BAB II
MATERI PENUNJANG

Sebelum membicarakan proses stasioner dan metode cosinus pada zero-crossing dan autokorelasi , perlu dibahas lebih dahulu pengertian dan prinsip dasar yang digunakan dalam pembahasan permasalahan diatas.

2.1. Fungsi Distribusi

Variabel random adalah adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan kodomain garis real, yang memenuhi persyaratan : untuk setiap bilangan real r, terdapatlah kejadian $K_r = \{ \omega: X(\omega) \leq r \} \in \Omega$

Fungsi distribusi kumulatif dari random variabel X dinyatakan oleh $F_x(.)$ didefinisikan sebagai suatu fungsi dengan domain garis real dan kodomain [0,1] yang memenuhi untuk setiap bilangan real x :

$$F_X(x) = P [X \leq x] = P [\{\omega : x(\omega) \leq x \}] \tag{2.1}$$

Suatu random variabel X disebut diskrit jika range dari X countable dan fungsi distribusi kumulatif $F_x(.)$ serta fungsi densitas juga diskrit.

Suatu random variabel X disebut kontinu jika terdapat fungsi $f_x(.)$ sedemikian sehingga :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\, du \quad , \text{ untuk semua bilangan real } x.$$

Probabilitas dari suatu peristiwa (event) dinyatakan oleh $P(X \le x)$ dimana X adalah *variabel random*, dan fungsi F(x) ditulis dalam bentuk $F(x) = P(X \le x)$, untuk semua x real. F(x) disebut *fungsi distribusi kumulatif* atau singkatnya *fungsi distribusi*.

Ambil α dimana $0 \le \alpha \le 1$. F(x) dapat diekspresikan sebagai *kombinasi konveks* dari dua fungsi distribusi yang lain , yaitu :

$$F(x) = \alpha F_c(x) + (1-\alpha)F_d(x) \tag{2.2}$$

dimana F_c= kontinu absolut, F_d= fungsi step (tahap).
Fungsi densitas probabilitas dari X :

$$F_C(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \tag{2.3}$$

atau ekuivalen

$$f(x) = \frac{dF_c(x)}{dx} \tag{2.4}$$

F_d adalah fungsi dengan lompatan titik diskrit $x_1, x_2, x_3, \ldots$.dan p(x) adalah fungsi probabilitas, sehingga F_d dapat ditulis sebagai berikut :

$$F_d(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) \tag{2.5}$$

atau $\quad p(x_i) = F_d(x_i) - F_d(x_{i-1})$ (2.6)

$$P(a \le X \le b) = \alpha \int_a^b f(y)\,dy + (1-\alpha) \sum_{a \le x_i \le b} p(x_i) \quad (2.7)$$

Kita dapat menggunakan notasi diferensial :

$$dF_c(x) = f(x)\,dx$$

notasi untuk fungsi step (langkah):

$$dF_d(x) = 0 \;,\; x \neq x_i$$

$$dF_d(x) = p(x_i),\; x = x_i$$

dimana i = 1,2,3,....

$$dF(x) = \alpha\, dF_c(x) + (1-\alpha)\, dF_d(x) \quad (2.8)$$

$$P(X \le y) = \int_{-\infty}^{y} dF(x)$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{y} dF_c(x) + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{y} dF_d(x)$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx + (1-\alpha) \sum_{x_i \le y} p(x_i) \quad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dF(x) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dF_c(x) + (1-\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dF_d(x)$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)\ dx + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} f(x)\ p(x_i) \qquad (2.10)$$

dimana $g(X)$ adalah suatu fungsi dengan domain dan kodomain garis real. Ekspektasi dari $g(X)$ dinotasikan dengan $E(g(X))$. Moment dari X untuk order ke-k adalah

$$E(g(X)) = E(X^k),$$

kemudian :

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\ dF(x)$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^k\ f(x)\ dx + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k\ p(x_i) \qquad (2.11)$$

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad (2.12)$$

Theorema 2.1 :

X,Y variabel random nonnegatif , $P(X>z) \geq P(Y>z)$ untuk semua z maka $E(X) \geq E(Y)$, Jika $g(X)$ adalah fungsi naik non negatif maka $E(g(X)) \geq E(g(Y))$

