BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. FUNGSI PROBABILITAS

Diberikan Ω suatu ruang sampel dan $\mathcal{A}$ sebagai suatu koleksi dari setiap himpunan bagian dari Ω.

Definisi 2.1.1:

Fungsi Probabilitas. Suatu Fungsi Probabilitas P(•) merupakan suatu fungsi yang ditetapkan dengan domain (daerah asal) $\mathcal{A}$ dan co-domain (daerah hasil) [0,1] yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(i) $P(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{A}$,

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Jika $A_1, A_2, \ldots$ suatu barisan peristiwa saling asing di dalam $\mathcal{A}$ (yaitu $A_i \cap A_j = 0$ untuk $i \neq j$; $j = 1, 2, \ldots$)
dan jika $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots.. = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

maka $P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Untuk selanjutnya, koleksi dari setiap himpunan bagian dari Ω yaitu $\mathcal{A}$ disebut Ruang Peristiwa dari Ω.

Definisi 2.1.2:

Ruang Probabilitas. Susunan tripel $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ disebut suatu Ruang Probabilitas, dimana Ω merupakan suatu ruang sampel, $\mathcal{A}$ ruang peristiwa dari Ω, dan $P(\bullet)$ adalah suatu fungsi probabilitas dengan domain $\mathcal{A}$.

Diberikan suatu ruang probabilitas $\{\Omega, \mathcal{A}, P)$. Akan didefinisikan suatu partisi dari Ω.

Definisi 2.1.3:

Partisi. Suatu Partisi $\mathbf{U} = \left[A_1, A_2, \ldots, A_n\right]$ dari himpunan Ω merupakan koleksi himpunan bagian A_i yang memenuhi:

(i) $A_i \subset \Omega$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ dan

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Contoh 2.1.1:

Diberikan suatu ruang sampel $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$

dan diambil lima peristiwa

$A_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ $\quad B_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 29\}$

$A_2 = \{11, 12, 13, \ldots, 20\}$ $\quad B_2 = \{2, 4, 6, \ldots, 30\}$

$A_3 = \{21, 22, 23, \ldots, 30\}$.

Dari sini dapat dilihat bahwa:

(i) $A_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, 3$ dan $B_j \subset \Omega$, $j = 1, 2$,

(ii) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ dan $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ dan $B_1 \cup B_2 = \Omega$.

Dengan demikian

- A_1; A_2, A_3 merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω dan yang menjadi suatu partisi dari Ω.
- B_1, B_2 merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω yang menjadi suatu partisi dari Ω.

Karena $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ untuk setiap i dan j, maka A_i dan B_j tidak bisa menjadi satu partisi dari Ω.

Maka untuk suatu himpunan $B \in A$ diperoleh

$$B = \Omega \cap B$$
$$= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$$
$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$
$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

sehingga

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

Contoh 2.1.2:

Pandang suatu eksperimen pelantunan sebuah dadu seimbang. Diambil dua partisi **U** dan **B** dari ruang sampel yang sama, Ω. **B** merupakan partisi biner, dimana **B** = [genap,ganjil], sedang **U** adalah partisi elementer dari Ω. Maka

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\mathbf{U} = [\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}]$$
$$\mathbf{B} = [\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}]$$

dan

$$P(A_i) = \frac{1}{6}, \; i = 1, 2, \ldots, 6$$

$$P(B_j) = \frac{1}{2}, \; j = 1, 2.$$

Diambil C suatu peristiwa di dalam ruang probabilitas (Ω, A, P), dimana

$$C = \{1, 2, 5, 6\}.$$

Dengan menggunakan (2.1.1), akan dicari probabilitas dari peristiwa C.

$$P(C) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i \cap C)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$P(C) = P(B_1 \cap C) + P(B_2 \cap C) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

2.2 PROBABILITAS BERSYARAT

Diberikan dua peristiwa A dan B, akan didefinisikan probabilitas bersyarat dari A jika diketahui B terjadi.

Definisi 2.2.1:

Probabilitas Bersyarat. Diambil A dan B dua peristiwa dalam A, dari ruang probabilitas yang diberikan $\{\Omega, A, P\}$. Probabilitas Bersyarat dari A diberikan B dinotasikan dengan $P(A|B)$, dan didefinisikan sebagai

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

dimana $P(B) > 0$.

