BAB II

MODEL AUTOREGRESI ORDE SATU SISTEM KONTINU A(1)

2.1. PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Respon sistem X(t) dimana kecepatan perubahan pada waktu t proporsional nilainya pada waktu tersebut dan berlawanan pada tandanya. Apabila kekonstanan dari proporsionalnya dilambangkan dengan α_o maka persamaan sistem tersebut adalah :

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\alpha_o X(t) \qquad \text{...........(2.1)}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} + \alpha_o X(t) = 0 \qquad \text{...........(2.2)}$$

Penyelesaian persamaan diferensial linier tersebut adalah

$$X(t) = C e^{\mu t}$$

Untuk mendapatkan nilai μ, disubstitusikan fungsi tersebut ke dalam persamaan (2.2) untuk mendapatkan :

$$(\mu + \alpha_o) C e^{\mu t} = 0$$

dengan $C e^{\mu t} \neq 0$, maka :

$$\mu + \alpha_o = 0$$

$$\mu = -\alpha_o$$

Maka penyelesaian persamaan (2.1) menjadi :

$$X(t) = C e^{-\alpha_o t} \qquad \text{...........(2.3)}$$

Konstanta C dapat diperoleh dari kondisi awal yang diketahui dari sistem tersebut, misal :

$$X(0) = Co$$

Maka dari persamaan (2.3) diperoleh C = Co dan penyelesai-

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

annya menjadi :

$$X(t) = Co\ e^{-\alpha_o t} \quad ....(2.3a)$$

Selanjutnya akan disinggung sifat fungsi Delta Dirac yang akan dipakai pada sistem stokastik kontinu. Analisa keseluruhan dari sistem stokastik kontinu berdasarkan pada unsur penting :

$$E[Z(t)\ Z(t-u)] = \sigma_z^{\ 2}\delta(u) \quad ....(2.4)$$

dimana $\delta(u)$ disebut fungsi Delta Dirac dan didefinisikan oleh :

$$\delta(u) = \infty \qquad , u = 0$$

$$\delta(u) = 0 \qquad , u \neq 0$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} \delta(u)\ du = 1 \text{ untuk sembarang } \tau$$

Sifat penting fungsi Delta Dirac yang akan digunakan adalah :

Untuk setiap fungsi kontinu f(t) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du$$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = \int_{-\infty}^{0-} f(t-u)\delta(u)du + \int_{0-}^{0+} f(t-u)\delta(u)du$$

$$+ \int_{0+}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du$$

Karena fungsi Delta Dirac adalah nol di setiap tempat kecuali pada u = 0, yaitu :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = 0 + \int_{0-}^{0+} f(t-u)\delta(u)du + 0$$

$$= f(t) \int_{0-}^{0+} \delta(u)du$$

$$= f(t)$$

Dengan mengganti $t - u = v$, diperoleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-v)dv$$

$$= f(t)$$

Fungsi yang berhubungan dengan fungsi Delta Dirac adalah fungsi step unit. Fungsi step unit didefinisikan sebagai :

$$S(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

Derivatif dari fungsi step unit adalah nol, kecuali pada t=0 dan diskontinu. Fungsi Delta Dirac juga nol, kecuali t=0 dan diskontinu. Oleh karena itu fungsi Delta dianggap sebagai derivatif dari fungsi step unit, yaitu :

$$\delta(u) = \frac{d}{dt} S(u)$$

Catatan bahwa fungsi step unit dan fungsi Delta mempunyai diskontinu pada $t = 0$.

Integral fungsi step didefinisikan sebagai :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} S(u)\ du \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$$

disebut suatu unit ramp dan merupakan fungsi yang kontinu.

