BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 HIMPUNAN DAN MATRIK

2.1.1 DEFINISI HIMPUNAN

Himpunan adalah suatu kumpulan elemen-elemen. Elemen-elemen ini dapat berupa bilangan, orang, benda atau yang lainnya. Pada umumnya himpunan ini dilambangkan dengan huruf besar, seperti: A,B,C dan seterusnya.

Apabila elemen a menjadi anggota suatu himpunan B, dinyatakan dengan : $a \in B$. sebaliknya, jika a bukan anggota B, dinyatakan dengan : $a \notin B$.

Interseksi dari dua himpunan H dan K, dengan tanda $H \cap K$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekaligus berada dalam H maupun K.

Union (gabungan) dari himpunan H dan K, dengan tanda $H \cup K$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan H atau K.

2.1.2 Matrik Simetri

Suatu matrik bujur sangkar A berorde n dikatakan simetri jika: $A^T = A$.

Dimana: A^T adalah transpose dari A, sehingga elemen a_{ij} dalam A menjadi a_{ji} dalam A^T.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jadi A simetri, sebab: $A^T = A$.

2.1.3 Matrik Sparse

Suatu matrik A dikatakan sparse, jika sebagian besar dari elemen A adalah nol.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

2.1.4 Definit Positif

Suatu matrik A dikatakan definit positif jika untuk sebarang vektor $X \neq 0$ berlaku : $X^T AX > 0$

Suatu matrik A yang simetri merupakan matrik yang definit positif jika A diagonal dominan dengan elemen diagonal positif.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrik A simetri serta diagonal dominan dengan elemen diagonal positif, maka A definit positif.

2.1.5 Matrik Segitiga Atas dan Bawah

Matrik segitiga atas adalah matrik yang semua elemen dibawah diagonal utamanya sama dengan nol ($a_{ij} = 0$ untuk $i>j$).

Matrik segitiga bawah adalah matrik yang semua elemen diatas diagonal utamanya sama dengan nol($a_{ij} = 0$ untuk $i<j$). Contoh :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

A : matrik segitiga atas, dan B : matrik segitiga bawah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2.1.6 Matrik Permutasi

Suatu matrik permutasi P adalah matrik bujur sangkar orde n sedemikian hingga masing-masing baris atau kolomnya mengandung satu elemen yang sama dengan 1, sedangkan elemen sisanya nol. Matrik permutasi yang sederhana adalah matrik identitas I.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 DEKOMPOSISI

Theorema 2.2.1 :

Jika A matrik simetri berukuran (nxn), dan A definit positif, maka terdapat matrik segitiga bawah L dengan unsur diagonalnya positif, sedemikian hingga: $A = LL^T$.

Bukti : Dengan induksi

Untuk $A_{(1x1)}$, maka $L = (a_{1x1})^{1/2}$ tunggal.

Misalkan benar untuk $A_{(n-1)x(n-1)}$

Tinjau untuk A_{nxn} dan tulislah : $A_{(nxn)} = \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \overline{H} \end{bmatrix}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dimana d = skalar positif, v = vektor berukuran (n-1) dan $\bar{H}$ sub matrik berukuran (n-1) x (n-1).

Selanjutnya A dapat dipartisi:

$$\begin{pmatrix} d & v^T \\ v & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dimana:

$H = \bar{H} - vv^T/d$, dan I_{n-1}= matrik identitas.

Diketahui A_{nxn} definit positif, maka:

$$\begin{pmatrix} -\frac{x^T v}{d} & x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & v^T \\ v & \bar{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-x^T v}{d} \\ x \end{pmatrix} > 0$$

$$x^T \left(\bar{H} - \frac{vv^T}{d} \right) x > 0$$

$$x^T H x > 0$$

Jadi H definit positif. Berdasarkan asumsi induksi, H dapat dikomposisimenjadi $H = L_H L_H^T$, dengan L_H tunggal dan unsur diagonalnya positif, maka:

$$\begin{pmatrix} d & v^T \\ v & \bar{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & L_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & L_H^T \end{pmatrix}$$

$$= LL^T$$

2.2.2 DEKOMPOSISI GAUSS

Misalkan $A(1) = \begin{pmatrix} d & v^T \\ v & \bar{A} \end{pmatrix}$ matrik definit positif

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan d skalar bernilai positif, v adalah vektor berukuran (n-1) dan $\bar{A}$ sub matrik berukuran (n-1) x (n-1). Matrik A dapat didekomposisi menjadi:

$$A(1) = \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/d & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & v^T \\ 0 & A(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/d & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & A(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v^T/d \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= L_1 \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & A(2) \end{bmatrix} L_1^T = L_1 D_1 L_1^T$$

Dimana $A(2) = \bar{A} - vv^T/d$ dan I matrik identitas berukuran (n-1) x (n-1).

