BAB II

DASAR TEORI DESAIN ROBUST

2.1 Teori Probabilitas dan Fungsi Densitas

Didalam kehidupan sehari-hari, sering tidak bisa diketahui dengan pasti tentang terjadinya suatu kejadian atau peristiwa, apalagi kalau kejadian itu mengenai sesuatu yang akan datang atau yang belum diketahui secara pasti. Oleh sebab itu kita hanya dapat mengatakan kemungkinan atau tingkat kepastian demikian, tidak dapat diduga dengan pasti tetapi dapat dianalisa atas dasar logika ilmiah yang disebut dengan *Teori Peluang (Probabilitas)*. Oleh sebab itu untuk dapat mengetahui nilai kemungkinan suatu kejadian/peristiwa, perlu juga diketahui batasan mengenai suatu peristiwa.

Untuk mengetahui peluang dari beberapa peristiwa, dapat digunakan aturan-aturan tertentu yang harus diperhatikan berdasarkan hubungan

Definisi 2.1.1 :

Dua peristiwa dikatakan saling bebas (independen) jika hanya jika terjadi atau tidak terjadinya peristiwa pertama tidak mempengaruhi terjadinya atau tidak terjadinya peristiwa kedua.

Aturan peluang apabila A dan B saling bebas, dengan $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ jika $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Metode Kemungkinan Maksimum adalah suatu metode menaksir parameter populasi atau distribusi yang ditemukan oleh *Fisher* pada tahun 1921 dan cukup sederhana dibandingkan dengan metode menaksir parameter populasi dengan cara lain. Akan tetapi metode ini hanya bisa digunakan kalau diketahui bentuk distribusi peubah acaknya, sehingga melalui fungsi densitas atau fungsi peluang kita dapat menaksir parameternya.

Misalkan x peubah acak kontinue dengan fs densitas $f(x,\theta)$ dan θ merupakan parameter yang akan ditaksir nilainya. Sehubungan dengan itu, diambil sampel acak berukuran n, katakanlah sampel acaknya x_1, x_2, x_3,...,x_n,maka diperoleh fs densitas bersama :

$f(x_1, x_2,...x_n) = f(x_1,\theta) . ...f(x_n,\theta)$ atau

$$f(x_1, x_2,...x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) \tag{2.1}$$

Ruas kanan dari persamaan (2.1) dinamakan fungsi mungkinan untuk x_1, x_2,...x_n yang diberi notasi L seperti berikut ini

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

Dalam logaritmanya diambil bentuk :

$$\ln L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

Berdasarkan sifat ini maka solusi untuk $L(\theta)$ atau nilai yang memaksimumkan, juga memaksimumkan ln $L(\theta)$. Akan dicari nilai θ yang maksimum dengan menyamakan turunan pertama terhadap θ sama dengan nol, dan turunan kedua terhadap θ memberikan nilai negatif, yaitu :

$$d/d\theta \ \ln L(\theta) = 0$$

$$d^2/d^2\theta \ \ln L(\theta) \le 0$$

Definisi 2.1.2 :

Random Variabel didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memeratakan unsur-unsur ruang sampel suatu percobaan terhadap suatu gugus bilangan nyata sebagai wilayah fungsi. Jika random variabel dilambangkan dengan x, u = $u_1, u_2 \ldots u_n$ sebagai daerahnya, maka yang dimaksud sebagai $x(u_i)$ adalah suatu unsur yang merupakan bayangan unsur $u_i \in u$. Semua unsur $x(u_i)$ ini terkandung didalam wilayah random variabel x yaitu $\omega_x \in$ random variabel.