Contoh 2.2.1:

Diberikan eksperimen pelantunan dua mata uang seimbang, dan diambil ruang sampel

$$\Omega = \{(G,G), (G,A), (A,G), (A,A)\}$$

Akan dicari probabilitas bahwa sisi yang tampak dari kedua mata uang tersebut adalah gambar (G), jika

(i) Diberikan satu gambar muncul pada mata uang pertama.

(ii) Diberikan paling sedikit satu gambar muncul.

Diambil

B_1 = {gambar muncul pada mata uang pertama}

B_2 = {gambar muncul pada mata uang kedua}

maka

(i) $$P(B_1 \cap B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

(ii) $$P(B_1 \cap B_2 | B_1 \cup B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap (B_1 \cup B_2))}{P(B_1 \cup B_2)} = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cup B_2)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Akibat :

Jika P (A) > 0 dan P (B) > 0, dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat diperoleh persamaan

$$P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$$
$$= P(B|A)\, P(A).$$

Dari definisi probabilitas bersyarat, akan dikembangkan teorema probabilitas total.

Teorema 2.2.1:

Probabilitas Total. Diberikan suatu ruang probabilitas $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan koleksi himpunan peristiwa saling asing di dalam $\mathcal{A}$ yang memenuhi $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $P(A_i) > 0$ untuk i = 1, 2, ... , n, maka untuk setiap B $\in \mathcal{A}$ dimana P(B) > 0 berlaku

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

Bukti :

Sebagaimana diketahui bahwa untuk B $\in \mathcal{A}$

$$B = \Omega \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B).$$

Dan karena $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ sehingga

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j \cap B) = \emptyset \cap B = \emptyset$$

maka masing-masing peristiwa $(A_i \cap B)$ adalah saling asing.

Dari sini

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i).$$

Contoh 2.2.2 :

Terdapat lima buah kotak yang diberi nomor 1, 2, 3, 4, dan 5. Tiap kotak berisi 10 bola. kotak ke i memuat i buah bola rusak dan $(10 - i)$ buah bola yang tidak rusak, dengan $i = 1, \ldots, 5$. Sebagai contoh, kotak ke 2 memuat 2 bola rusak dan 8 bola tidak rusak. memandang eksperimen random berikut:

> Pertama sebuah kotak akan dipilih secara random, kemudian dari kotak tersebut akan diambil sebuah bola secara random.

Dari eksperimen di atas, akan dicari probabilitas bahwa bola rusaklah yang terambil.

Diambil

A = peristiwa sebuah bola rusak diambil, dan

B_i = peristiwa kotak ke i terpilih, $i = 1, \ldots, 5$

maka

$$P(B_i) = \frac{1}{5}, \; i = 1, \ldots, 5$$

$$P(A \mid B_i) = \frac{i}{10}, \; i = 1, \ldots, 5$$

dan

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{5} i = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

Dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat dan teorema probabilitas total di atas, akan dibuktikan teorema Aturan Bayes.

Teorema 2.2.2 :

Aturan Bayes. Diberikan suatu ruang probabilitas $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}\}$. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan suatu koleksi himpunan peristiwa saling asing dalam $\mathcal{A}$ yang memenuhi $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $P(A_i) > 0$ untuk i = 1, 2, ... , n, maka untuk sebarang peristiwa $B \in \mathcal{A}$ dimana $P(B) > 0$. Maka untuk k = 1, ... , n,

$$P(A_k|B) = \frac{P(B \mid \mathrm{A}_k)\, P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid \mathrm{A}_i)\, P(A_i)}$$

Bukti :

Karena

$$P(A_k \cap B) = P(B|A_k)\, P(A_k)$$

dan

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

maka

$$P(A_k \mid B) = \frac{P\,(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid \mathrm{A}_k)\, P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid \mathrm{A}_i)\, P(A_i)}.$$

Contoh 2.2.3 :

Pandang eksperimen pada contoh 2.2.2. Jika bola telah diambil, dan diketahui bahwa bola tersebut rusak, akan dicari probabilitas bahwa bola tersebut diambil dari kotak dengan nomor 5 ($P(B_5|A)$) dengan menggunakan teorema Aturan Bayes.

