BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. HIMPUNAN

2.1.1. PENGERTIAN

Himpunan adalah sekelompok objek-objek yang berada dalam satu kesatuan atau batasan, dan mempunyai sifat keterikatan di antara anggota-anggotanya. Suatu himpunan dilambangkan dengan huruf besar, misalnya himpunan A, himpunan B, dan lain-lain. Jika A adalah suatu himpunan dan x anggota dari himpunan A, maka dapat ditulis :

$$x \in A$$

Jika y bukan anggota himpunan A, dapat ditulis :

$$y \notin A$$

Definisi 1.

Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika himpunan tersebut tidak mempunyai anggota, dan dinotasikan dengan $\varnothing$ atau { }

2.1.2. HUBUNGAN ANTAR HIMPUNAN

Definisi 2.

Dua himpunan A dan B dikatakan sama (A = B) jika dan hanya jika untuk setiap anggota dari A adalah anggota B, dan untuk setiap anggota dari B adalah anggota dari A, sehingga dapat ditulis:

$$A = B \text{ jika dan hanya jika untuk setiap } x,$$
$$x \in A \text{ jika dan hanya jika } x \in B$$

Definisi 3

Jika terdapat dua himpunan A dan B, dikatakan A adalah subset (himpunan bagian) dari B jika dan hanya jika untuk setiap anggota A adalah anggota B, tetapi untuk setiap anggota B belum tentu anggota A, dan ditulis $A \subset B$.

2.1.3. OPERASI ANTAR HIMPUNAN

Definisi 4

Irisan (interseksi) dari dua himpunan A dan B, dengan tanda $A \cap B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya dimiliki oleh A dan juga dimiliki oleh B secara bersamaan.

Dinotasikan :

$$A \cap B = \{ x| \in A \text{ dan } x \in B \}$$

Definisi 5

Gabungan (union) dari dua himpunan A dan B, dengan tanda $A \cup B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota yang berada di A atau berada di B atau berada di kedua-duanya.

Dinotasikan :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$

Definisi 6.

Selisih dari dua himpunan A dan B, dengan tanda A-B adalah himpunan yang anggota-anggotanya termasuk di A tetapi tidak termasuk di B.

Dinotasikan :

$$A - B = \{x| \ x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$

2.2. GRAPH BERARAH

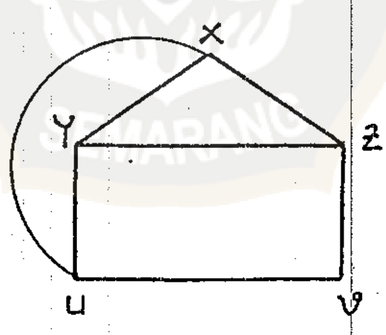
2.2.1. PENGERTIAN

Definisi 7

Suatu graph terdiri dari himpunan sejumlah berhingga objek yang disebut titik yang dinyatakan dengan V dan suatu himpunan ganda E yang merupakan himpunan pasangan unsur-unsur dari V yang disebut dengan garis. Graph G dinyatakan oleh G = (V,E). Ruas garis tersebut berpangkal dan berujung pada titik-titik.

Contoh :

Berikut suatu graph G = (V,E) dengan himpunan titik V={x,y,z,u,v} dan himpunan garis E = {(x,y),(x,z),(x,u),(y,z),(y,u),(z,v),(u,v)}. Graph ini dapat digambarkan secara geometris seperti berikut :