Definisi 2.1.3 :

Misal x merupakan rando variabel yang density $f_X(x)$, maka mean yang dilambangkan dengan μ_X atau $E(x)$ didefinisikan dengan

$$E(x) = \Sum x_j \ f_X(x_j) \qquad ; \text{jika x diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) \ dx \qquad ; \text{jika x kontinue}$$

$$= \int_{0}^{\infty} (-F_X(x) \ dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x) \ dx$$

untuk x sembarang random variabel dimana $F_X(x) = P(X \le x)$

Definisi 2.1.4 :

Misal x merupakan random variabel dengan densitas $f_X(x)$ dan mempunyai mean $\mu_X = E(x)$, maka varian dari x yang dinyatakan dengan σ_X^2 atau Var(x) didef dengan :

$$Var(x) = \sum (x - \mu\ )^2 . f\ (x) \qquad ; \text{ jika x diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 . f_X(x) \qquad ; \text{ jika x kontinue}$$

$$= \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x) + F_X(-x)\ dx - \mu_X^2$$

untuk x sembarang random variabel dimana $F_X(x) = P[X \leq x]$.

2.2 Fungsi Pembangkit Moment

Definisi 2.2.1 :

Fungsi pembangkit moment variabel acak $x = \psi(t) =$

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} d(F(x))$$

Semua moment variabel acak x dapat dicari dari $\psi(t)$ dengan mendeferensialkan ke t dan mengambil harga t = 0.

$$\left.\frac{d\ \psi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\ E(e^{tx})}{dt}\right|_{t=0} = E(x\ e^{tx}) = E(x)$$

dan seterusnya akan didapat :

$$\left.\frac{d^n\ \psi(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = \left.\psi^n(t)\right|_{t=0} = E(x^n) \text{ ini adalah moment ke-n}$$

Bila fungsi pembangkit moment ada, maka fungsi distribusi ditentukan dengan tunggal. Hal ini penting untuk menentukan fungsi distribusi suatu variabel acak bila diketahui fungsi pembangkitnya.

Definisi 2.2.2 :

Statistik cukup, misalnya P keluarga distribusi parameter dari variabel random $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$

Misal θ parameternya dan $p\theta \in P$

dimana : { p distribusi dan θ parameter

maka $g(x_1, \ldots x_n)$ dikatakan statistik cukup

Jika $p\theta \; \{(X_1=x_1,\ X_2=x_2,\quad X_n=x_n)\}$

sehingga $\underset{\text{var random}}{g(X_1, \ldots X_n)} = \underset{\text{anggota var random}}{g(x_1, \ldots x_n)}$

Untuk menentukan statistik cukup dengan menggunakan definisi tersebut, dan untuk mencari statistik cukupnya menggunakan :

Teorema Fisher Neyman :

Misalkan $x_1, \ldots x_n$ var random dengan parameter θ

statistik $g(\underset{\sim}{x})$ adalah statistik cukup untuk θ bhb dapat menunjukkan $f(\underset{\sim}{x},\theta) = h(x).q(g(x),\theta)$

dengan $h(\underset{\sim}{x})$ = fungsi dari x yang tidak tergantung θ

$(g(\underset{\sim}{x}),\theta)$ = fungsi yang tergantung θ hanya melalui $g(x)$

$f(\underset{\sim}{x},\theta)$ = distribusi bersama dari $x_1, \ldots, x_n$

Theorema ini dapat diillustrasikan :

Misal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suatu sampel random independen dari populasi Poisson dengan rata-rata θ. Carilah statistik cukup untuk θ.

Penyelesaian :

$x_i \quad p(\theta)$

$$f(x_i) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^{x_i}}{x_i\,!} \qquad i = 0,1,2,...$$

$$f(x_i,\theta) = \prod_{i=0}^{n} f(x_i) = \prod_{i=0}^{n} \frac{e^{-\theta}\,\theta^{x_i}}{x_i}$$

$$= \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\theta}\theta^{x_2}}{x_2!} \cdots\cdots \frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!}$$

$$= e^{-n\theta} \cdot \frac{\theta^{\Sigma x_i}}{x_1!x_2!x_n!}$$

$$= \frac{1}{x_1!....x_n!}\,e^{-n\theta}\,\theta^{\Sigma x_i}$$

Jadi $h(\underset{\sim}{x}) = \dfrac{1}{x_1!......x_n!}$, $q(g(\underset{\sim}{x}),\theta) = e^{-n\theta}\,\theta^{\Sigma x_i}$

sehingga Σx_i statistik cukup terhadap θ ∎

2.3. Metode Likelihood

Misal $x_1,...x_n$ adalah sampel random independen dari populasi fungsi densitas $f(\underset{\sim}{x}|\theta)$.