$$P(B_5|A) = \frac{P(A|B_5)\,P(B_5)}{\sum_{i=1}^{5} P(A|B_i)P(B_i)}$$

$$= \frac{5/10\,.\,1/5}{3/10} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$$

Definisi 2.2.2 :

Peristiwa independensi. Diambil A dan B, dua peristiwa di dalam $\mathcal{A}$ pada suatu ruang probabilitas yang diberikan $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}\}$. Peristiwa A dan B dikatakan Independen jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Dari definisi tersebut di atas, jika A dan B dua peristiwa yang saling independen, maka probabilitas bersyarat

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

jika $P(B) > 0$.

Contoh 2.2.4 :

Dalam suatu permainan kartu, diambil sebuah kartu secara random, dimana setiap kartu memiliki probabilitas yang sama untuk diambil. Probabilitas bahwa kartu yang terambil merupakan kartu King adalah

$$P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

dan probabilitas bahwa kartu yang terambil merupakan kartu Heart adalah

$$P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Maka

$$P(H \cap K) = P(H) + P(K) - P(H \cup K)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{16}{52}$$
$$= \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = P(H)\,P(K).$$

2.3. VARIABEL RANDOM

Definisi 2.3.1:

(Ω, A, P) adalah ruang probabilitas, X fungsi berharga riil pada Ω yang memenuhi setiap interval R

$\{X \in R\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in R\} \in A$

X disebut variabel random pada (Ω, A, P)

Contoh 2.3.1:

Eksperimen melempar sebuah mata uang 3 kali.

$\Omega = \{(MMM), (MMB), (MBM), (BMM), (MBB), (BMB), (BBM), (BBB)\}$

Untuk setiap $\omega \in \Omega$

X = banyaknya sisi M dalam ω

X (MMM) = 3

X (MMB) = X (MBM) = X (BMM) = 2

X (MBB) = X (BMB) = X (BBM) = 1

X (BBB) = 0

Definisi 2.3.2:

Jika setiap interval riil memuat finite (countable) titik anggota A maka X disebut variabel random diskrit.

Contoh 2.3.2:

Pada contoh 2.3.1 variabel randomnya adalah diskrit karena ruang hasilnya berhingga yaitu $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

Definisi 2.3.3:

Jika setiap interval riil memuat uncountable titik anggota A maka X disebut variabel random kontinu.

Contoh 2.3.3:

Misal X variabel random yang menyatakan jarak tempuh perjalanan seseorang dalam 1 hari yang tidak melebihi 100 km,
maka X merupakan interval dari X = 0 sampai X = 100
dengan $A = \{0 \leq X \leq 100\}$

Definisi 2.3.4:

Fungsi f(x) adalah suatu fungsi probabilitas atau distribusi probabilitas suatu variabel random diskrit X jika untuk setiap hasil x yang mungkin.

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Contoh 2.3.4:

Misalkan X variabel random dengan nilai x, yang menyatakan jumlah muka bila mata uang yang dilempat 4 kali.

Ruang sampel adalah = 2^4 = 16 titik.

Untuk mencari banyaknya cara memperoleh = muka adalah $\binom{4}{x}$ cara dengan x = 0, 1, 2, 3, 4

maka $f(x) = P(X = x)$:

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16}, \; x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\sum_x f(x) = \frac{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{16}$$

$$= \frac{\frac{4!}{0!\,4!}+\frac{4!}{1!\,3!}+\frac{4!}{2!\,2!}+\frac{4!}{3!\,1!}+\frac{4!}{4!\,0!}}{16}$$

$$= \frac{16}{16} = 1$$

Definisi 2.3.5:

Distribusi kumulatif F(x) suatu variabel random diskrit X dengan distribusi probabilitas f(x) dinyatakan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} f(x)$$

Contoh 2.3.5:

Dari contoh 2.3.4 akan dihitung distribusi kumulatif variabel kumulatif variabel random X.

dengan $f(0) = \frac{1}{16}$

$f(1) = \frac{1}{4}$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = \frac{1}{4}$$

$$f(4) = \frac{1}{16}$$

maka

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ \frac{1}{16}\,, & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16}\,, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16}\,, & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16}\,, & 3 \le x < 4 \\ 1\,, & x \ge 4 \end{cases}$$