2.2. BENTUK MODEL A(1)

Untuk merumuskan sistem autoregresi orde satu sistem kontinu, dimulai dengan suatu persamaan diferensial

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

homogen :

$$\frac{dX(t)}{dt} + \alpha_o X(t) = 0$$

yaitu :

$$(D + \alpha_o)\ X(t) = 0$$

dengan :

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

dan diubah ke dalam suatu persamaan diferensial non homogen dengan memasukkan suatu fungsi forcing Z(t) dengan $E\ [Z(t)\ Z(t-u)] = \sigma_z^2\ \delta(u)$ menjadi :

$$(D + \alpha_o)\ X(t) = Z(t) \qquad \text{..........(2.5)}$$

$$E\ [Z(t)] = 0$$

$$E\ [Z(t)\ Z(t-u)] = \sigma_z^2\ \delta(u)$$

Persamaan (2.5) mewakili suatu sistem autoregresi orde satu sistem kontinu. Untuk selanjutnya sistem autoregresi orde satu sistem kontinu ditandai dengan A(1).

Untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan (2.5) dan untuk menyatakan hubungan antara output X(t) dan input Z(t) maka operator diferensial pada persamaan tersebut harus dinyatakan dalam bentuk invers menjadi :

$$X(t) = (D + \alpha_o)^{-1}\ Z(t)$$

Invers dari operator diferensial diberikan dengan integrasi dari input Z(t) dengan fungsi Green pada sistem kontinu yang ditandai dengan G(v), sebagai berikut :

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(v)\ Z(t-v)\ dv$$

$$= \int_{-\infty}^{t} G(t-v)\ Z(v)\ dv \qquad \text{..........(2.6)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3. FUNGSI GREEN MODEL A (1)

Fungsi Green $G(v)$ didefinisikan untuk suatu sistem orde satu dengan relasi ekivalen, sebagai berikut :

$$(D + \alpha_o)\ X(t) = h(t) \qquad \text{.........(2.7a)}$$

$$X(t) = (D + \alpha_o)^{-1}\ h(t)$$

$$= \int_o^{\infty} G(v)\ h(t-v)\ dv \qquad \text{.........(2.7b)}$$

untuk fungsi forcing $h(t)$

Untuk mengetahui apakah input atau fungsi forcing $h(t)$ dalam persamaan (2.7a) akan memberikan fungsi Green $G(t)$ sebagai output. Kita membutuhkan fungsi $h(t)$ yang memberikan :

$$G(t) = \int_o^{\infty} G(v)\ h(t-v)\ dv$$

Karena batas integral persamaan di atas dari nol sampai tak hingga dapat diperoleh :

$$G(v) = 0 \qquad , v < 0$$

Dan menulis integral diatas menjadi :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(v)\ h(t-v)\ dv$$

Membandingkan dengan sifat :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ \delta(t-u)\ du$$

jawabannya adalah fungsi delta, sehingga :

$$h(t) \equiv \delta(t)$$

dan mempunyai relasi ekivalen yang berhubungan dengan persamaan (2.7a) dan (2.7b).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$(D + \alpha_o)\ G(t) = \delta(t) \qquad \ldots\ldots\ldots(2.8a)$$

$$G(t) = \int_o^{\sim} G(v)\ \delta(t-v)\ dv \qquad \ldots\ldots\ldots(2.8b)$$

Jadi G(t) adalah penyelesaian persamaan diferensial non homogen (2.8a).

Persamaan (2.8a) dapat diselesaikan dengan menempatkan kembali suatu persamaan diferensial homogen dengan kondisi awal yang diperoleh dari fungsi Delta. Karena input $\delta(t)$ adalah nol sampai $t = 0$.

$$G(t) = 0 \qquad , t < 0$$

Pada $t = 0$ derivatif G(t) memuat diskontinu yang sama dengan fungsi Delta. Fungsi G(t) yang merupakan integral dari derivatifnya, memuat diskontinu yang sama pada $t = 0$. Tinggi lompatan diskontinu adalah satu.

$$G(0) = 1$$

Jadi persamaan (2.8a) ekivalen ke persamaan homogen :

$$(D + \alpha_o)\ G(t) = 0$$

dengan kondisi awal :

$$G(0) = 1$$

Sehingga didapat penyelesaian dengan Co = 1, sebagai berikut :

$$G(t) = e^{-\alpha_o t} \qquad , t \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.9)$$

$$= 0 \qquad , t < 0$$

Dengan menggunakan fungsi Green dari sistem A(1) dapat menulis persamaan (2.6) sebagai berikut :

$$X(t) = \int_o^{\sim} e^{-\alpha_o v}\ Z(t-v)\ dv$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_o(t-v)} Z(v)\, dv \qquad \ldots\ldots\ldots(2.30)$$

Persamaan ini mewakili suatu penyelesaian dari persamaan diferensial non homogen (2.5).