Bukti

Diketahui fungsi komplementer :

$$P(X>x) = 1 - F(x)$$

ambil X random variabel nonnegatif dengan fungsi distribusi F, sehingga

$$E(X) = \int_{o}^{\infty} x dF(x)$$

$$= \int_{o}^{\infty} \left[\int_{o}^{x} dy \right] dF(x)$$

$$= \int_{o}^{\infty} \left[\int_{y}^{\infty} dF(x) \right] dy$$

$$= \int_{o}^{\infty} P(\ X>y\ )\ dy$$

$$= \int_{o}^{\infty} [1 - F(y)]\ dy \tag{2.13}$$

sekarang ambil X,Y dua random variabel nonnegatif yang memenuhi untuk semua z.

$$P(\ X>z) \geq P(\ Y>z\ )$$

$$E(X) = \int_{o}^{\infty} P(\ X>z\ )\ dz \geq \int_{o}^{\infty} P(\ Y>z\ )\ dz = E(Y) \tag{2.14}$$

Jika fungsi g(x) adalah fungsi naik nonnegatif dan $g^{-1}(x)$ adalah x yang sangat kecil yang memenuhi g(x) > z, sehingga :

$$P(g(X)>z) = P(X>g^{-1}(z)) \geq P(Y>g^{-1}(z))$$

$$= P(g(Y)> z\ ) \tag{2.15}$$

Analog dengan (2.14) dan (2.15), kita peroleh :

$$E(g(X)) \geq E(g(Y)) \qquad ∎$$

2.2 Konsep Multivariat

Pada analisa multivariat akan diulas pengertian dari independen dan dependen, covarian dan korelasi, dan probabilitas orthant dari distribusi bivariat simetri elliptikal.

Fungsi distribusi bersama dari random variabel $X_1, X_2, ..X_N$, dimana N adalah banyaknya populasi observasi dinyatakan oleh :

$$F(x_1, x_2, .., x_N) = P(X_1 \le x_1, ..., X_N \le x_N) \qquad (2.16)$$

Fungsi Distribusi marginal dari X_j, didefinisi sebagai berikut :

$$F_{X_j}(x_j) = \lim_{x_i \to \infty, i \neq j} F(x_1, x_2, ..., x_N)$$

$$\equiv F(\infty, ..., \infty, x, \infty, ..., \infty) \qquad (2.17)$$

Variabel Random $X_1, X_2, ..., X_N$ dikatakan independen jika $F(x_1, x_2, ..., x_N) = F_{X_1}(x_1) .....F_{X_N}(x_N)$, untuk semua x . selain variabel random $X_1, X_2, ..., X_N$ dikatakan dependen.

Untuk kasus kontinu :

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_N) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_N} f(u_1,u_2,\ldots,u_N)du_1 du_2\ldots du_N \tag{2.18}$$

Untuk $A \in R^n$,

$$P((X_1,X_2,\ldots,X_N \text{ in } A) = \int_A\cdots\int_A f(x_1,\ldots,x_N)dx_1\ldots dx_N \tag{2.19}$$

densitas marginal dari X_j :

$$F_{X_j}(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_N)\, dx_1\ldots dx_{j-1}dx_{j+1}\ldots dx_N$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_N) = f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_N}(x_N) \tag{2.20}$$

Misalkan $f(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ densitas bersama dari $X_1,X_2,\ldots,X_N$ dan dengan mengingat $g(X_1,X_2,\ldots,X_N)$.

$$E\,[\,g(X_1,\ldots,X_N)] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_N)\, f(x_1,\ldots,x_N)dx_1\ldots dx_N \tag{2.21}$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} X_j\right) = \sum_{j=1}^{N} E(X_j)$$

Kovarian dua variabel random X,Y :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &\equiv E\,[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E\,(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned} \tag{2.22}$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, dikatakan X,Y tidak berkorelasi.