Definisi 2.3.6:

Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas variabel random kontinu X yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan riil R, bila

1. $f(x) \ge 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Contoh 2.3.4:

Misal variabel random X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas:

$$f(x) = \frac{x^2}{3},\ -1 < x < 2$$

$$= 0,\ \text{untuk } x \text{ lainnya}$$

maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{9} \Big]_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

dan

$$P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{9} \Big]_0^1 = \frac{1}{9}$$

Definisi 2.3.7:

Distribusi kumulatif $F(x)$ suatu variabel random kontinu X dengan fungsi kepadatan f(x) diberikan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Contoh 2.3.7:

Dari contoh 2.3.6 akan dicari F(x), yaitu:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\, dt = \frac{t^2}{3}\, dt = \frac{t^3}{9} \Big]_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}$$

Definisi 2.3.8:

Mean variabel random dinyatakan dengan μ, dimana

$$\mu = \sum_i x_i\, f(x_i),\ \text{untuk X bernilai diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx\ ,\ \text{untuk X bernilai kontinu}$$

Definisi 2.3.9:

Variansi didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i) \qquad \text{untuk X bernilai diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \qquad \text{untuk X bernilai kontinu}$$

atau $\quad \sigma^2 = \sum x_i^2\, f(x_i) - \mu^2 \qquad$ untuk X bernilai diskrit

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2 \qquad \text{untuk X bernilai kontinu}$$

Contoh 2.3.8:

Percobaan pelemparan mata uang dimana X menyatakan jumlah gambar dengan distribusi probabilitas sebagai berikut:

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mu = \sum_{i=1}^{4} x_i\, f(x_i) = 0(\tfrac{1}{8}) + 1(\tfrac{3}{8}) + 2(\tfrac{3}{8}) + 3(\tfrac{1}{8})$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2\, f(x_i) = (0 - \tfrac{3}{2})^2 . \tfrac{1}{8} + (1 - \tfrac{3}{2})^2 . \tfrac{3}{8} + (2 - \tfrac{3}{2})^2 . \tfrac{3}{8} + (3 - \tfrac{3}{8})^2 . \tfrac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Contoh 2.3.9:

Sebuah variabel random X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas:

$$f(x) = 2\, e^{-2x} \qquad x \geq 0$$

$$= 0 \qquad \text{lainnya}$$

maka

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.2.e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{0}^{\infty} x.2.e^{-2x}\, dx - (\tfrac{1}{2})^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Definisi 2.3.10:

Simpangan baku variabel random X didefinisikan sebagai akar kuadrat positif dari varian dan dinotasikan dengan σ, dimana

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Contoh 2.3.10:

Dari contoh 2.3.9 diketahui $\sigma^2 = \frac{1}{4}$, maka

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Definisi 2.3.11:

X suatu variabel random dimana terdapat suatu bilangan positif h sedemikian sehingga $|t| < h$, $E(e^{tx})$ ada, maka $E(e^{tx})$ disebut fungsi pembangkit momen (fpm) dari variabel random X yang dinyatakan dengan $M_X(t)$.

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum e^{tx} f(x), \quad \text{jika X diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx, \quad \text{jika X kontinu}$$

Contoh 2.3.11:

X suatu variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas

$$f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}, \quad \text{untuk } x = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= 0 \quad , \text{untuk yang lainnya.}$$

Maka fpm dari X =

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum_x e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=1} e^{tx} \cdot \frac{6}{\pi^2 x^2}$$

$$= \sum_{x=1} \frac{6.e^{tx}}{\pi^2 x^2}$$

Ini merupakan deret tak hingga dengan suku umum:

$$U_n = \frac{6.e^{tn}}{\pi^2 n^2}$$

$$U_{n+1} = \frac{6.e^{t(n+1)}}{\pi^2 (n+1)^2}$$

Menggunakan test ratio dihitung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6.e^{t(n+1)}}{\pi^2(n+1)^2} / \frac{6.e^{tn}}{\pi^2 n^2} = e^t$$

Jika t>0, maka $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, sehingga deret divergen.

