BAB II
MATERI DASAR

2.1. VEKTOR DAN MATRIK

2.1.1 VEKTOR

Definisi 2.1.1.1

Vektor adalah himpunan dari bilangan real yang sejenis. Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ adalah vektor dari n elemen atau komponen.

Definisi 2.1.1.2

Sebuah matriks yang hanya terdiri dari satu baris atau satu colom saja disebut vektor (vektor baris atau vektor kolom).

Contoh : vektor kolom dengan elemen 3

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 22 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

vektor baris $\mathbf{v} = (-2,\ 1\ )$ dengan elemen 2

Definisi 2.1.1.3

Misal himpunan V sedemikian sehingga jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan $\alpha, \beta \in R$, maka memenuhi postulat sebagai berikut:

Penambahan

i. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

ii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

iii. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

iv. Terdapat $0 \in V$, $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$

v. Terdapat $-\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$

Perkalian

vi. $\alpha\mathbf{u} \in V$

vii. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

ix. $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

x. $I\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Maka V disebut ruang vektor dan elemen-elemennya disebut vektor.

Definisi 2.1.1.4

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ adalah sembarang vektor pada R^n, maka dot product didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Contoh: $\mathbf{u} = (2,3,1,4)$ $\mathbf{v} = (1,0,1,3)$

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = (2.1+3.0+1.1+4.3) = 15$$

Jika hasi dot produk dari dua vektor sama dengan nol, maka dua vektor tersebut dikatakan orthogonal.

Definisi 2.1.1.5

Himpunan m buah vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ disebut tak bebas linier bila terdapat skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_m$ yang tidak semuanya nol sedemikan sehingga $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_m\mathbf{v}_m = 0$

Didalam hal lain himpunan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_m\}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

disebut bebas linier, dengan kata lain apabila $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_mv_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$

contoh :

Pandang ruang vektor R^3 untuk $v_1 = (3,1,2)$ $v_2=(1,2,1)$ dan $v_3=(2,-1,1)$ ketiga vektor tersebut tidak bebas linier karena $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_2v_2 = 0$ maka $\alpha_1(3,1,2,) + \alpha_2(1,2,1) + \alpha_3(2,-1,1) = (0,0,0)$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

ada $\alpha \neq 0$ yaitu misalnya $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$

contoh :

$u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,-1,0)$, $u_3 = (0,9,-1)$ adalah vektor-vektor yang merupakan bebas linier sebab dari persamaan $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3 = 0 \in R^3$

$$\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,-1,0)+\alpha_3(0,9,-1) = 0 \in R^3$$
$$\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 - \alpha_2 + 9\alpha_3 = 0$$
$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

diperoleh hanya $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Definisi 2.1.1.6

Sebuah vektor **u** dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ jika terdapat

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sakal-skalar α_i, sedemikian sehingga:

$$u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i ,$$

Contoh:

a = (2,1,2), **b** = (1,0,3) **c** = (3,1,5) **a** bisa dikatakan kombinasi linier dari **b** dan **c** terlebih dulu menghitung harga-harga α_1 dan α_2

$(2,1,2) = \alpha_1(1,0,3) + \alpha_2(3,1,5)$

$2 = \alpha_1 + 3\alpha_2$ ....1)

$1 = 0\,\alpha_1 + \alpha_2$........2)

$2 = 3\,\alpha_1 + 5\alpha_2$........3)

Dari ke tiga persamaan tersebut didapat :

dari persamaan 2) $\alpha_2 = 1$

dari persamaan 1) $\alpha_1 = 2 - 3\,\alpha_2 = 2 - 3.1 = -1$

harga $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ substitusi ke persamaan

$(2,1,2) = \alpha_1(1,0,3) + \alpha_2(3,1,5)$

$(2,1,2) = -1(1,0,3) + 1(3,1,5)$

paka penulisan persamaan yang diminta a = -b + c

Definisi 2.1.1.7

Suatu vektor **u** dan **v** ditulis **u** ≤ **v** dan **u** ≠ **v** apabila $u_i \le v_i$ untuk semua i dan terdapat paling sedikit satu elemen dalam **u** yang lebih kecil dari elemen di **v**

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

contoh :

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ dan } v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

berarti $u_i \leq v_i$ karena komponen ke-4 dari **u** kurang dari komponen ke-4 dari **v**

2.1.2 MATRIKS

Definisi 2.1.2.1

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan - bilangan. Bilangan - bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen-elemen matriks.