Dengan cara yang sama pendekomposisian dapat dilakukan terhadap A(2) yang definit positif. Jadi jika pendekomposisian ini dilanjutkan , akan menghasilkan: A(3), A(4),..., A(n-1); dengan masing-masing $A(i) = L_i D_i L_i^T$ untuk i = 1,2,...,n-1.

Akhirnya diperoleh:

$$A = LDL^T$$

dengan $L = L_1 L_2 \ldots\ldots L_{n-1}$; $D = D_1 D_2 \ldots\ldots D_{n-1}$ dan $L^T = L_1 L_2 \ldots\ldots L_{n-1}^T$.

Sehingga untuk menyelesaikan persamaan Ax = b dengan menggunakan dekomposisi Gauss adalah dengan menyelesaikan persamaan:

$$Lz = b$$

$$Dy = z$$

$$L^T x = y$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 2.2.2:

$$A(1) = A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2/3 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 2/3 & 1 & 4/3 & 17/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 8/3 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ -2/3 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 4/3 & 17/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 11/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(3) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 11/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A(4) = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 53/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 19/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A(5) = 19/5$

Akhirnya diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/4 & 1/5 & 1 & 1 \\ -1/3 & 1/4 & 1/5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3 DEKOMPOSISI CHOLESKY

Tinjau kembali matrik A yang definit positif pada sub bab 2.2.2 yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \bar{A} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode cholesky, A dapat didekomposisi menjadi:

$$\begin{bmatrix} d & v^T \\ v & \bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{1/2} & 0 \\ v/d^{1/2} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{A} - vv^T/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{1/2} & v^T/d^{1/2} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} L_1^T$$

$$= L_1 A_1 L_1^T$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} L_1^T$$

$$= L_1 A_1 L_1^T$$

Jika matrik A_1 yang definit positif didekomposisi lagi, dengan cara yang sama akan menghasilkan $A_1 = L_2 A_2 L_2^T$. Selanjutnya bila halini dilakukan sampai n kali, maka hasil dekomposisi adalah :

$$A = L_1 L_2 \ldots\ldots A_n \ldots\ldots L_2^T L_1^T$$

$$= LL^T$$

Dengan $A_n = I_n$ matrik identitas dan L adalah matrik segitiga bawah dengan unsur diagonalnya positif.

Jadi untuk menyelesaikan sistem persamaan $Ax = b$ dengan menggunakan metode cholesky adalah dengan menyelesaikan persamaan :

$$Ly = b$$

$$L^T x = y$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

contoh :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 5/8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode cholesky didapat:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Didapat:

$$y = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.5 \\ 6 \\ -2.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dan

$$L^T x = y$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1 & -0.25 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.5 \\ 6 \\ -2.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Didapat:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -8 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

2.3 BEBERAPA DEFINISI MENGENAI GRAPH

DEFINISI 2.3.1:

Suatu Graph adalah pasangan (X,E), dimana X adalah suatu himpunan elemen-elemen yang tidak kosong dan berhingga dan elemen-elemen itu disebut vertex (titik), sedangkan

$$E = \{ \{x,y\} \mid x,y \in X \text{ dan } x \neq y \}$$

Selanjutnya X disebut himpunan titik (vertex/node) dan E disebut himpunan sisi atau garis (edge).