Fungsi Likelihood dapat didefinisikan dengan mengambil salah satu fungsi :

$$L(\underset{\sim}{\theta}|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\underset{\sim}{\theta}) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^{x_i}}{x_i\,!}$$

Logaritma Likelihood :

$$L = \log L(\underset{\sim}{\theta}|\underset{\sim}{x})$$

$$= [\ -n\theta + \ln\theta^{\Sigma x_i} - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i\,!\ ]$$

$$= [\ -n\theta + \Sigma x_i \ln\theta - \Sigma \ln x_i\,!\ ]$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta} = -n + \frac{\Sigma x_i}{\theta}$$

Persamaan Likelihood :

$$\delta L/\delta\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -n + \Sigma\, x_i/\theta = 0$$

$$\Sigma x_i/\theta = n$$

$$\Sigma x_i = n\theta$$

sehingga $\theta = 1/n\ \Sigma x_i$

Illustrasi lain :

Fungsi Likelihood :

$$L(\underset{\sim}{\theta}|\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \underset{\sim}{\theta}) = \frac{1}{2\pi\sigma^{1/2}} .\exp\ \{\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

$$= 1/(2\pi\theta 2^{1/2} \cdot e^{-1/2\sigma^2 (x_i-\mu)^2} \ ,\ldots 1/(2\pi\sigma)^{1/2} \cdot$$

$$e^{-1/2\sigma^2 (x_n - \mu)^2}$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\ (\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-1/2\sigma^2 \Sigma(x_i-\mu)^2}$$

Logaritma Likelihood :

$$L = \log l(\underset{\sim}{\theta}|\underset{\sim}{x})$$

$$L = -n/2 \log 2\pi - n/2 \log \hat{\sigma}^2 - 1/2\hat{\sigma}^2 \Sigma(x_i - \hat{\mu})^2$$

$$\delta L/\delta\mu = -1/2\hat{\sigma}^2 \; . \; (2) \; . \; \Sigma(x_i - \hat{\mu}).(-1)$$

$$= \Sigma\,(x_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}^2$$

$$\delta L/\delta\sigma^2 = -n/2 \; . \; 1/\sigma^2 - \frac{\Sigma\,(x_i - \hat{\mu})^2}{(-2).\sigma^4}$$

$$\delta L/\delta\sigma^2 = \frac{-n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\Sigma\,(x_i - \mu)^2}{2\hat{\sigma}^2}$$

Persamaan Likelihood :

$$\delta L/\delta\mu = 0$$

$$\Sigma(x_i - \hat{\mu}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma x_i - n\mu = 0$$

$$n\mu = \Sigma x_i$$

$$\mu = 1/n\Sigma x_i$$

$$\delta L/\delta\sigma = 0$$

$$-n/2\hat{\sigma}^2 + \Sigma(x_i - \hat{\mu})^2/2\hat{\sigma}^4 = 0$$

$$-n\hat{\sigma}^2 + \Sigma(x_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$n\hat{\sigma}^2 = \Sigma(x_i - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\,\Sigma(x_i - \hat{\mu})^2$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma(x_i - 1/n\ \Sigma x_i)^2$$

Metode Likelihood dibagi dalam dua bagian :

1. Metode Maksimum Likelihood (MLE)

   adalah metode yang paling populer untuk menghasilkan estimator.

Fungsi Likelihood didefinisikan :

$$L(\tilde{\theta}|\tilde{x}) = \pi^{n} f(x_i|\theta) \text{ menjadi } \delta L(\tilde{\theta}|\tilde{x})/\sigma\theta_i = 0$$

2. Metode Test Rasio Likelihood (LRT)

   adalah metode untuk mencari statistik uji.