Matriks dinotasikan dengan menggunakan huruf besar A, B, K, L dan lain-lain.

Secara lengkap ditulis $B = (b_{ij})$ artinya suatu matriks B yang elemen-elemennya b_{ij} dimana indeks i menyatakan baris dan j menyatakan kolom ke-j dari elemen-elemen tersebut.

untuk $i = 1,2, \ldots ,m$ dan $j = 1,2, \ldots ,n$, yang berarti banyaknya baris = m dan banyaknya kolom = n pandangB = (b_{ij}) sebagai matriks $m \times n$ ditulis:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \text{ ordo } m \times n$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika :

a. m = n Matriks B merupakan matriks bujur sangkar

b. m > n Matriks B merupakan matriks panjang vertikal

c. m < n Matriks B merupakan matriks panjang horisontal

Catatan 1.

Dua matriks A dan B dikatakan sama jika dan hanya jika

a. Matriks A dan B ukuran (ordonya) sama.

b. elemen-elemen matriks A dan B sama

$(a_{ij} = b_{ij})$

Definisi 2.1.2.2

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A dan B, (A+B) adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 0 & 4 \\ 14 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Sedang A+C dan B+C tidak dapat didefinisikan

Definisi 2.1.2.3

Jika $A = (a_{ij})$ berukuran (pxq) dan $B = (b_{ij})$ berukuran (qxr) maka AB adalah suatu matriks

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$C = (c_{ij})$ berukuran (pxr). Perkalian matriks A dan B bila banyaknya kolom matriks A = banyaknya baris matriks B dan elemen c_{ij} sebagai hasil perkalian matriks A dan B, AB = AB = C,dimana matriks C berukuran pxr diberikan :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

Contoh :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -7 \\ 6 & 6 & 15 & -15 \\ 10 & 10 & 23 & -23 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.2.4

Misal $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ keduanya berukuran sama maka A–B adalah suatu matriks $D = (d_{ij})$ dimana $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ untuk setiap i dan j atau $B - A = E$ dimana $e_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$ untuk setiap i dan j

Definisi 2.1.2.5

Suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran (mxn) mempunyai transpose A^T berukuran (nxm) yang diperoleh dari A dengan menuliskan baris ke – i dari A, $i = 1,2, \ldots ,m$ sebagai kolom ke – i dari A^T Dengan kata lain $A^T = (a_{ji})$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh :

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan } C^T = [\ 3 \quad 2 \quad 5\ ]$$

Operasi transpose mempunyai 4 sifat dalam teorema berikut:

Teorema 2.1.2.1

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Bukti : Misal $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ maka $(A + B)^T$

$= (a_{ij} + b_{ij})^T = (c_{ij})^T$

$= (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = A^T + B^T$

Teorema 2.1.2.2

$$(A^T)^T = A$$

Bukti : Misal $A = (a_{ij})$, maka

$(A^T)^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$

Teorema 2.1.2.3

$$(kA)^T = kA^T \quad : \text{dimana } k \text{ adalah skalar}$$

Bukti : Ambil $A = (a_{ij})$, maka $A^T = (a_{ji})$

$(kA) = ka_{ij}$, maka $(kA)^T = (k)^T(a_{ij})^T$

$= (k)(a_{ji}) = k(A)^T$

Teorema 2.1.2.4

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Bukti : Ambil $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, maka elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari AB adalah $a_{i1}b_{1j}$ + $a_{i2}b_{2j}$ + . . . + $a_{in}b_{nj}$. Yang juga merupakan elemen

