

BAB I

PENDAHULUAN

Peneliti dalam hampir semua disiplin ilmu selalu berhubungan dengan pengamatan data (observasi data). Rangkaian observasi data yang waktunya berurutan dinamakan runtun waktu atau time series. Proses runtun waktu dapat berlangsung secara diskrit atau kontinu. Runtun waktu kontinu berbentuk suatu persamaan diferensial.

Pada skripsi ini akan dibahas model autoregresi orde dua pada sistem kontinu. Pada kenyataannya, sering ditemui sistem di alam memakai model autoregresi orde dua sistem kontinu. Misalnya pada Sistem Spring Mass Dashpot. Model autoregresi orde dua sistem kontinu ini ditunjukkan sebagai persamaan diferensial linier orde dua dengan koefisien konstan. Solusi dari model ini akan dicari dengan memakai fungsi Green. Sebelum memasuki ke pembahasan model autoregresi orde dua sistem kontinu, akan diperkenalkan lebih dulu model autoregresi orde satu sistem kontinu di bawah ini.

$X(t)$ adalah observasi data pada waktu t pada sistem kontinu, $X(t)$ untuk nilai perubahan pada waktu t seimbang ke harganya pada waktu t dan berlawanan dengan tandanya. Jika kostanta keseimbangan dinyatakan dengan α_0 maka persamaan diferensialnya berbentuk :

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\alpha_0 X(t)$$

atau

$$\frac{dX(t)}{dt} + \alpha_0 X(t) = 0 \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

Persamaan tersebut disebut persamaan diferensial orde satu.

Penyelesaian persamaan diferensial orde n mempunyai bentuk jumlahan n eksponensial, sehingga penyelesaian persamaan (1.1) adalah :

$$X(t) = C e^{\mu t}$$

Dari persamaan diferensial homogen orde satu :

$$\frac{dX(t)}{dt} + \alpha_0 X(t) = 0$$

dapat dirumuskan suatu sistem autoregresi orde satu, sistem kontinu dengan mengubah persamaan diferensial homogen orde satu tersebut menjadi persamaan diferensial non homogen orde satu yaitu dengan memasukkan fungsi forcing $Z(t)$ menjadi :

$$(D + \alpha_0) X(t) = Z(t) \quad \text{dimana } D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

Penyelesaian persamaan diferensial non homogen orde satu yang dinyatakan dengan suatu model autoregresi orde satu A(1) adalah :

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(v) Z(t-v) dv$$

dimana $Z(t)$ adalah suatu fungsi forcing atau input dari suatu sistem dan $G(v)$ adalah fungsi Green.

Persamaan diferensial orde dua dengan koefisien konstan yang merupakan inti dari skripsi ini dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dX(t)}{dt} + \alpha_0 X(t) = 0$$

dimana α_1 dan α_0 adalah koefisien regresi.

Untuk menyelesaikan persamaan tersebut digunakan substitusi $\frac{dX(t)}{dt} = D X(t)$ dimana $D = \frac{d}{dt}$ adalah operator. Sehingga persamaan diferensial orde dua dapat ditulis :

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0) X(t) = 0$$

Untuk menyelesaikannya dicari akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik.

Dari persamaan homogen $(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0) X(t) = 0$ akan diubah menjadi suatu bentuk persamaan non homogen dengan memasukkan fungsi forcing $Z(t)$ dengan $E [Z(t) Z(t-u)] = \sigma_z^2 \delta(u)$ menjadi :

$$(D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0) X(t) = Z(t) \dots\dots\dots(1.2)$$

$$E[Z(t)] = 0$$

$$E[Z(t)Z(t-u)] = \sigma_z^2 \delta(u)$$

Persamaan (1.2) mewakili sistem autoregresi orde dua sistem kontinu atau ditandai dengan A(2).

Untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan (1.2) maka operator diferensial pada persamaan tersebut harus dinyatakan dalam bentuk invers. Invers dari operator diferensial diberikan dengan integrasi dari input $Z(t)$ dengan fungsi Green pada sistem kontinu yang ditandai dengan $G(v)$. Sehingga penyelesaiannya menjadi :

$$\begin{aligned}
 X(t) &= (D + \alpha_1 D + \alpha_0)^{-1} Z(t) \\
 &= \int_0^{\infty} G(v) Z(t-v) dv
 \end{aligned}$$

Pada sistem kontinu fungsi Green berguna untuk operator diferensial dimana fungsi Green untuk operator diferensial merupakan inti dari operator integral yang merupakan invers dari operator diferensial.

Pada terapannya sistem A(2) banyak digunakan dalam bidang engineering, misal dalam masalah fisika-matematika dimana banyak diberikan dalam bentuk persamaan diferensial. Di sini pembahasan akan dibatasi hanya mengenai model autoregresi orde dua sistem kontinu A(2).

Adapun sistematika penulisannya adalah :

Bab I berisi pendahuluan.

Bab II akan membahas model autoregresi orde satu sistem kontinu, A(1) yang meliputi persamaan diferensial orde satu, fungsi Green model A(1) dan dibahas fungsi autokovarian model A(1).

Pada bab III akan membahas model autoregresi orde dua sistem kontinu, A(2) dan karakteristiknya, fungsi Green model A(2), penyelesaian persamaan non homogen serta fungsi autokovarian model A(2).

Pada bab IV akan membahas model A(2) pada sistem Spring Mass Dashpot yang meliputi persamaan diferensial sistem Spring Mass Dashpot, penyelesaian persamaan homogen dan kestabilan serta model A(2) pada sistem Spring Mass Dashpot.

Bab V berisi kesimpulan.