Misalkan diberikan sistem persamaan linier (S.P.L) : Ax = b dengan A matrik koefisien yang simetri, ukuran n×n. Graph yang berkaitan dengan A, ditulis :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$G^A = (X^A, E^A)$$

dimana : X^A = menyatakan kumpulan n titik yang menunjukkan nomor baris atau kolom.

$$E^A = \{ \{i,j\} \mid a_{i,j} = a_{j,i} \neq 0 \; ; \; i \neq j \; ; \; i,j \in X^A \}$$

Sebagai ilustrasi berikut ini diberikan contoh matrik dan graph yang berkaitan dengannya :

1. Diberikan matrik A :

$$\begin{bmatrix} 1 & * & & & & * \\ * & 2 & * & * & & \\ & * & 3 & & * & \\ & * & & 4 & & \\ & & * & & 5 & * \\ * & & & & * & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan i menyatakan diagonal utama ; i = 1,2,....,6

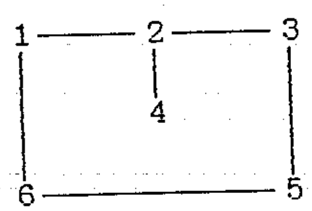
* menyatakan unsur yang tidak nol.

Maka X^A = {1,2,3,4,5,6}

E^A = { {1,2}, {1,6}, {2,3}, {2,4}, {3,5}, {5,6} }

dan graph yang berkaitan dengan A adalah :

G^A =



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. Matrik tridiagonal :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & * & & & \\ * & 2 & * & & \\ & & & & \\ & & * & n-1 & * \\ & & & * & n \end{bmatrix}$$

dan graph yang berkaitan dengan A :

$$G^A : 1 \text{———} 2 \text{———} 3 \text{————}\cdots\cdots\text{———} n$$

DEFINISI 2.3.2:

Dua vertex x dan y pada G dikatakan adjacent jika $\{x,y\} \in E$.

Misalkan $Y \subset X$, $adj(Y) = \{ x \in X - Y \mid \{x,y\} \in E$ untuk beberapa $y \in Y \}$

adalah himpunan adjacent dari Y.

Jika Y terdiri dari satu vertex, ditulis Adj (y), ini berarti Adj ({y}).

DEFINISI 2.3.2 :

Misalkan $Y \subset X$, Degreedari Y, ditulis Deg (Y), adalah: Deg (Y) = |Adj (Y)| ; menyatakan banyaknya unsur dari adjacent (Y).

DEFINISI 2.3.4:

Misalakn x dan y dua vertex yang berbeda pada G. Suatu path dari x ke y dengan panjang p>1 adalah himpunan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

terurut dari p+1 vertex yang berbeda $(v_1, v_2, \ldots, v_{p+1})$ sedemikian hingga: $v_{i+1} \in$ adj (v_i) ; $i = 1, 2, \ldots, p$ dengan $v_1 = x$ dan $v_{p+1} = y$.

Jika $v_1 = v_{p+1} = x$, maka path tersebut disebut cycle.

DEFINISI 2.3.5:

Suatu graph dikatakan terhubung, jika setiap pasang dua vertex yang berbeda dihubungkan oleh minimal satu path.

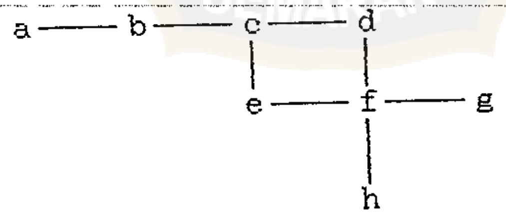
DEFINISI 2.3.6:

Misal $G = (X,E)$ dan $Y \subset X$, maka $G(Y) = (Y, E(Y))$ dengan $E(Y) = \{ \{x,y\} \in E \mid x \in Y ; y \in Y \}$ merupakan subgraph dari G.

Subgraph terhubung maximal dari G disebut komponen terhubung (komponen) dari G.

Graph yang tak terhubung terdiri dari dua atau lebih komponen.

Contoh:



Gambar diatas merupakan graph terhubung, oleh karena itu hanya mempunyai satu komponen.

DEFINISI 2.3.7:

Misalkan $G = (X,E)$ terhubung. $Y \subset X$ dikatakan separator (pemisah) dari G jika subgraph $G(X-Y)$ tidak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

terhubung atau terdiri lebih dari satu komponen terhubung. Subgraph G(Y) dengan komponen terhubungnya dikatakan Leaf (daun) dari G.

Y dikatakan separator minimal, jika Y tidak mengandung himpunan bagian yang juga merupakan separator.

DEFINISI 2.3.8:

Clique (kelompok) dari suatu graph adalah himpunan vertex yang saling berkaitan.