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $(AB)^T$. Dilain pihak baris ke-j dari B^T adalah kolom ke-j dari B yaitu ($b_{1j} + b_{2j} + \dots + b_{nj}$) dan kolom ke-i dari dari A^T adalah baris ke-i dari A yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

Jadi elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $B^T A^T$ adalah :

$$[\, b_{1j} + b_{2j} + \dots + b_{nj} \,] \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

$$= b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \dots + b_{nj}a_{in}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

benar untuk semua i dan j sehingga

$(AB)^T = A^T B^T$

Definisi 2.1.2.5

Matriks identitas adalah matriks bujursangkar yang unsur-unsur diagonal utamanya sama dengan satu, dengan kata lain (I_{ij}) adalah matriks satuan bila $I_{ij}=1$ untuk $i=j$ dan nol untuk $i \neq j$ matriks satuan sering ditulis I_n, n menunjukan ukuran matriks bujur sangkar.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

contoh :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.2.6

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh *det*, dan didefinisikan *det*(A) sebagai jumlah hasil elementer bertanda dari A. Jumlah *det*(A) dinamakan *determinan* A.

Dimana matriks kuadrat adalah matriks yang berordo mxn atau nxn (m=n). Dengan kata lain matriks kuadrat sama dengan matriks bujur sangkar.

Contoh : Matriks berordo 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Contoh : Matriks berordo 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{23} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{22} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{21}$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{23}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.1.2.7

A adalah matriks n×n dikatakan non singular jika determinannya tidak sama dengan nol. Jika determinannya sama dengan nol dikatakan matriks singular.

Contoh: matriks singular pada A

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \text{ karena } |A| = (2.4 - 2.4) = 0$$

Definisi 2.1.2.8

Matriks Adjoin adalah matriks transpose dari matriks (A_{ij}) dengan A_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij}

$$\mathrm{Adj}\ (A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh : $A = \begin{bmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{3} \end{bmatrix}$ kofaktor dari elemen a_{ij} adalah

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2|3| = 3$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^2|1| = -1$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3|4| = -4$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^4|3| = 3$$

Jadi didapat,

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.1.2.9

Jika A matriks bujur sangkar non singular, invers dari A, ada, didefinisikan sebagai A^{-1} maka $AA^{-1}=A^{-1}A = I$

Dengan adanya matriks adjoin dapat dicari invers suatu matriks dimana A^{-1} diberikan :

$$A^{-1} = \frac{Adj.A}{Det(A)} = \frac{Adj.A}{|A|}, \quad |A| \neq 0$$

Contoh : diberikan matrik $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = [2(3)]-[1(4)] = 2$$

$$adj.A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.A}{Det(A)} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2.2. ATURAN CRAMER PADA SISTIM PERSAMAAN LINIER

Definisi 2.2.1

Bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, disebut persamaan linier. a_i dan b adalah skalar, dimana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan. $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut variabel Sekumpulan harga dari variabel $x_1 = k_1$,

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$x_2 = k_2$, $x_n = k_n$, disebut jawab (solusi) dari persamaan, apabila terpenuhi $a_1k_1 + a_2k_2 + \ ... \ + a_nk_n = b$ jawab tersebut dapat kita tulis dalam notasi

vektor : $[k_1, k_2, \ ... \ , k_n]$ atau $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

disebut jawab vektor dari persamaan.

Contoh :

Persamaan 2x + 3y + z = 5. Harga-harga x=0, y=1, dan z=2 adalah suatu solusi, karena substitusi 2.0 + 1.2 + 1.2 = 5 dan dapat ditulis :(2,0,1)

Catatan :Persamaan diatas merupakan persamaan yang mempunyai solusi lebih dari satu.

Pandang m buah persamaan linier dengan n buah variabel

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... \ + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... \ + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ .... \ + a_{in}x_n = b_i \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ .... \ + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \ ....*)$$

a_{ij} dan b_i masing-masing adalah koefisien-koefisien dan konstanta persamaan -persamaan linier *) tersebut.

Dengan perkalian matriks, persamaan diatas dapat ditulis :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ dimana }, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

berukuran (m×n) dan disebut matrik koefisien dari susunan *),

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ dan } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor kolom variabel dan konstanta.

