BAB III

MODEL AUTOREGRESI ORDE DUA SISTEM KONTINU, A(2)

3.1. BENTUK MODEL A(2)

Untuk merumuskan suatu sistem autoregresi orde dua sistem kontinu, sebelumnya kita tinjau terlebih dahulu bentuk model autoregresi orde dua sistem diskrit atau AR(2). Model AR(2) dapat diperoleh dari bentuk umum model Autoregressive Moving Average atau model ARMA (2,1), yaitu

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta\, a_{t-1}$$

Model ini menyatakan ketergantungan X_t dengan nilai terdahulu X_{t-1} dan X_{t-2} serta mempunyai "ketergantungan autoregresi" pada orde ke dua. Ini juga memasukkan ketergantungan nilai a_t yang terdahulu pada orde pertama.

Model AR(2) adalah merupakan kasus khusus yang berhubungan dengan model ARMA (2,1). Model ini diperoleh dengan menetapkan $\theta_1 = 0$, maka model AR (2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + a_t$$

atau

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t$$

Untuk model ini X_t hanya tergantung pada X_{t-1} dan X_{t-2}. Jadi a_t dapat dihitung dari X_t, X_{t-1} dan X_{t-2} sendiri.

Sekarang kita akan membahas suatu sistem autoregresi orde dua sistem kontinu atau sistem A(2). Untuk suatu sistem autoregresi orde dua sistem kontinu dirumuskan dengan persamaan diferensial. Dimulai dengan persamaan diferensial orde dua dengan koefisien konstan yaitu berbentuk :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dX(t)}{dt} + \alpha_0 X(t) = 0$$

dimana α_0 dan α_1 adalah konstanta.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut digunakan substitusi

$$\frac{dX(t)}{dt} = DX(t) \quad \text{dimana } D = \frac{d}{dt} \text{ adalah operator}$$

sehingga persamaan diferensial orde dua dapat ditulis :

$$D^2X(t) + \alpha_1 DX(t) + \alpha_0 X(t) = 0$$

atau

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ X(t) = 0 \qquad \text{..........(3.1)}$$

dimana : $F(D)\ X(t) = 0$

$$F(D) = D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0$$

$$F(D) = (D - \mu_1)(D - \mu_2)$$

μ_1, μ_2 adalah akar-akar karakteristik dan F(D) adalah persamaan karakteristik.

Penyelesaian dari persamaan diferensial linier orde dua dengan koefisien konstan adalah :

a. Jika $\mu_1 = \mu_2$ maka penyelesaian persamaan diferensial homogen dinyatakan dengan

$$X(t) = C_1\, e^{\mu_1 t} + C_2\, t\, e^{\mu_2 t}$$

b. Jika $\mu_1 \neq \mu_2$ maka penyelesaian persamaan diferensial homogen dinyatakan dengan

$$X(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}$$

c. Jika akar-akar karakteristik adalah $a + bi$ dan $a - bi$ atau akar-akarnya konjugate komplek maka penyelesaian persamaan diferensial homogen dinyatakan dengan

$$Xt) = C_1 e^{(a + bi)t} + C_2 e^{(a - bi)t}$$

$$= e^{at} [C_1 e^{bit} + C_2 e^{-bit}]$$

$$= e^{at} [A \cos bt + \beta \sin bt]$$

Dari persamaan homogen $(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ X(t) = 0$ akan diubah menjadi suatu bentuk persamaan non homogen dengan memasukkan fungsi forcing Z(t) dengan $E[Z(t)\ \ Z(t-u)] = \sigma_z^2 \delta(u)$ menjadi

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ X(t) = Z(t) \qquad \text{..........(3.2)}$$

$$E[Z(t)] = 0$$

$$E[Z(t)Z(t-u)] = \sigma_z^2\ \delta(u)$$

Persamaan (3.2) adalah mewakili sistem autoregresi orde dua sistem kontinu. Untuk selanjutnya sistem autoregresi orde dua ditandai dengan A(2). Jika model A(2), persamaan (3.2) dimasukkan ke dalam data, maka α_0 dan α_1 diperoleh sebagai koefisien regresi. Dalam terapan suatu bentuk model, pemecahan koefisien ini adalah untuk kemantapan interpretasi respon sebagai vibrasi acak.

Untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan (3.2) dan untuk menyatakan hubungan antara output X(t) dan input Z(t) maka operator diferensial pada persamaan tersebut harus dinyatakan dalam bentuk invers, menjadi :

$$X(t) = (D + \alpha_1 D + \alpha_0)^{-1} Z(t)$$

Inversi dari operator diferensial diberikan dengan integrasi dari input Z(t) dengan fungsi Green pada sistem kontinu ditendai dengan G(v). Sehingga penyelesaiannya menjadi :

$$X(t) = (D + \alpha_1 D + \alpha_0)^{-1} Z(t)$$

$$= \int_0^{\infty} G(v)\ Z(t-v)\ dv$$

3.2. FUNGSI GREEN MODEL A(2)

Fungsi Green pada sistem kontinu ditandai dengan G(v) digunakan untuk mencari penyelesaian dari sistem A(2). Sebelum kita membahas fungsi Green pada sistem kontinu, terlebih dahulu kita tinjau fungsi Green pada sistem diskrit, khususnya fungsi Green pada model ARMA (2,1) dan fungsi Green pada model AR(2).

Kita mulai dengan pembentukan fungsi Green pada model ARMA (2,1). Bentuk model ARMA (2,1) di dapat dari bentuk umum model ARMA (n,n-1) dengan mengambil n = 2. Bentuk umum model ARMA (2,1) adalah

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta\ a_{t-1}$$

Dengan menggunakan metode "operator Backshift" B yang didefinisikan :

$$B\ X_t = X_{t-1}$$

atau

$$B^j\ X_t = X_{t-j}$$

maka model ARMA (2,1) dapat ditulis :

$$[1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2]\ X_t = [\ 1 - \theta_1 B\ ]\ a_t$$

Untuk membentuk fungsi Green G_j pada model ARMA (2,1) ini akan digunakan metode implisit dengan membandingkan koefisien-koefisien :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j\ a_{t-j} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j\ B^j \right] a_t$$

Maka model ARMA (2,1) dapat dinyatakan dengan :

$$[1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2] \left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j\ B^j \right] a_t = [1 - \theta_1 B]\ a_t$$

karena a_t ortogonal maka akan diberikan pemakaian operator identitas :

$$[1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2][G_0 + G_1 B + G_2 B^2 + \ldots] = [1 - \theta_1 B]$$

Apabila dibuat persamaan dari koefisien-koefisien yang berderajat sama dari B maka akan didapatkan :

$j = 0$: $G_0 = 1$

$j = 1$: $G_1 = \phi_1 - \theta_1$

$j = 2$: $G_2 = \phi_1^2 - \phi_1\theta_1 - \phi_2$

dan

$$G_j = \phi_1 G_{j-1} - \phi_2 G_{j-2} \quad , \ j \geq 3$$

Hasilnya yaitu :

$$[\ 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\ ]\ G_j = 0 \qquad , \ j \geq 2$$

Persamaan di atas dengan tepat digunakan apabila hanya beberapa Gj yang pertama yang akan dibutuhkan. Tetapi apabila dibutuhkan Gj untuk peramalan sejauh j yang lebih besar lagi maka dapat digunakan metode eksplisit sebagai berikut :

Untuk mendapatkan satu gambaran eksplisit untuk Gj dapat digunakan metode pembalikan operator pada autoregresive. Misal difaktorkan bagian autoregresive pada model ARMA (2,1) sebagai berikut :

$$[\,1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\,] = [\,1 - \lambda_1 B\,]\,[\,1 - \lambda_2 B\,]$$

yaitu :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1$$

$$\lambda_1 \,.\, \lambda_2 = -\phi_2$$

Dimana λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar karakteristik yang diberikan dengan :

$$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$$

sehingga :