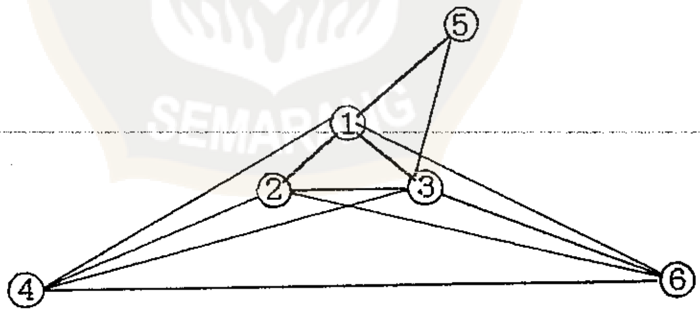
Separation clique (pemisah berupa clique) adalah separator yang juga berupa clique.

DEFINISI 2.3.9:

Misalkan a,b $\in$ X dan a $\in$ Adj (b).

Separator a,b adalah suatu separator sedemikianhingga a dan b berada pada dua komponen yang berbeda, sebut c_a dan c_b.

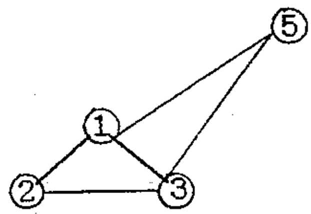
Contoh:



Y = {1,2,3} adalah separation clique, dengan komponen:

c_1 = ({4},Ø); c_2 = ({5},Ø); c_3 = ({6},Ø).

Leaf yang mengandung vertex 5 adalah:



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$Y' = \{1,3\}$ merupakan separator minimal yang memisahkan vertex 5 dari 4 dan 6.

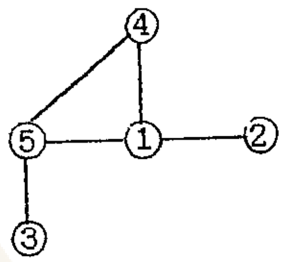
2.4 HUBUNGAN ANTARA ELIMINASI GAUSS DENGAN ELIMINASI GRAPH

Pada subbab ini akan dibahas hungan antara eliminasi Gauss dengan eliminasi graph.

Kembali pada contoh 2.2.2:

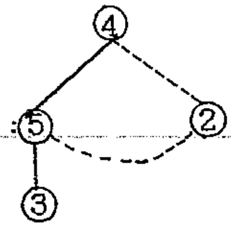
$$A(1)=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$G^{A(1)}$:



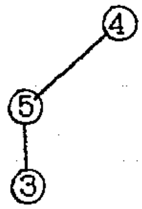
$$A(2)=\begin{bmatrix} 8/3 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ -2/3 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 4/3 & 17/3 \end{bmatrix}$$

$G^{A(2)}$:



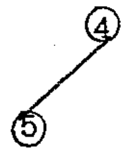
$$A(3)=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

$G^{A(3)}$:



$$A(4)=\begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 53/10 \end{bmatrix}$$

$G^{A(4)}$:



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

A(5) : 19/5 $G^{A(5)}$: 5

Terlihat pada contoh di atas, jika pada A (1) dilakukan eliminasi Gauss dan dihasilkan A(2), A(3), A(4) dan A(5), maka $G^{A(1)}$, $G^{A(2)}$, ..., $G^{A(5)}$ berturut-turut adalah graph yang berkaitan dengan matrik tersebut.

Jadi proses eliminasi Gauss pada sebuah matrik dapat diinterpretasikan sebagai proses eliminasi pada graph yang berkaitan dengannya dan sebaliknya.

Proses eliminasi pada graph dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misal x_i vertex dari G = (X,E), maka graph hasil eliminasi vertex x_i (G_{x_i}) dapat diperoleh dari G dengan cara :

1. Menghilangkan vertex x_i dan sisi yang menyertainya.
2. Tambahkan garis sedemikian hingga semua titik-titik yang adjacent dengan x_i pada G juga merupakan pasangan adjacent pada graph hasil eliminasi vertex x_i (G_{x_i}).

Jika L matrik segitiga bawah hasil dekomposisi cholesky dari matrik A, didefinisikan "Filled Matrix" F(A) dari A adalah matrik jumlahan L + L^T. Jadi F(A) atau F =L + L^T. Graph yang berkaitan dengan matrik F ditulis : $G^F = (X^F, E^F)$, dengan $X^F = X^A$.