Gambar 1. Graph dengan 5 titik dan 7 garis

Definisi 8

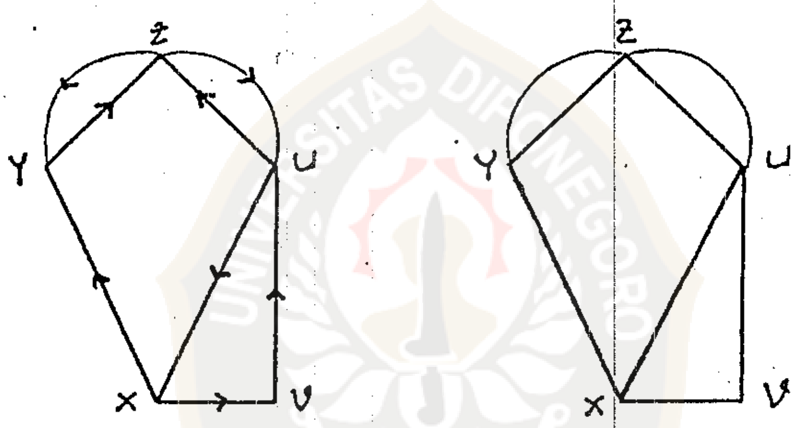
Suatu graph berarah (derected graph atau digraph) G terdiri dari suatu himpunan V objek yaitu titik dan suatu himpunan ganda E yaitu garis, yang terdiri dari pasangan terurut dari titik yang dituliskan sebagai (x,y) yang disebut dengan garis berarah.

Contoh :

Misalkan G = (V,E) adalah suatu graph berarah di mana himpunan titiknya adalah V = {x,y,x,u,v} dengan garis berarah

E = {(x,y),(y,z),(z,y),(z,u),(u,x),(x,v),(v,u),(u,z)}.

Pada gambar di bawah ini, di sebelah kiri adalah graph berarah dan di sebelah kanan adalah graph biasa



gambar 2. Graph berarah dan graph biasa yang terhubung

Definisi 9

Suatu garis U (x,y) dalam suatu graph, titik x disebut sebagai titik awal (initial endpoint) dan titik y disebut sebagai titik akhir (terminal endpoint).

Definisi 10

Lintasan (path) adalah deretan bergantian antara titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik di mana garis tidak boleh diulang.

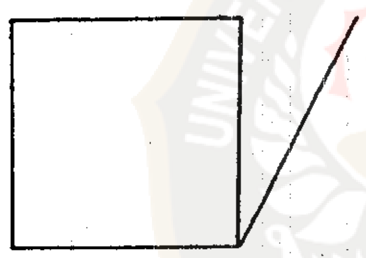
Definisi 11

Lintasan yang memiliki titik awal sama dengan titik akhir merupakan lintasan tertutup atau disebut sirkuit.

Definisi 12

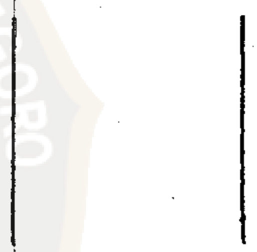
Graph terhubung (connected graph) adalah graph dimana setiap pasang vertex-vertexnya dihubungkan oleh path dan sebaliknya disebut graph tak terhubung (disconnected graph).

Contoh :



Gambar 3a

Merupakan graph terhubung



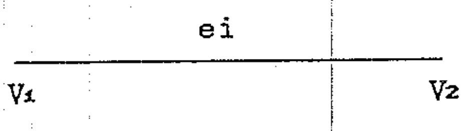
gambar 3b

Merupakan graph tak terhubung.

Definisi 13

Vertex Vi dan Vj disebut endvertex dari er jika er menghubungkan vertex Vi dan Vj

Contoh :



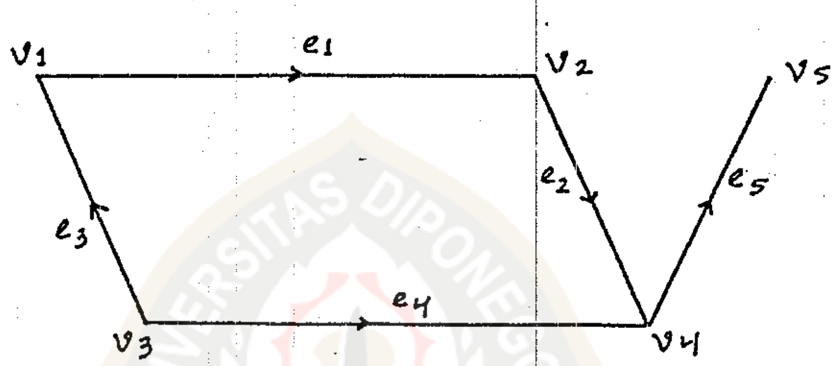
gambar 4

Pada gambar 4 vertex V_1 dan V_2 merupakan endvertex e_i

Definisi 14

Suatu edge e_i dikatakan incident dengan vertex Vj, jika Vj endvertex dari e_i.