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^{\,2} + 4\phi_2}}{2}$$

Penguraian dari X_t pada sistem ARMA (2,1) diberikan dengan

$$X_t = \frac{[1 - \theta_1 B]\ a_t}{[1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2]}$$

$$= \frac{[1 - \theta_1 B]\ a_t}{[1 - \lambda_1 B]\ [1 - \lambda_2 B]}$$

Apabila digunakan pecahan terbagi, perluasannya dapat dilakukan sebagai berikut ;

jika diasumsikan λ_1, λ_2 adalah berbeda maka :

$$X_t = \frac{[1 - \theta_1 B]\, a_t}{[1 - \lambda_1 B]\,[1 - \lambda_2 B]}$$

$$= \left[\frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{(1 - \lambda_1 B)} + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{1}{(1 - \lambda_2 B)} \right] a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\sim} \left[\left[\frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \lambda_1^{\,j} + \left[\frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \lambda_2^{\,j} \right] a_t$$

Yang mana fungsi Green diberikan dengan :

$$G_j = \frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \lambda_1^{\,j} + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_2^{\,j}$$

Gj tersebut dapat juga berlaku sebagai penyelesaian dari

$$[\, 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \,]\, G_j = 0$$

Dengan kondisi awal :

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \phi_1 - \theta_1$$

Penyelesaian dari persamaan diferensi orde ke-n adalah kombinasi linier dari λ^j, dimana λ adalah akar karakteristik. Karena akar-akar karakteristik dari persamaan :

$$[\, 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \,]\, G_j = 0 \qquad , j \geq 2$$

adalah λ_1 dan λ_2 maka akan didapatkan :

$$G_j = g_1 \lambda_1^{\,j} + g_2 \lambda_2^{\,j}$$

Dimana g_1 dan g_2 ditentukan dari kondisi awal, sehingga :

$$G_0 = g_1 + g_2 = 1$$

$$G_1 = g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 = \phi_1 - \theta_1$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1$$

Dari persamaan di atas g_1 dan g_2 dapat ditentukan sebagai berikut :

$$g_1 = \frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$g_2 = \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Selanjutnya akan dibahas pembentukan fungsi Green pada model AR (2). Bentuk model AR (2) didapat dari bentuk model ARMA (2,1) dengan mengambil $\theta_1 = \emptyset$.

Sehingga fungsi Green G_j dapat ditulis sebagai berikut :

$$G_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \lambda_1^j + \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \lambda_2^j$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)} \left[\lambda_1^{j+1} - \lambda_2^{j+1} \right]$$

Kita kembali pada fungsi Green pada sistem kontinu, $G(v)$. Di mana fungsi Green $G(v)$ pada sistem kontinu didefinisikan untuk sistem orde dua dengan relasi ekivalen, sebagai berikut :

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ X(t) = h(t) \qquad \text{..........(3.3)}$$

$$X(t) = (D + \alpha_1 D + \alpha_0)^{-1}\ h(t)$$

$$= \int_0^{\infty} G(v)\ h(t-v)\ dv \ \text{.....(3.4)}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} G(t-v)\ h(v)\ dv$$

untuk fungsi forcing $h(t)$.

Untuk mengetahui apakah input atau fungsi forcing $h(t)$ dalam persamaan (3.3) akan memberikan fungsi green $G(t)$ sebagai output. Kita membutuhkan fungsi $h(t)$ yang memberikan :

$$G(t) = \int_0^{\infty} G(v)\ h(t-v)\ dv$$

karena batas integral diatas dari nol sampai ∞ dapat diperoleh :

$$G(v) = 0 \quad , v < 0$$

dan menulis integral diatas menjadi :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(v)\ h(t-v)\ dv$$

membandingkan dengan sifat :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ \delta(t-u)\ du$$

jawabannya adalah fungsi delta, sehingga :

$$h(t) \equiv \delta(t)$$

dan mempunyai relasi ekivalen yang berhubungan dengan persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) menjadi :