Maka tidak terdapat suatu bilangan positif h demikian sehingga untuk $|t| < h$, $Mx(t)$ ada. Jadi fungsi probabilitas f(x) tersebut tidak mempunyai fpm.

2.4. BEBERAPA DISTRIBUSI PROBABILITAS

2.4.1 DISTRIBUSI BINOMIAL

Definisi 2.4.1.1:

Suatu percobaan A , disebut percobaan bernoulli atau percobaan binomial bila memenuhi syarat berikut:

1. percobaan terdiri atas n usaha yang berulang
2. tiap usaha memberi hasil yang dapat ditentukan dengan sukses atau gagal
3. P(sukses) = p dan P(gagal) = 1 − p = q, tidak berubah dari usaha yang satu ke yang berikutnya
4. tiap usaha bebas dengan usaha lainnya.

Definisi 2.4.1.2:

Banyaknya sukses X dalam n usaha suatu percobaan binomial disebut variabel random binomial.

Contoh 2.4.1.1:

Dalam pengambilan tiga produk pabrik secara random akan diperiksa dan yang cacat dipisahkan dari yang tidak cacat. Bahan yang cacat disebut sukses dan yang tidak cacat disebut gagal.

Banyaknya sukses merupakan suatu variabel random X dengan nilai bilangan 0 sampai 3.

Dengan n = 3 maka hasil percobaan sebanyak $2^3 = 8$ hasil, yaitu:

Hasil	x
TTT	0
TCT	1
TTC	1
CTT	1
TCC	2
CCT	2
CCC	3

Produk tersebut dipilih secara bebas dari hasil proses yang dianggap menghasilkan 25% bahan cacat ($p = \frac{1}{4}$, $q = 1 - p = \frac{3}{4}$) sehingga probabilitas terjadinya setiap hasil percobaan merupakan hasil perkalian masing-masing peristiwa.

Misalnya $P(TCT) = P(T).P(C).P(T) = (\frac{3}{4}).(\frac{1}{4}).(\frac{3}{4}) = \frac{9}{64}$

Definisi 2.4.1.3:

Bila suatu usaha binomial dapat menghasilkan sukses dengan probabilitas p dan gagal dengan probabilitas $q = 1 - p$, maka distribusi probabilitas variabel random binomial X adalah:

$$b(x\,;n,p) = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Contoh 2.4.1.2:

Suatu suku cadang dapat menahan uji guncangan tertentu dengan probabilitas $\frac{3}{4}$. Akan dihitung probabilitas bahwa tepat dua dari empat suku cadang yang diuji tidak akan rusak.

Misalkan tiap pengujian bebas,dan $p = \frac{3}{4}$, $q = 1 - p = \frac{1}{4}$ untuk tiap keempat pengujian maka:

$$b(2\,;\,4,\tfrac{3}{4}) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!}\,\frac{3^2}{4^4}$$

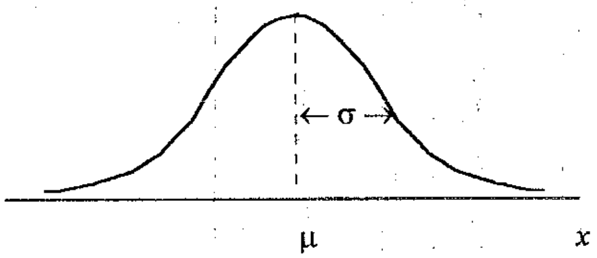
$$= \frac{27}{128}$$

2.4.2 DISTRIBUSI NORMAL

Distribusi ini merupakan distribusi terpenting yang digunakan dalam bidang statistika, karena banyak pengukuran berdistribusi mengikuti atau mendekati normal.

Definisi 2.4.2.1:

Suatu variabel random kontinu X yang distribusinya berbentuk lonceng seperti gambar 2.4.2 disebut variabel random normal



Gambar 2.4.2 Kurva normal

Dari gambar 2.4.2 dapat diperoleh sifat-sifat distribusi normal:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
2. $f(x) \geq 0$ untuk seluruh x
3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
4. $f[(x+\mu)] = f[-(x-\mu)]$
5. Nilai maksimum dari f terjadi pada $x = \mu$
6. Titik belok dari f adalah $x = \mu \pm \sigma$, cekung dari bawah jika $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ dan cekung atas untuk harga x lainnya.