X,Y dikatakan independen jika $E(XY) = E(X)E(Y)$

Koefisien korelasi X dan Y didefinisikan :

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\ \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \qquad (2.23)$$

$\rho_{xy} = 0$, jika dan hanya jika X,Y tidak berkorelasi.

$| \ \rho_{xy} \ | \leq 1$

2.3. Fungsi Pembangkit Momen Bersama

Fungsi Pembangkit Momen disingkat F P M. Untuk variabel random tunggal X, F P M :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \ , \qquad -a \leq t \leq a \qquad (2.24)$$

Momen dari X yang diperoleh dari pengulangan diferensial $M_X(t)$ pada t = 0 :

$$E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \qquad (2.25)$$

F P M dari dua variabel random X,Y adalah :

$$M(s,t) = E(e^{sX+tY}) \quad , -a \leq s \leq a \ ,-b \leq t \leq b \qquad (2.26)$$

F P M dari random variabel $X_1, X_2, \ldots, X_N$ dimana N adalah banyaknya populasi diperoleh

$$M_{X_1 \ldots X_N}(t_1 \ldots t_N) = E(e^{t_1 X_1 + \ldots + t_N X_N}) \qquad (2.27)$$

2.4. Distribusi Normal Multivariat.

Fungsi Densitas bersama dari X dan Y adalah :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_x \sigma_y\ \sqrt{(1-\rho^2)}}\ \exp\left(-\frac{q}{2}\right) \quad , -\infty \le x,y \le \infty \tag{2.28}$$

dimana

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

dikatakan Distribusi Normal Bivariat dengan parameter μ_X, μ_Y, σ_X^2, σ_Y^2, ρ. $|\rho|<1$. Khusus untuk normal standar $\mu_X = \mu_Y = 0$ dan $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$

F P M diberikan :

$$M(t_1,t_2) = \exp\left(t_1\mu_X + t_2\mu_Y + \frac{t_1^2\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y t_1 t_2 + t_2^2\sigma_y^2}{2}\right) \tag{2.29}$$

Probabilitas orthant $P(X_1,X_2)$ dari fungsi $f(X_1,X_2)$ adalah

$$P(X_1 \ge 0, X_2 \ge 0) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x_1,x_2)\ dx_1 dx_2 \tag{2.30}$$

dimana

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\ \sqrt{(1-\rho^2)}}\ \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right]$$

X_1, X_2 mempunyai Distribusi Normal Bivariat dengan mean 0 dan varian 1.

Ambil Vektor $x = (x_1, x_2)'$, dimana x' adalah transpose dari vektor x dan matrik $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ sehingga

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} |\,\Sigma\,|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\, x' \,\Sigma^{-1}\, x\right) \quad (2.31)$$

Σ adalah simetris dan definit positif ketika $|\,\rho\,| < 1$.

Diasumsikan :

$$\psi(u) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\, u\right)$$

maka akan kita peroleh densitas normal bivariat standar secara umum :

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2}\, \psi(x'\Sigma^{-1}x) \quad (2.32)$$

Distribusi densitas yang memenuhi formula untuk beberapa φ (u) dinyatakan pada $(0,\infty)$dan simetri matrik Σ yang definit positif disebut distribusi ellipsoidal atau distribusi simetri elliptika.

Diambil semua vektor sebagai vektor kolom

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)'$$

Vektor variabel random sedemikian sehingga $\mu_i = E(X_i)$ dan $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Rata-rata dari $\mathbf{X}$ adalah N X 1 vektor rata-rata :

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)'$$

dan matrik covarian adalah matrik Bujursangkar N X N :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots\cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots\cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots\cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

sebab σ_{jj} = Var(X_j) dan matrik Σ juga disebut matrik Kovarian-varian.

X dikatakan Distribusi Normal Multivariat jika dan hanya jika setiap kombinasi linier

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots\ldots + a_NX_N$$

mempunyai distribusi normal univariat. Terutama Σ adalah definit positif dan dia nonsingular dan X memiliki densitas :

$$f(x) = (2\pi)^{-N/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right] \tag{2.33}$$

Jika Σ adalah singular (tidak mempunyai invers) densitas tidak ada dan fungsi karakteristik selalu ada dan diberikan oleh :

$$E(e^{it'X}) = E(\cos(t'X)) + i\,E(\sin(t'X))$$

$$= \exp(i\mu't - \frac{1}{2}\,t'\Sigma t) \tag{2.34}$$

dimana $t = (t_1,t_2,\ldots\ldots,t_N)'$ adalah sebuah vektor real dan

$i = \sqrt{-1}$.