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ G(t) = \delta(t) \qquad .....(3.4a)$$

$$G(t) = \int_0^{\infty} G(v)\ \delta(t-v)\ dv \qquad ...(3.4b)$$

Persamaan non homogen (3.4a) dapat diselesaikan dengan mengubahnya menjadi persamaan homogen dengan kondisi awal. Kondisi awal dapat diperoleh dengan memperhatikan sifat kontinuitas G(t). Dan ini diperoleh dari persamaan (3.4a). Karena fungsi delta adalah nol sampai t = 0 maka dapat ditulis :

$$G'(t) = G(t) = 0 \qquad , t < 0$$

Pada waktu t = 0, G"(t), derivatif kedua dari G(t) memiliki diskontinu yang sama dengan diskontinu dari fungsi delta. Oleh karena itu, G'(t) yang merupakan integral dari G"(t) juga memiliki diskontinu yang sama dengan diskontinu dari integral fungsi delta, yang merupakan fungsi step unit, maka :

$G'(0) = 1$

Demikian juga G(t), integral dari G'(t) memiliki diskontinu yang sama dengan diskontinu dari integral fungsi delta pada t = 0, seperti integral pada fungsi step unit maka G(t) kontinu pada t = 0 sehingga :

$G(0) = 0$

Maka persamaan non homogen (3.4a)

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ G(t) = \delta(t)$$

ekivalen dengan persamaan homogen

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0)\ G(t) = 0$$

dengan kondisi awal, $G(0) = 0$ dan $G'(0) = 1$

Penyelesaian persamaan homogen adalah :

$$G(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}$$

dimana :

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0) = (D - \mu_1)(D - \mu_2) = 0 \quad \text{......(3.5a)}$$

maka akar-akar karakteristiknya adalah :

$$\mu_1, \mu_2 = \frac{1}{2}\ (-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^{\,2} - 4\alpha_0}\ ) \quad \text{.........(3.5b)}$$

dengan mengganti kondisi awal, diperoleh :

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1\ \mu_1 + C_2\ \mu_2 = 1$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut, diperoleh :

$$C_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$C_2 = -\ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}$$

Maka penyelesaian persamaan homogen menjadi :

$$G(t) = \frac{e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} \qquad \text{untuk } t \geq 0 \quad ....(3.6)$$

$$= 0 \qquad \text{untuk yang lain}$$

Penyelesaian dapat diperoleh dengan substitusi bahwa persamaan (3.6) memenuhi persamaan (3.4a).

Fungsi Green G(t) adalah respon atau output dari sistem jika inputnya adalah fungsi impulse unit atau disebut sistem respon impulse. Secara fisik ini adalah gerakan massa dalam sistem vibrasi ketika suatu shock tiba-tiba (white noise) diterapkan padanya.

3.3. PENYELESAIAN PERSAMAAN NON HOMOGEN ORDE DUA

Fungsi Green memungkinkan untuk menyelesaikan persamaan non homogen dengan fungsi forcing sembarang, dengan mengekspresikan penyelesaian sebagai konvolusi.

~~Penyelesaian persamaan non homogen orde dua dapat ditulis,~~

$$X(t) = \int_0^{\infty} \frac{(e^{\mu_1 v} - e^{\mu_2 v})}{(\mu_1 - \mu_2)} \frac{1}{M} f(t-v)\, dv \qquad ....(3.7)$$

jika $\frac{1}{M} f(t) = \delta(t)$, kita peroleh $X(t) = G(t)$ dengan sifat dari fungsi Delta. Dan ini akan digunakan untuk mencari penyelesaian G(t). Untuk jelasnya didapatkan suatu respon jika f(t) adalah fungsi forcing, misal :

$$f(t) = 0 \qquad , t < 0$$

$$= F \qquad , t \geq 0$$

jika kita substitusikan ke dalam persamaan (3.7), integralnya menjadi :

$$X(t) = \frac{F}{M} \int_0^t \frac{(e^{\mu_1 v} - e^{\mu_2 v})}{(\mu_1 - \mu_2)} \, dv$$