Teorema 2.4.2.1:

Sebuah variabel random X, disebut mempunyai sebuah distribusi normal jika mempunyai fungsi kepadatan:

$$f(x) = n(x\,;\ \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$0 < \sigma^2 < \infty$$

dengan mean μ dan variansi σ^2

dan $\pi = 3,14159...$, $e = 2,71828...$

Bukti:

Mean dari distribusi normal adalah:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}dx$$

misal $z=\frac{(x-\mu)}{\sigma}\rightarrow\sigma\,dz=dx$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}(\mu+\sigma\,z)\,e^{-z^2/2}\,dz$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\,dz+\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,z\,e^{-z^2/2}\,dz$$

$$=\mu(1)+\sigma\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}\Bigg)$$

$$=\mu\,(1)+\sigma\,(0)$$

$$=\mu$$

Variansi dari distribusi normal adalah:

$$V(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}dx$$

misal $z=(x-\mu)/\sigma$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2\,z^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}dz$$

$$=\sigma^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\,dz\right]$$

$$=\sigma^2\left[\left.\frac{-z\,e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\,dz\right]$$

$$= \sigma^2[0+1]$$

$$= \sigma^2$$

Terbukti bahwa mean distribusi normal μ dan variansi σ^2.

Teorema 2.4.2.2:

Jika suatu variabel random kontinu X berdistribusi normal maka seluruh luas di bawah kurva dan di atas sumbu datar adalah 1.

Bukti:

Dari sifat (1) pada definisi 2.42.1 maka:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}$$

misal $y = (x-\mu)/\sigma \qquad \rightarrow \sigma\, dy = dx$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)y^2}\, dy$$

Misalkan variabel kedua yang berdistribusi normal z maka:

$$I^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)y^2}\, dy\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)z^2}\, dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)(y^2+z^2)}\, dy\, dz$$

Dengan mengubah pada koordinat polar, transformasi dari:

$y = r.\sin\theta$

$z = r.\cos\theta$

maka:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} r.e^{-\left(\frac{1}{2}\right)r^2}\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cdot (-e^{-\frac{1}{2}r^2}) \right]_0^{\infty} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$I^2 = 1$, $I = \sqrt{1}$,

karena f harus positif maka terbukti bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Teorema 2.4.2.3:

Jika X variabel random kontinu berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka fungsi pembangkit momen dari $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ adalah:

$$M_X(t) = e^{(\mu t + t^2\sigma^2/2)}$$

Bukti:

$M_X(t) = E(e^{tx})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-2\mu x+\mu^2\right)}{\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x^2-2\left(\mu+t\sigma^2\right)x+\mu^2\right)}{2\sigma^2}} dx$$

Dengan melengkapi bentuk kuadrat dalam eksponen diperoleh:

$$x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = \left[x - (\mu + t\sigma^2)\right]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

sehingga:

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left\{[x-(\mu+t\sigma^2)]^2 - 2\mu\, t\, \sigma^2 - t^2\sigma^4\right\}/\, 2\sigma^2}\, dx$$

$$= e^{\mu t + t^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\{[x-(\mu+t\sigma^2)]\,/\,\sigma\}^2}\, dx$$

misal $z = \left[x-(\mu+t\sigma^2)\right]/\sigma$, maka $dx = \sigma\, dz$

$$Mx(t) = e^{\mu t + t^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2})\, z^2}\, \sigma\, dz$$

$$= e^{\mu t + t^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(-\frac{1}{2})\, z^2}\, dz$$

$$= e^{\mu t + t^2\sigma^2/2} \quad \text{(terbukti).}$$

Di sini terlihat bahwa $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{(-\frac{1}{2})\, z^2}$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random berdistribusi normal dengan mean (μ) = nol dan variansi $(\sigma^2) = 1$ dengan notasi sebagai berikut:

$$Z \sim N(0, 1).$$

Definisi 2.4.2.2:

Distribusi normal suatu variabel random dengan mean nol dan variansi satu disebut distribusi normal standar.