Notasi $N(\mu,\Sigma)$ menyatakan Distribusi Multivariat dengan mean vektor μ dan matrik covarian Σ. Dapat ditulis vektor random X : $X \sim N(\mu,\Sigma)$

Jadi Distribusi marginal beberapa subset komponen mempunyai Distribusi Normal Multivariat dengan koresponden mean, varian, covarian. Kemudian Jika A adalah matrik q X N sehingga :

$$AX \sim N(A\mu, A\Sigma A')$$

Komponen tidak berkorelasi dari X adalah Independen Mutualis

2.5. Konvergensi Stokastik

Barisan random atau proses random waktu diskrit adalah barisan variabel random :

$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_t, \ldots\ldots$$

Untuk suatu nilai tertentu, X_t adalah barisan bilangan yang dapat konvergen atau tidak konvergen. Ada beberapa interpretasi mengenai kekonvergenan barisan random, yaitu:

- Konvergensi dimana-mana .

Barisan bilangan X_t dikatakan mempunyai limit X, bila diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, kita dapat menemukan bilangan t_o sedemikian sehingga :

$$| X_t - X | < \varepsilon \text{ , untuk setiap } t > t_o$$

Dengan kata lain, limit barisan random X_t adalah variabel random X.

$$X_t \longrightarrow X \text{ untuk } t \longrightarrow \infty \tag{2.35}$$

- Konvergen hampir dimana-mana (almost everywhere).

Bila suatu himpunan hasil tertentu sedemikian sehingga :

$$\lim X_t = X \text{ , untuk } t \longrightarrow \infty \text{ ada}$$

dan probabilitasnya sama dengan satu , maka kita mengatakan barisan X_t konvergen hampir dimana-mana, sehingga dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$P \{ X_t \longrightarrow X \} = 1 \text{ , untuk } t \longrightarrow \infty \tag{2.36}$$

- Konvergensi dalam kuadrat mean.

Barisan X_t menuju variabel random X dalam kuadrat mean bila

$$E \{ | X_t - X |^2 \} \longrightarrow 0, \text{ untuk } t \longrightarrow \infty \tag{2.37}$$

ini disebut limit dalam mean.

- Konvergensi dalam probabilitas.

Probabilitas

$P \{ | X - X_t | > \varepsilon \}$ peristiwa $\{|X- X_t| > \varepsilon \}$ adalah barisan bilangan yang bergantung pada ε. Bila barisan ini menuju nol

$$P \{| X - X_t| > \varepsilon \} \longrightarrow 0 \text{ , } t \longrightarrow \infty \tag{2.38}$$

untuk setiap $\varepsilon > 0$. Maka kita mengatakan barisan X_t menuju variabel random X dalam ukuran probabilitas. Ini disebut **Konvergensi Stokastik.**

- Konvergensi dalam distribusi.

Kita menyatakan fungsi distribusi X_t dan X masing-masing $F_t(x)$ dan $F(x)$. Bila

$$F_t(x) \longrightarrow F(x)\ ,\ t \longrightarrow \infty \qquad (2.39)$$

untuk semua titik X dimana F(x) kontinu , maka kita mengatakan bahwa barisan X_t menuju X dalam distribusi.

Tinjau $0 \le X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_t$. Jika X_t naik hampir mendekati X , maka $t \to \infty$,$E(X_t) \to E(X)$. Ini disebut **konvergen monoton.**

Tinjau $|X_t| \le Y$ dengan probabilitas 1, dan $E(|Y|) < \infty$. Jika $X_t \to X$ maka $E(|X_t|) < \infty, E(|X|) < \infty$ dan $t \to \infty$, $E(X_t) \to E(X)$. Ini disebut **konvergen domonasi** .