$$= \frac{F}{M \mu_1 \mu_2} \left[\frac{\mu_2 e^{\mu_1 v} - \mu_1 e^{\mu_2 v}}{\mu_1 - \mu_2} \right]_\emptyset^t$$

$$X(t) = \frac{F}{K} \left[\frac{\mu_2 e^{\mu_1 t} - \mu_1 e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} + 1 \right] \quad .....(3.8)$$

dimana $K = M \mu_1 \mu_2$

Jika bagian real dari μ_1 dan μ_2 negatif, maka bagian pertama dalam kurung segiempat, yang disebut respon transien akan hilang, respon akhirnya akan stabil sampai nilai $\frac{F}{K}$.

3.4. FUNGSI AUTOKOVARIAN MODEL A(2)

Sebelum kita membahas fungsi autokovarian, kita tinjau fungsi dasar yang digunakan untuk dekomposisi adalah fungsi Delta Dirac $\delta(u)$, untuk sistem kontinu.

Persamaan :

$$f(t) = \int_{\sim}^{\sim} f(t-u)\,\delta(u)\,du = \int_{\sim}^{\sim} f(u)\,\delta(t-u)\,du$$

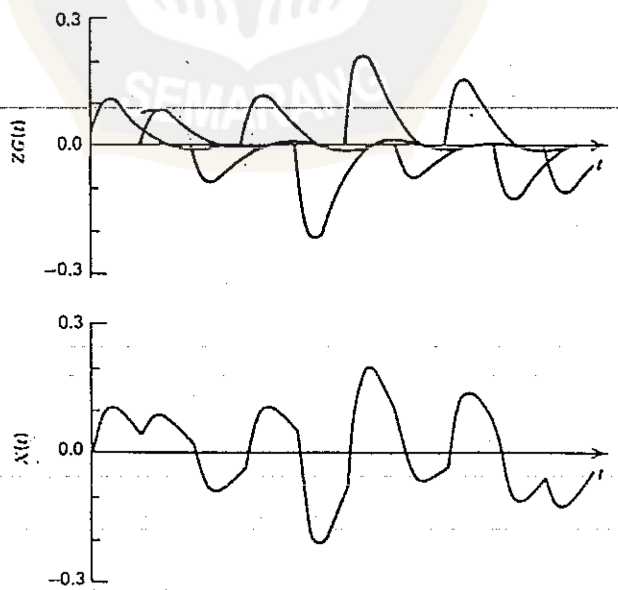
adalah dekomposisi ortogonal pada dirinya sendiri dengan t kontinu. $\delta(u)$ dimana $-\infty < u < \infty$ adalah ortogonal karena $\delta(u)$ independen dalam arti bahwa tidak ada $\delta(u)$ yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\delta(v)$, $v = u$, baik dalam bentuk jumlahan atau integrasi.

Demikian juga jika fungsi forcing ($\frac{1}{M}$) f(t) sama dengan white noise Z(t) kita mendapatkan sistem A(2) dengan penyelesaian atau dekomposisi ortogonal dapat ditulis dari persamaan (3.3) atau persamaan (3.7), sebagai berikut :

$$X(t) = \int_{0}^{\sim} \frac{(e^{\mu_1 v} - e^{\mu_2 v})}{(\mu_1 - \mu_2)} Z(t-v)\, dv$$

$$= \int_{-\sim}^{t} \frac{(e^{\mu_1 (t-v)} - e^{\mu_2 (t-v)})}{(\mu_1 - \mu_2)} Z(v)\, dv \quad ......(3.9)$$

Integral ini dapat dilihat sebagai suatu superposisi atau penjumlahan dari respon impulse yang diperoleh dari impulse Z(t) yang mempunyai kekuatan acak, masing-masing dengan mean nol dan varian σ_z^2. Hal ini dapat ditunjukkan dalam gambar (1).



Gambar (1) : Respon generasi dari sistem A(2)

Impulse ditunjukkan pada jarak berhingga, untuk kejelasan dalam gambar impulse digambarkan dalam bentuk overtime yang kontinu.