Teorema 2.2.1 ATURAN CRAMER

Jika susunan persamaan linier non homogen $Ax=b$ dan $b \neq 0$ dengan $m=n$ maka akan mempunyai jawab tunggal yang dapat ditentukan dengan rumus :

$$x_k = \frac{D_k}{D} \quad \text{dimana } D = |A| \neq 0$$

$$D_k = \det (A_k)$$

Dimana A_k adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan elemen-elemen dalam kolom ke-j dari A dengan elemen-elemen dalam matriks.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bukti :

Susunan persamaan dapat ditulis $A\mathbf{x} = b$, Jadi $\mathbf{x} = A^{-1}b$ telah diketahui (definisi 2.1.2.9)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A^{-1} = \frac{Adj.A}{Det(A)} = \frac{Adj.A}{|A|},\ |A| \neq 0 \text{ sehingga}$$

$$X = A^{-1}b = \frac{Adj.A}{|A|}.b,\ |A| \neq 0, \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{Det.(A)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & & a_{nk} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau $x_k = \frac{1}{Det.(A)} \left[a_{1k}b_1 + a_{2k}b_2 + \cdots a_{nk}b_k \right]$

untuk $k = 1,2,3,\ldots,n$, pada definisi 2.1.2.6 untuk $b_1 a_{1k} + b_2 a_{2k} + \ldots + b_n a_{nk}$ adalah determinan dari matriks A dengan mengganti kolom ke-k dengan konsatanta $b_1,\ b_2,\ \ldots\ ,b_n$ sebut determinan itu dengan D_k sehingga didapat :

$x_k = \frac{D_k}{D}$, dimana $D = det(A) \neq 0$

Contoh :Selesaikan persamaan-persamaan berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

$$2x - 5y + 2z = 7$$

$$x + 2y - 4z = 3$$

$$3x - 4y - 6z = 5$$

persamaan tersebut jumlah persamaan m = jumlah variabel n = 3

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = (2)(2)(-6)+(-5)(-4)(3)+ (2)(1)(-4)-(2)(3)(2)- (-4)(-4)(2)-(-6)(-5)(1) = -46$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jadi untuk harga det(A) = D = -46 ≠ 0 Dengan aturan Cramer diperoleh untuk :

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -230$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -46$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -46$$

Harga-harga x, y, z didapat :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-230}{-46} = 5, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-46} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-46}{-46} = 1$$

Jadi didapat untuk harga x = 5, y = 1 dan z = 1

2.3. HIMPUNAN KONVEK DAN TITIK EKSTRIM

Definisi 2.3.1

Himpunan $S \subset R^n$ dikatakan konvek bila terdapat titik $a_1, a_2 \in S$ untuk titik $(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2) \in S$ untuk semua $\lambda \in [0,1]$.Tidak terpenuhi pernyataan diatas disebut himpunan nonkonvek.

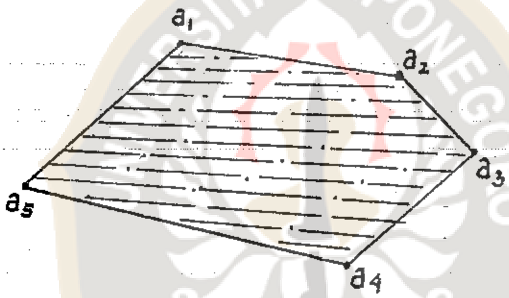
Dengan demikian suatu himpunan konvek untuk semua titik-titiknya selalu terhubung antar satu titik dengan titik yang lain akibatnya dalam suatu graph suatu himpunan konvek jelas tidak ditemukan lekukan maupun lubang didalam graph konvek. Himpunan null (∅) dikatakan konvek.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

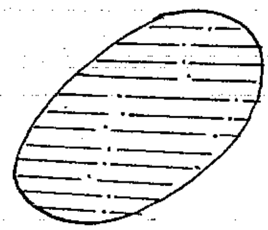
Definisi 2.3.2

Himpunan $S \subset R^n$ titik $\bar{a} \in S$ adalah titik ekstrim (disebut juga *vertek*) pada S bila titik $a_1, a_2 \in S$ untuk $a_1 \neq a_2$ sedemikian sehingga tidak terdapat $\bar{a} = (\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2)$ untuk beberapa $\lambda \in (0,1)$.

