuk proses berharga real $P(0)=0$ dan berdasarkan persamaan (3.24) dan (3.25) diperoleh fungsi autokorelasi, yaitu :

$$\rho_k = \frac{R_k}{R_o} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda)\ f(\lambda)\ d\lambda + \sum_{\lambda_j > 0} \cos\ (k\lambda_j)\ P(\lambda_j)}{\int_{0}^{\pi} f(\lambda)\ d\lambda + \sum_{\lambda_j > 0} P(\lambda_j)} \qquad (3.26)$$