Setiap impulse dari kekuatan acak $Z\delta(t)$ menghasilkan respon $ZG(t)$nya sendiri. Respon aktual $X(t)$ adalah integral dari respon-respon tersebut di atas.

Dengan menggunakan persamaan (3.9) dengan sifat $E[Z(t)\ Z(t-s)] = \delta(s)\sigma_z^{\,2}$, untuk mendapatkan kovarian sistem A(2) adalah sama dengan cara untuk mendapatkan fungsi kovarian sistem A(2).

Bila kovarian $X(t)$ pada lag s (suatu variabel kontinu) ditandai dengan $\gamma(s)$ maka :

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= E\ [X(t)\ X(t-s)] \\
&= E\ [\textstyle\int_0^\infty G(v')\ Z(t-v')\ dv'\ \int_0^\infty G(v)\ Z(t-v)\ dv] \\
&= \textstyle\int_0^\infty \int_0^\infty G(v')\ G(v)\ E\ [Z(t-v')\ Z(t-s-v)]\ dv\ dv' \\
&= \sigma_z^{\,2} \textstyle\int_0^\infty [\int_0^\infty G(v')\ G(v)\ \delta(v+s-v')\ dv']\ dv \\
&= \sigma_z^{\,2} \textstyle\int_0^\infty G(v)\ G(v+s)\ dv
\end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan fungsi Green untuk sistem A(2) yang diberikan oleh persamaan (3.6) diperoleh :

$$\gamma(s) = \sigma_z^{\,2} \int_0^\infty G(v)\ G(v+s)\ dv$$

dengan :

$$G(v) = \frac{(e^{\mu_1 v} - e^{\mu_2 v})}{(\mu_1 - \mu_2)} \quad , \ v \geq 0$$

maka

$$\gamma(s) = \sigma_z^{\,2} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{\mu_1 v} - e^{\mu_2 v}}{(\mu_1 - \mu_2)}\right]\left[\frac{e^{\mu_1 (v+s)} - e^{\mu_2 (v+s)}}{(\mu_1 - \mu_2)}\right] dv$$

$$= \frac{\sigma_z^{\,2}}{2\,\mu_1\mu_2\,(\mu_1^{\,2} - \mu_2^{\,2})}\,(\mu_2\, e^{\mu_1 s} - \mu_1 e^{\mu_2 s}) \quad \ldots(3.10)$$

Pada kenyataannya varian X(t) yaitu kovarian pada lag nol diberikan sebagai berikut :

$$\gamma(0) = -\frac{\sigma_z^{\,2}}{2\,\mu_1\mu_2\,(\mu_1 + \mu_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.11)$$

kemudian untuk fungsi korelasinya adalah :

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

$$\rho(s) = \frac{\mu_2\, e^{\mu_1 s} - \mu_1\, e^{\mu_2 s}}{\mu_2 - \mu_1} \quad \text{untuk } s > 0 \;\ldots\ldots(3.12)$$

Sesuai dengan varian (3.11) bahwa bagian real dari μ_1 dan μ_2 mendekati nol, varian menjadi infinite dan sistem cenderung tidak stabil.

Persamaan (3.10) dan (3.12) dapat diterapkan untuk s negatif, didefinisikan oleh $\gamma(-s) = \gamma(s)$ dan $\rho(-s) = \rho(s)$. Maka untuk daerah keseluruhan s dari $-\infty$ sampai ∞ dapat ditulis :

$$\gamma(s) = \frac{\sigma_z^{\,2}}{2\,\mu_1\mu_2\,(\mu_1^{\,2} - \mu_2^{\,2})}\,(\mu_2\, e^{\mu_1 |s|} - \mu_1 e^{\mu_2 |s|})$$

dan

$$\rho(s) = \frac{\mu_2\, e^{\mu_1 |s|} - \mu_1\, e^{\mu_2 |s|}}{\mu_2 - \mu_1}$$