Contoh :



Gambar 5

Pada gambar 5 edge e_1 dan e_2 incident dengan vertex V_2

Definisi 15

Dua vertex dikatakan adjacent jika dihubungkan dengan edge.

Contoh :

Pada gambar 5 vertex V_1 adjacent dengan Vertex V_2.

Definisi 16

Dua edge dikatakan adjacent jika keduanya incident pada vertex yang sama.

Contoh :

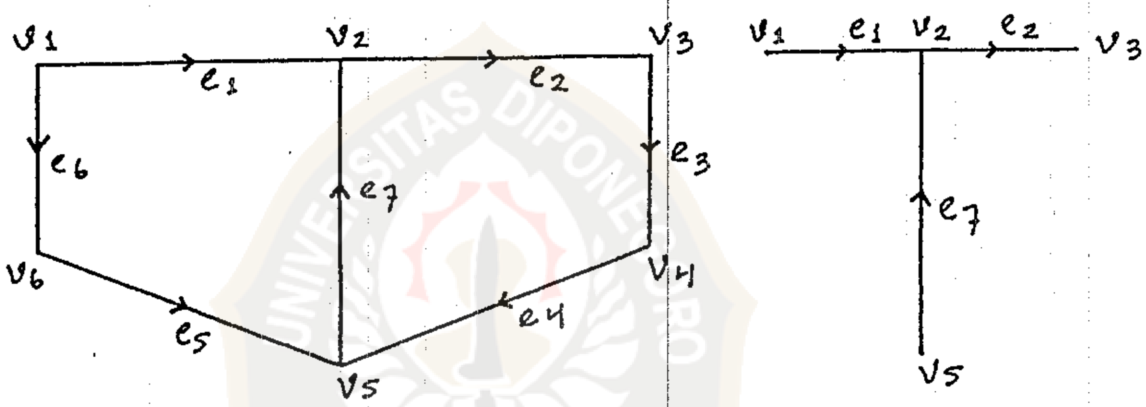
Pada gambar 5 e_1 dan e_2 adjacent

Definisi 17

H disebut sub graph dari graph G = (V,E) jika H adalah suatu graph dengan himpunan titik V' dan himpunan garis E' yang bersifat bahwa $V' \subset V$ dan $E' \subset E$

Contoh :

Andaikan G = (V,E) adalah graph dengan himpunan titik $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$, dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, seperti pada gambar :



Gambar 6 H adalah sub graph dari E.

Jika $V_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_5\}$ dan $E_1 = \{e_1, e_2, e_7\}$ maka $H = \{V_1, E_1\}$ merupakan graph. Jadi H adalah suatu sub graph dari G. Tetapi himpunan yang terdiri dari dua bagian berurutan dengan $V_2 = \{V_1, V_2\}$ dan $E_2 = \{e_4, e_5\}$ tidak merupakan graph, karena ada anggota dari E_2 yaitu e_4 yang titik awal maupun titik akhirnya bukan anggota dari V_2.

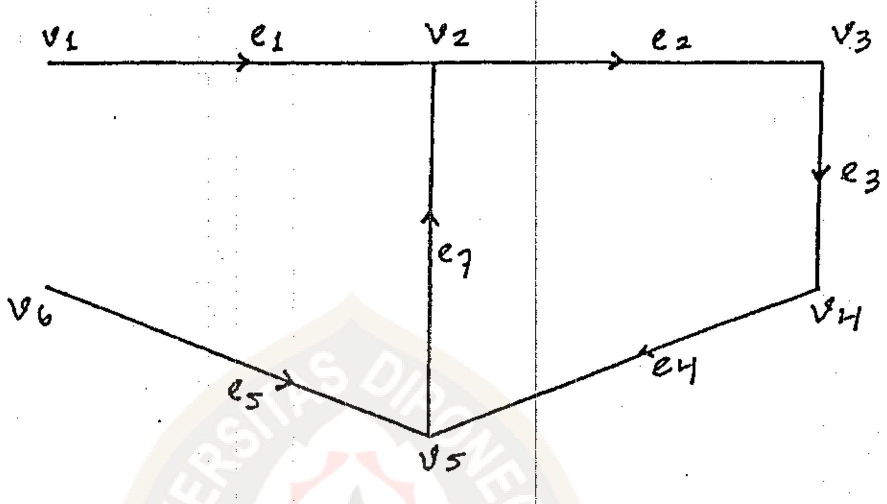
Definisi 18

H merupakan spanning sub graph dari G jika suatu sub graph H yang memuat semua titik dari graph G, atau V´ sama dengan V dan E´ subset dari E yang dinyatakan

H = (V,E´).