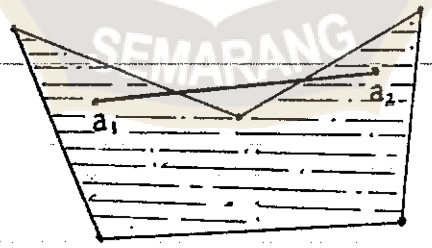
Hal tersebut menyebabkan untuk titik-titik ekstrimnya merupakan titik-titk batas dan bukan merupakan titik-titik interior.



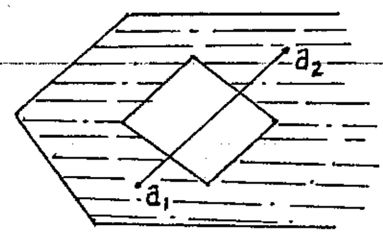
I.



II



III.



iIV.

Keterangan : Gambar

I. Merupakan contoh himpunan convek dengan 5 titik puncak.

II. Merupakan contoh Himpunan Konvek dengan harga titik puncaknya tak terbatas (sepanjang garis batasnya).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

III. dan IV merupakan contoh grap nonkonvek dengan demikian tidak bisa dikatakan titik ekstrimpada himpunan nonkonvek.

Definisi 2.3.3

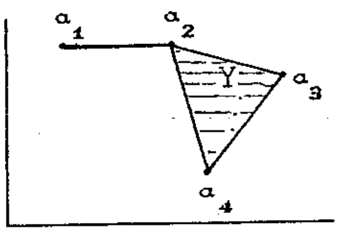
Kombinasi konvek dengan simbol γ digunakan pada semua himpunan kombinasi konvek. Ambil $a_1, a_2, \ldots a_q$ merupakan titik-titik puncak, maka kombinasi konveknya $\gamma(a_1, a_2, \ldots a_q)$ atau $\sum_{i=1}^{q}(a_i)$

Definisi 2.3.4

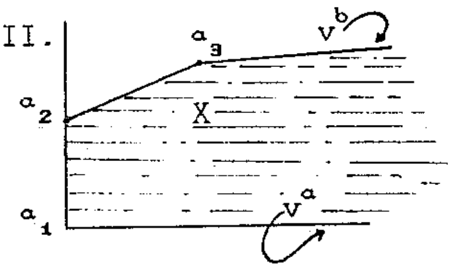
Bagian garis yang unbounded (tak terbatas) digunakan simbol μ yang berasal dari $a \in R^n$ ditunjukan dengan $v \in R^n$ ditulis $\mu(a,v)$.

Jadi himpunan konvek merupakan himpunan semua kombinasi konvek pada titk-titik puncaknya berikut titik-titik sepanjang garis sampai ujung-ujung (edges) yang unbounded.

Contoh :I.



II.



Contoh :

I. Merupakan himpunan nonKonvek Y dengan

$$Y = \gamma(a_1, a_2) \cup \sum_{i=2}^{4}(a_i).$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

II. Merupakan himpunan konvek yang unbounded dari X dan $X = \gamma\ (a_2, y, z)$ dimana $y \in \mu(a_1, v^a)$ dan $Z \in \mu(a_3, v^b)$.

Himpunan konvek dan titik-titik puncaknya yang terhubung dengan ujung-ujungnya pada suatu titik disebut *Adjacent*.

Path (garis hubung) titik-titik ekstrim adjacent dari a_1 ke a_3 pada gambar II adalah $\{a_1, a_2, a_3\}$ dan path pada ujung-ujung dari a_1 ke a_3 yaitu $\gamma\ (a_1, a_2)$ dan $\gamma\ (a_2, a_3)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)