Teorema 2.3.1 :

Misal $x_1, x_2, ... x_n$ merupakan sampel random yang berdistribusi $N(\mu,\sigma) = N(\theta_1,\theta_2)$ dengan $n>1$ masing-masing bernilai $x_1, x_2, ..., x_n$. Akan menguji hipotesa Ho : (θ_1,θ_2), $\theta_1 = 0$ dan $\theta_2 > 0$ dengan H₁ : $(\theta_1,\theta_2) \in \Omega$, $\theta_1 = 0$ dan $\theta_2 > 0$

maka rasio likelihoodnya :

$$\lambda(x_1,x_2,...x_n) = \lambda = L(\hat{\omega})/L(\hat{\Omega}) = 1/\{1+(n\bar{x}^2/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)^{n/2}\}$$

dimana : n = ukuran sampel random

$\omega = \{(\theta_1,\theta_2)\ ;\ \theta_1 = 0, \quad 0<\theta_2<\infty,$ yaitu subset $\Omega\}$

$\quad = \{(\theta_1,\theta_2)\ ;\ -\infty<\theta_1<\infty, \quad 0<\theta_2<\infty\ \}$

$L(\hat{\omega}) = \max L(\hat{\omega})$

$L(\hat{\Omega}) = \min L(\hat{\Omega})$

Bukti :

Untuk mencari rasio likelihood suatu hipotesa statistik, harus ditentukan dulu fungsi likelihoodnya.

Fungsi probabilitas densitas diketahui :

$$\frac{1}{\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma\{(x_i-\mu_i)\}^2}{\sigma_i^{\,2}}$$

misal untuk σ_n^2 diganti dengan θ_2 maka diperoleh :

$$\frac{1}{\theta_1^{\,1/2},\ldots\ldots\theta_2^{\,1/2}.(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma\{(x_i-\mu_i)^2\}}{\theta_2}$$

karena banyaknya θ_2 adalah n, maka menjadi :

$$\frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma\,(x_i-\mu_i)^2}{\theta_2} \qquad (*)$$

Pada hipotesa Ho, karena meannya = 0 maka fungsi likelihood pada ω menjadi :

$$L(\hat{\omega}) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma x_i^{\,2}}{\theta_2}$$

Untuk H₁ jika meannya diganti dengan θ_1, maka fungsi likelihoodnya menjadi :

$$l(\hat{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma(x_i - \theta_1)^2}{\theta_2}$$

Kemudian fungsi likelihood ini didefinisikan parsial terhadap θ_1 dan θ_2 untuk mencari kedua fungsi tersebut.

Untuk mempermudah dibuat fungsi ln nya :

$$\ln L(\hat{\omega}) = -n/2 \ln(2\theta_2) - 1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2/\theta_2$$ dan

$$\ln L(\hat{\Omega}) = -n/2 \ln(2\theta_2) - 1/2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2/\theta_2$$

$$\frac{\delta \ln L(\Omega)}{\delta\theta_1} = \frac{-\Sigma(x_i - \theta_1)^2}{(-1).\theta_1} = \frac{\Sigma(x_i - \theta_1)^2}{\theta_1} = 0$$

$$\frac{\delta \ln L(\Omega)}{\delta\theta_2} = \frac{-n}{2\theta_2} + \frac{\Sigma(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} = 0$$

diperoleh :

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/n = \bar{x}, \text{ dan } \theta_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \Sigma x_i/n)^2$$

Sehingga fungsi likelihood maksimum dari Ho :

$$L(\hat{\omega}) = \frac{1}{2\pi\Sigma x_i^2/n}^{n/2} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma x_i^2}{\Sigma x_i /n^2}$$

$$= n/(2\pi \Sigma x_i^2)^{n/2} . e^{-n/2}$$

$$= [ne^{-1}/2\pi \Sigma x_i^2]^{n/2}$$

Hipotesa (H1) :

$$L(\hat{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi\Sigma(x_i - \bar{x})/n)^{n/2}} \cdot \exp \frac{-1}{2} \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma(x_i - \bar{x}) \ /n^2}$$

$$= \frac{n}{(2\pi\Sigma(x_i - \bar{x})^2)^{n/2}} \cdot e^{-n/2}$$

$$= \frac{ne^{-1}}{(2\pi\Sigma(x_i - \bar{x})^2)^{n/2}}$$

maka Test Rasio Likelihood untuk teorema ini :

$$\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{[\ ne^{-1}\ ]^{n/2} / [\ 2\pi\ \Sigma x_i\ ]^2}{[\ ne^{-1}\ ]^{n/2} / [\ 2\pi\ \Sigma(x_i - \bar{x})]^2}$$