Contoh 2.4.2.1:

Jika $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ akan ditunjukkan N(0,1) distribusi normal standar.

Mean $\mu_{Z_i} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i}{n}$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma}}{n}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i}^{n} (X_i - \mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \sum_{i}^{n} \left(\frac{X_i}{n} - \frac{\mu}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\sum\limits_{i}^{n} X_i}{n} - \frac{n\mu}{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \{\mu - \mu\} \quad \text{dengan } \mu = \frac{\sum\limits_{i}^{n} X_i}{n}$$

$$\mu_{Z_i} = 0$$

$$Var\,(Z_i) = \sum_{i}^{n} \frac{(Z_i-\mu)^2}{n}$$

karena $\mu = 0$, maka:

$$Var\,(Z_i) = \sum_{i}^{n} \frac{{Z_i}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma} \right)^2}{n}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}{n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i}^{n} (X_i-\mu)^2}{n}$$

$$Var(Z_i) = \frac{1}{\sigma^2}.\sigma^2 \qquad \text{dengan } \sigma^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \mu)^2}{n}$$

$$= 1$$

Definisi 2.4.2.3:

Misalkan X variabel random dengan distribusi sampel $\overline{X}$ adalah normal dan $\mu_{\overline{X}} = \mu$, simpangan baku $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ maka interval kepercayaan untuk μ dengan $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ adalah:

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Definisi 2.4.2.4:

Interval kepercayaan $(1-\alpha)$ 100% untuk μ ialah:

$$\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

dengan $\overline{X}$ menyatakan mean sampel ukuran n dari populasi dengan variansi σ^2 yang diketahui dan $z_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai distribusi normal baku sehingga daerah di sebelah kanannya memiliki luas $\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 2.4.2.2:

Mean dari simpangan baku nilai matematika sampel random 36 mahasiswa semester VI masing-masing 2,6 dan 0,3. Sehingga estimasi titik untuk μ ialah $\bar{x} = 2,6$, dan karena ukuran sampelnya besar maka simpangan baku σ dapat dihampiri dengan s = 0,3.

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}}$$

$$z_{0,025} = 1,96 \text{ (tabel)}.$$

Interval kepercayaan 95% untuk μ adalah:

$$2,6 - (1,96)\left(\frac{0,3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2,6 + (1,96)\left(\frac{0,3}{\sqrt{36}}\right)$$

$$2,6 - 0,098 < \mu < 2,6 + 0,098$$

$$2,502 < \mu < 2,698$$

2.5. ESTIMASI

Definisi 2.5.1:

Suatu percobaan sebanyak n kali yang terjadi secara independen dengan sampel randomnya dinyatakan dengan variabel $X_1, X_2, ..., X_n$ maka $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$ disebut data sampel.

Definisi 2.5.2:

Inferensi statistik adalah proses memperoleh informasi dari data sampel yang digunakan untuk menarik kesimpulan tentang populasi dari sampel yang dipilih.

Definisi 2.5.3:

X adalah sebuah variabel random dengan fungsi probabilitas $f(x)$, dengan parameter θ yang tidak diketahui, maka fungsi kepadatan probabilitasnya adalah $f(x;\theta), \theta \in \Omega$, dengan Ω = ruang parameter.

Contoh 2.5.1:

Fungsi kepadatan probabilitas variabel random normal X, bergantung pada dua parameter μ dan σ dinyatakan dengan $n(x\,;\,\mu,\sigma)$. Kumpulan distribusi Normal $N(\theta, 1)$ dinyatakan dengan $(N(\theta, 1),\ \theta \in \Omega); -\infty < \theta < \infty$.

Anggota dari kumpulan distribusi ini ialah N(0,1) merupakan distribusi normal standar.

Definisi 2.5.4:

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ menyatakan suatu sampel random yang besarnya n dari X, maka nilai $y = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dari suatu statistik $Y = u(X_1, X_2, ..., X_n)$ merupakan estimator maksimum dari θ.

Definisi 2.5.5:

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah suatu sampel random dari X, dan $\hat{\theta}$ estimasi titik suatu parameter populasi θ yang tidak diketahui, maka $f(\theta)$ disebut distribusi prior.