Hubungan antara E^F dan E^A dapat dilihat pada lemma berikut ini.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

LEMMA 2.4.1 :

Pasangan $\{x_i, x_j\} \in E^F \leftrightarrow \{x_i, x_j\} \in E^A$ atau $\{x_i, x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k, x_j\} \in E^F$ untuk suatu $k < \min\{i,j\}$.

BUKTI :

=====>

Misal $\{x_i, x_j\} \in E^F$. Maka ada 2 kemungkinan:

1. $\{x_i, x_j\} \in E^A$.
2. $\{x_i, x_j\} \notin E^A$.

Misal 2) yang terjadi dan $i<j$.

Misal $k<i$. Unsur a_{ij} dari matrik A setelah pengeliminasian variabel x_k atau vertex ke-k adalah:

$$a_{ij}' = -(a_{ik} / a_{kk})\, a_{kj} + a_{ij}$$

Karena $\{x_i, x_j\} \notin E^A$, maka $a_{ij} = 0$

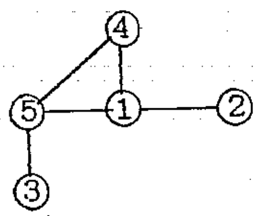
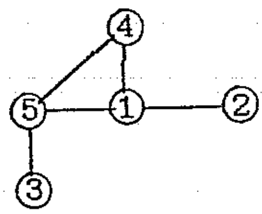
Karena $\{x_i, x_j\} \in E^F$, maka $a_{ij}' \neq 0$. Ini hanya mungkin terjadi jika $a_{ik} \neq 0$ dan $a_{jk} \neq 0$ atau $\{x_i, x_k\} \in E^A$ dan $\{x_k, x_j\} \in E^F$. Akibatnya $\{x_i, x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k, x_j\} \in E^F$.

<=====

i) Misalkan $\{x_i, x_j\} \in E^A$, maka $\{x_i, x_j\} \in E^F$.

ii) Misal $\{x_i, x_j\} \notin E^A$ dan ada $k < \min\{i,j\}$ sedemikian hingga $\{x_i, x_k\} \in E^F$ dan $\{x_k, x_j\} \in E^F$. Jika vertex ke-k dieliminasi, mengakibatkan $\{x_i, x_j\} \in E^F$.

Contoh:

G^A :  maka G^F : 

Sedangkan struktur matrik A dan F nya adalah:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & * & & * & * \\ * & 2 & & & \\ & & 3 & & * \\ * & & & 4 & * \\ * & & * & * & 5 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} 1 & * & & * & * \\ * & 2 & & \otimes & \otimes \\ & & 3 & & * \\ * & \otimes & & 4 & * \\ * & \otimes & * & * & 5 \end{bmatrix}$$

dengan

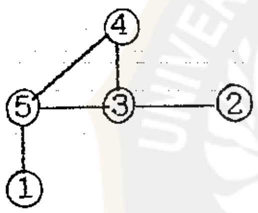
i menyatakan unsur diagonal, i = 1,2,...,5

$*$ menyatakan unsur tidak nol

$\otimes$ menyatakan unsur fill-in (unsur tidak nol di L, berasal dari unsur nol di A).

Bila urutan vertex dari G^A diubah menjadi $G^{A'}$ dengan

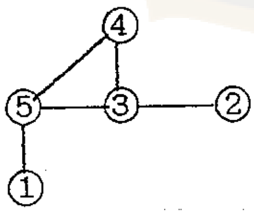
$G^{A'}$:



dan

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & & & & * \\ & 2 & * & & \\ & * & 3 & * & * \\ & & * & 4 & * \\ * & & * & * & 5 \end{bmatrix}$$

maka $G^{F'}$:



dan

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & & & & * \\ & 2 & * & & \\ & * & 3 & * & * \\ & & * & 4 & * \\ * & & * & * & 5 \end{bmatrix}$$

Terlihat di atas bahwa L pada F' tidak mengandung unsur fill-in lagi. Dengan demikian L yang diperoleh dari matrik A' tersebut telah mencapai optimal.

Hubungan antara A dengan A', dapat ditulis sebagai

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

berikut : $$A' = P\,A\,P^T$$

dengan P matrik permutasi.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)