$$= \frac{[\ \Sigma(x_i - \bar{x})^2\ ]^{n/2}}{[\ \Sigma x_i^{\ 2}\ ]^{n/2}}$$

$$= \frac{[\ \Sigma(x_i - \bar{x})^2\ ]^{n/2}}{[\ \Sigma(x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2\ ]^{n/2}} \quad \blacksquare$$

dimana :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2$$

2.4. Proses Gauss

Banyak fenomena terjadi dalam fisik dan dasar pengetahuan yang dipelajari sekarang. Tidak hanya seperti fenomena random tetapi juga seperti perubahan dengan waktu dan ruang. Pertimbangan sederhana juga membuat dalam tempat lain, seperti ilmu sosial, teknik dan manajemen. Bidang penerapan random variabel dimana fungsi waktu dan ruang atau keduanya selalu naik. Cakupan random variabel yaitu fungsi yang dapat dikatakan waktu, diketahui seperti proses Stokastik / proses random / fungsi random.

Definisi 2.4.1 :

Suatu proses stokastik $x(t)$, $t \in T$ dikatakan sebagai proses Gauss jika hanya jika untuk setiap bilangan bulat positif n dan setiap pilihan $t_1, t_2, \ldots t_n \in T$, variabel acak $x(t_1)$, $x(t_2), \ldots x(t_n)$ mempunyai distribusi normal gabungan.

Seandainya $x_1, x_2, \ldots x_n$ variabel acak yang berdistribusi normal gabungan dan fungsi densitas f. Dapat dibuktikan bahwa f berbentuk :

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1/(2\pi\sigma)^{n/2} . (\det \Sigma)^{1/2} . \exp \left[-1/2 \, (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})^1 . \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) \right]$$

dimana Σ adalah matrik kovarian :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(x_1, x_1) & \operatorname{cov}(x_1, x_2) \ldots\ldots & \operatorname{cov}(x_1, x_n) \\ \operatorname{cov}(x_2, x_1) & . & \\ \vdots & & \\ \operatorname{cov}(x_n, x_1) \ldots\ldots & & \operatorname{cov}(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

dan

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

dalam keadaan n = 2 maka :

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 . (1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[\frac{Q(x_1,x_2)}{2}\right]$$

$$\text{dimana } Q(x_1,x_2) = \frac{1}{1-\rho}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma^2}\right]$$

μ_1 dan σ_1^2 adalah mean dan varian x_1

μ_2 dan σ_2^2 adalah mean dan varian x_2

ρ adalah korelasi antara x_1 dan x_2

Dengan rumus diatas dapat dibuktikan bahwa harga harapan bersyarat x_n bila diketahui $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ adalah fungsi linier (n-1) variabel acak, yaitu ;

$E(x_n \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots X_n=x_{n-1}=x_{n-1})$

$= a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots b_{n-1}x_{n-1}$

untuk a_1, b_1, $b_2, \ldots b_{n-1}$ konstanta yang cocok.

Akibat pengintegrasian, jika x(t), $t \in T$ merupakan proses Gauss, maka $\int f(t)\ x(t)\ dt$ berdistribusi normal.

proses Gauss yang stasioner, eksponensial berkorelasi kadang dikatakan Colored Noise.

2.5. Derivatif Proses Wiener

Proses sokastik $w(t)$, $-\infty < t < \infty$ disebut proses Wiener, jika memenuhi syarat :

1. $w(0) = 0$
2. $w(t) - w(s)$ berdistribusi normal dengan $\mu = 0$ dan var $\sigma^2(t-s)$ untuk $s \leq t$
3. $w(t_2) - w(t_1)$, $w(t_3) - w(t_2)$, $\ldots w(t_N) - w(t_{n-1})$ independen untuk $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$

Sering pula proses seperti ini disebut proses Wiener dengan parameter σ^2 atau proses Wiener Lavy.