Definisi 2.5.6:

Misal X variabel random dengan fungsi probabilitas $f(x;\theta)$ dengan parameter θ tidak diketahui dan $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ adalah data sampel, maka fungsi likelihood sampel adalah:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)\,,\, f(x_2;\theta)\,,\, \ldots\, ,f(x_n;\theta),\ \theta \in \Omega$$
$$= L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)$$

Contoh 2.5.2:

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ialah suatu sampel random dari distribusi Normal $N(\theta;1)$, $-\infty < \theta < \infty$.

Fungsi likelihood sebuah sampel yang besarnya n ialah:

$$L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) = f(x_1;\theta)\,,\, f(x_2;\theta)\,,\, \ldots\, f(x_n;\theta),\ \theta \in \Omega$$

Fungsi kepadatan distribusi normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2$$

Dengan parameter θ dan $\sigma = 1$ maka:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}(x-\theta)^2$$

$$L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2 . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2 \ldots.$$

$$\ldots\ldots.. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp -\sum_{i=1}^{n} (x_i-\theta)^2/2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{2}}$$

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \ln\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{2}}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right) + \ln\left(e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{n}{2} \ln \frac{1}{2\pi} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{2}$$

$$= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{2}$$

$$\frac{d \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{d\theta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta = 0$$

$$n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\dfrac{d^2 \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{d\theta^2}$ adalah:

$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta = 0$ diturunkan terhadap θ

$$= -n$$

$$-n < 0, \quad \text{jadi} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{memaksimumkan L}$$

Sehingga statistik $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Definisi 2.5.7:

Fungsi kepadatan marginal sampel $X_1, X_2, ..., X_n$ dengan parameter θ adalah:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\theta} f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta), \qquad \text{diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)\, d\theta \qquad \text{kontinu}$$

Definisi 2.5.8:

Fungsi kepadatan bersama sampel $X_1, X_2, ..., X_n$ dengan parameter θ adalah:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n | \theta)\, f(\theta)$$

Definisi 2.5.9:

Fungsi kepadatan bersyarat sampel $X_1, X_2, ..., X_n$ dengan parameter θ adalah:

$$f(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n | \theta)\, f(\theta)}{u(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

dapat ditulis: $f(\theta | y) = \frac{f(\theta, y)}{f(y)}$

dengan $Y = y = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ dan $f(\theta | y)$ disebut distribusi posterior.

Contoh 2.5.3:

Dengan menggunakan sampel random berukuran 2, akan ditaksir proporsi banyaknya cacat (p) yang dihasilkan oleh suatu mesin bila distribusi awal $f(p) = 1$, $0<p<1$.

$$f(x|p) = b(x; n, p) = \binom{2}{x} p^x . q^{2-x} \quad x = 0, 1, 2$$

fungsi kepadatan bersama

$f(x\,;\,p) = f(x \mid p)\,f(p)$

$$= \binom{2}{x} p^x . q^{2-x} \;.\; 1$$

$$= \binom{2}{x} p^x . q^{2-x}$$

$$= (1-p)^2 \qquad \text{, untuk } x = 0, \quad 0 < p < 1$$

$$= 2\,p\,(1-p) \qquad \text{, untuk } x = 1, \quad 0 < p < 1$$

$$= p^2 \qquad \text{, untuk } x = 2, \quad 0 < p < 1$$

Fungsi kepadatan marginal X:

$$f(x) = \int_0^1 (1-p)^2\, dp = \frac{1}{3} \qquad \text{, untuk } x = 0$$

$$= \int_0^1 2\,p\,(1-p)\, dp = \frac{1}{3} \qquad \text{, untuk } x = 1$$

$$= \int_0^1 p^2\, dp = \frac{1}{3} \qquad \text{, untuk } x = 2$$

Fungsi kepadatan bersyarat sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan parameter p adalah:

$$f(p \mid x) = \frac{f(x\,,\,p)}{f(x)}$$

$$= 3\binom{2}{x} p^x\, q^{2-x}$$

$$= 3(1-p)^2 \quad , x = 0 \quad 0 < p < 1$$

$$= 6p\,(1-p) \quad , \; x = 1 \quad 0 < p < 1$$

$$= 3p^2 \quad , \; x = 2 \quad 0 < p < 1$$