2.4. FUNGSI AUTOKOVARIAN MODEL A(1)

Dengan menggunakan persamaan (2.30) dengan sifat $E\,[Z(t)\,Z(t-s)] = \delta(s)\sigma_z^2$, kovarian X(t) pada lag s (suatu variabel kontinu) ditandai dengan $\gamma(s)$, ditulis sebagai berikut :

$$\gamma(s) = E\,[X(t)\,X(t-s)]$$

$$= E\,[\int_0^{\infty} G(v')\,Z(t-v')\,dv' \int_0^{\infty} G(v)\,Z(t-v)\,dv]$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} G(v')\,G(v)\,E\,[Z(t-v')\,Z(t-s-v)]\,dv\,dv'$$

$$= \sigma z^2 \int_0^{\infty} [\int_0^{\infty} G(v')\,G(v)\,\delta(v+s-v')\,dv']\,dv$$

$$= \sigma z^2 \int_0^{\infty} G(v)\,G(v+s)\,dv$$

Pada tahap terakhir digunakan sifat Delta yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\,\delta(u)\,du = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\delta(t-u)\,du$$

Dengan memperhatikan yang ada dalam kurung :

$$[\int_0^{\infty} G(v')\,G(v)\,\delta(v+s-v')\,dv']$$

atau sama dengan

$$[\int_0^{\infty} G(v')\,\delta(v+s-v')\,dv']\,G(v)$$

karena

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\int_0^\infty G(v')\ \delta(v+s-v')\ dv' = \int_0^\infty G(v+s-v')\ \delta(v')\ dv'$$

$$= G(v+s)$$

Sehingga yang ada dalam kurung menjadi :

$$G(v)\ G(v+s)$$

Dengan menggunakan fungsi Green untuk sistem A(1) yang diberikan oleh persamaan (2.9) diperoleh :

$$\gamma(s) = \sigma_z^2 \int_0^\infty G(v)\ G(v+s)\ dv$$

dengan $G(v) = e^{-\alpha_0 v}$

$$\gamma(s) = \sigma_z^2 \int_0^\infty e^{-\alpha_0 v}\ e^{-\alpha_0 (v+s)}\ dv$$

$$= \sigma_z^2 \int_0^\infty e^{-\alpha_0 v - \alpha_0 v + \alpha_0 s}\ dv$$

$$= \sigma_z^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha_0 v - \alpha_0 s}\ dv$$

$$= \sigma_z^2\ e^{-\alpha_0 s} \int_0^\infty e^{-2\alpha_0 v}\ dv$$

$$= \sigma_z^2\ e^{-\alpha_0 s} \left[\frac{e^{-2\alpha_0 v}}{2\alpha_0} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{\sigma_z^2}{2\alpha_0}\ e^{-\alpha_0 s} \quad , s \geq 0 \qquad \text{.........(2.31)}$$

Varian X(t) yaitu kovarian pada lag nol diberikan dengan

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_z^2}{2\alpha_0} \qquad \text{.........(2.32)}$$

Fungsi korelasinya adalah :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

$$\rho(s) = \frac{\frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o} e^{-\alpha_o s}}{\frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o}}$$

$$= e^{-\alpha_o s} \quad , s > 0 \qquad \text{.........(2.33)}$$

Dengan $\rho(-s) = \rho(s)$ dan $\gamma(-s) = \gamma(s)$, fungsi autokovarian dan fungsi autokorelasi dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\gamma(s) = \frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o} e^{-\alpha_o |s|} \qquad \text{.........(2.34)}$$

$$\rho(s) = e^{-\alpha_o |s|} \qquad \text{.........(2.35)}$$

berlaku untuk s dari $-\infty$ sampai ∞.

Dari persamaan (2.34) dan (2.35) kondisi kestabilannya $\alpha_o > 0$, hal ini dapat diartikan sebagai kondisi varian finit atau autokovarian / autokorelasi yang menurun.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)