Dari syarat yang harus dipenuhi oleh proses Wiener terdapat bahwa $\mu_w(t) = 0$, sedangkan :

$$E(w(t_2) - w(t_1))\ (w(t_4)-w(t_3)) = 0$$

$$= E(w(t_2) - w(t_1))\ .\ E((w(t_4)-w(t_3)) = 0$$

dan fungsi kovarian untuk proses Wiener :

$$rw(s,t) = \begin{cases} \sigma^2 \min\ (\ |s|,|t|) & ,\ s,t>0 \\ 0 & ,\ s,t \leq 0 \end{cases}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} rw(s,t) &= \operatorname{cov}\ (w(s),w(t)) \\ &= \operatorname{cov}\ (w(s),w(s)+w(t)-w(s)) \\ &= \operatorname{cov}\ (w(s),w(s)) + \operatorname{cov}\ (w(s),w(t)-w(s)) \\ &= \operatorname{var}\ w(s) \\ &= \sigma^2.|s| \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

untuk $s>t>0$, sedangkan untuk $s<0$ dan $t>0$

$r(s,t) = \operatorname{cov}\ (w(s),w(t)) = 0$, karena syarat prose Wiener untuk s=t :

$$rw(s,s) = rw(t,t) = \text{cov}\,(w(s),w(s))$$
$$= \text{var}\ w(s)$$
$$= \sigma^2.|s| = \sigma^2.|t|$$

artinya rw(s,t) =

$$\begin{cases} \sigma^2 \min(\,|s|,|t|\,) & , s,t>0 \\ 0 & , s,t \le 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Proses Wiener tidak dapat dideferensialkan tetapi seandainya w(t) , $-\infty < t < \infty$, dengan parameter σ^2 ,adan b bilangan berhingga dan f fungsi kontinue dapat dideferensialkan pada interval tertutup [a,b].

$$\int_a^b f(t)\ w'(t)\ dt \text{ dan } \int_a^b f(t)\ dw(t)$$

Memberi Definisi :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(t)\ .\ \left\{\frac{(w(t+\varepsilon)-w(t))}{\varepsilon}\right\} dt$$

Pandang :

$$\int_a^b f(t)\ \left(\frac{w(t+\varepsilon)-w(t)}{\varepsilon}\right) dt = \int_a^b f(t)dt.\left(\frac{1}{\varepsilon}.\int_t^{t+\varepsilon} w(s)ds\right) dt$$

$$\int_a^b f(t)\ \left(\frac{w(t+\varepsilon)-w(t)}{\varepsilon}\right) dt = \left(f(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} w(s)ds\right)_a^b$$

$$- \int_a^b f'(t) \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} w(s)ds\right]dt$$

Karena proses Wiener merupakan fungsi sampel kontinue, maka ruas kanan persamaan diatas konvergen ke

$$f(t)w(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)w(t)dt.$$

$$= \int_a^b f(t)dw(t) = f(b)w(b) - f(a)w(a) - \int_a^b f'(t)w(t)dt.$$

Derivatif proses Wiener disebut White Noise, dalam arti bukan proses stokastik biasa. Sedangkan $dw(t) = w'(t)$ hanya merupakan hubungan fungsional .

2.6. Dasar Teori Desain Robust

Desain Robust adalah sebuah teknik metodologi untuk memperbaiki produk selama penelitian dan pengembangan, juga meningkatkan kualitas produk agar dapat produk cepat dan beaya rendah.

DR. Taguchi mengembangkan dasar-dasar Desain Robust dan pengesahan dalam filsafat dasar dengan aplikasi pengembangan banyak produk. Dalam kontribusi pengenalan ini Taguchi menerima secara perseorangan *Penghargaan Deming* tahun 1962, yang mana pengakuan tertinggi dalam hal kualitas.

Metode Desain Robust dapat diterapkan dengan mudah ke berbagai masalah. Penerapannya dalam metode listrik, produk mobil dan industri lainnya dan sebagian mendominasi pemasaran Internasional dalam industri Jepang.

Desain Robust menggambarkan berbagai gagasan dari desain percobaan statistik dengan rencana percobaan untuk mendapatkan informasi langsung mengenai berbagai penemuan dalam membuat teknik penyelesaian. Desain Robust menambahkan desain baru percobaan statistik. Dengan tegas mengamanatkan perhatian lanjut terhadap seluruh produk dan proses rancangan :

1. Bagaimana mengurangi ekonomi dalam berbagai produk dalam lingkungan pelanggan.
2. Bagaimana menjamin perolehan keputusan yang optimum selama percobaan labolatarium dapat menghasilkan dalam lingkungan pelanggan.

Dalam kesepakatan ini, Desain Robust menggunakan matematika formalisme pada desain percobaan statistik, tetapi melalui proses implisit matematika adalah berbeda dengan ragam lainnya. Jawaban-jawaban yang dihasilkan Desain Robust ada dua kesepakatan dipelajari mengenai pembuatan sebuah nilai untuk menghasilkan produk pada kegiatan Penelitian dan Pengembangan. Metode Desain Robust masih terus dikembangkan. Dengan penelitian didapat jalan keluar penerapan metode dan mengalami pertumbuhan pesat dalam dekade akan datang.

Manfaat dari penerapan Desain Robust adalah :

1. 4-lipatan penurunan dalam proses variansi
2. 3-lipatan penurunan dalam menimbulkan kegagalan

3. 2-lipatan penurunan dalam waktu proses (sebab proses menjadikan stabil sepanjang waktu, pemeriksaan konsumen dikeluarkan)
4. memudahkan transmisi pada desain dari penelitian pada pabrik
5. memudahkan penambahan pada proses teknologi garis terbaik

2.7. Analisa Varian pada Desain Robust

Tujuan melakukan pengembangan produk dan pengembangan proses yaitu untuk meningkatkan hasil pekerjaan dari suatu produk atau proses bagi kebutuhan dan harapan konsumen. Ketelitian dan kecermatan pengamatan dengan meminimumkan kerugian akibat variasi produk/proses. Untuk itu dalam suatu eksperimen /percobaan diusahakan untuk mengurangi dan mengendalikan variasi dari produk /proses tersebut. Analisa Varian digunakan untuk menyeleksi beberapa variansi yang diuji, yaitu :

1. Variasi rata-rata (mean) dari pengamatan dalam masing-masing level faktor disekitar rata-rata seluruh pengamatan.

$$SS_A = [\sum_{i=1}^{k} A_i^2/nA_i] - T^2/N$$

dimana :

A_i = jumlah data yang diamati dari level ke-1 untuk faktor A

nA_i = banyaknya level ke-i yang diamati

T = total semua data yang diamati

N = jumlah seluruh percobaan

2. Variasi rata-rata (mean) dari seluruh pengamatan yang merupakan rata-rata dari kuadrat simpangan pengamatan dari rata-rata seluruh pengamatan.

$$SS_M = T^2/N = N[T/N]^2 = N\bar{T}^2$$

dimana :

N = jumlah seluruh percobaan

$\bar{T}$ = rata-rata seluruh percobaan

3. Variasi pengamatan secara individual disekitar rata-rata pengamatan dalam tiap-tiap level faktor.

$$SS_E = SS_{\bar{T}} - SS_M$$

dengan : $SS_E = \sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{T})^2$

$$= \Sigma(Y_i^2 - 2\bar{T}Y_i + \bar{T}^2)$$

$$= \Sigma Y_i^2 - \Sigma 2\bar{T}Y_i + \Sigma\bar{T}^2$$

$$= \Sigma Y_i^2 - 2\bar{T}\Sigma Y_i \; N\bar{T}^2$$

untuk $T = \Sigma Y_i$ dan $\bar{T} = T/N$ maka :

$$(\Sigma Y_i^2) - 2(T/N).T - N\bar{T}^2$$

$$= (\Sigma Y_i^2) - 2(T^2/N) + T^2/N$$

$$= (\Sigma Y_i^2) - T^2/N$$

4. Variasi error (kesalahan varian)

adalah suatu faktor penting dalam pengujian, variasi yang diterangkan oleh faktor dan atau interaksi tetap memuat variasi error.

$$Ve = SS_E/Ve = (SS_{\bar{T}} - SS_M)/r-1$$

dimana :

r = banyaknya faktor yang berinteraksi

$SS_{\bar{T}}$ = jumlah kuadrat total