Contoh :

Seperti contoh gambar 7 jika V_3 = $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6)$ dan $E_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7\}$



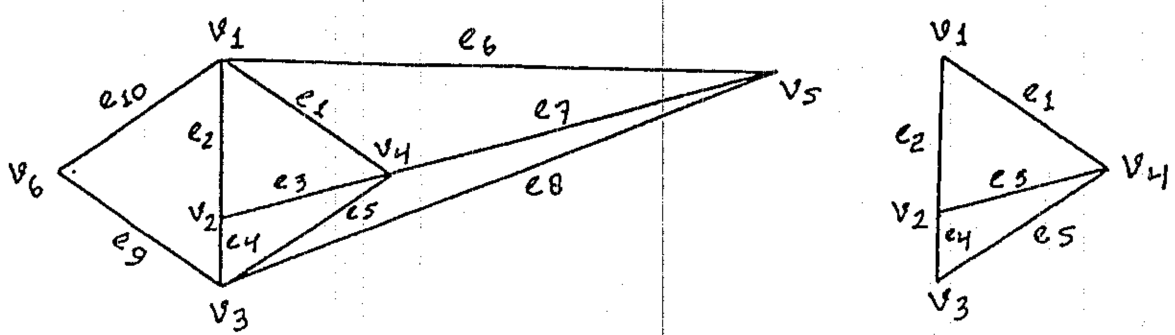
Gambar 7. H merupakan spanning subgraph dari G.

Definisi 19

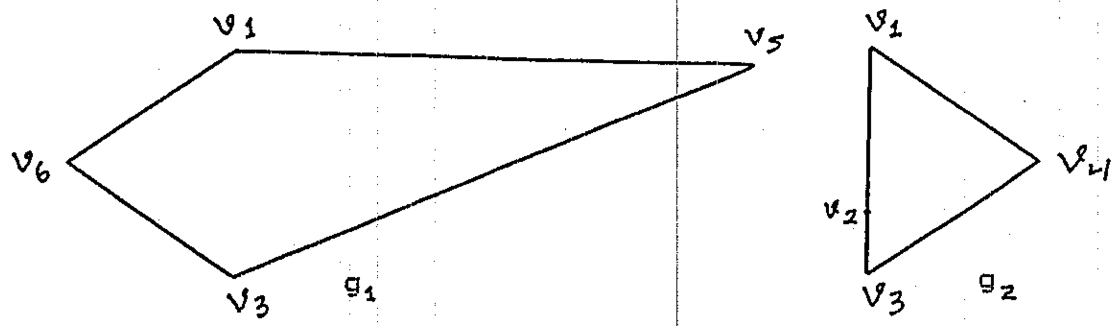
Dua subgraph g_1 dan g_2 dari graph G disebut edge terpisah (Edge Disjoint) jika g_1 dan g_2 tidak mempunyai edge bersama-sama.

Contoh :

g_1 dan g_2 pada gambar di bawah merupakan edge disjoint dari graph G.



Gambar 8a

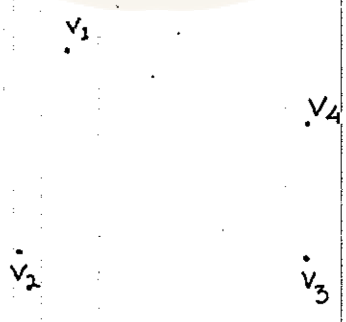


Gambar 8b merupakan edge disjoint dari graph G pada gambar 8a.

Definisi 20

Suatu graph dikatakan null graph jika edge E kosong atau graph tersebut tidak mempunyai edge.

Contoh :



Gambar 9

Gambar 9 merupakan suatu null graph dengan $V=\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$.

2.2.2 OPERASI DALAM GRAPH

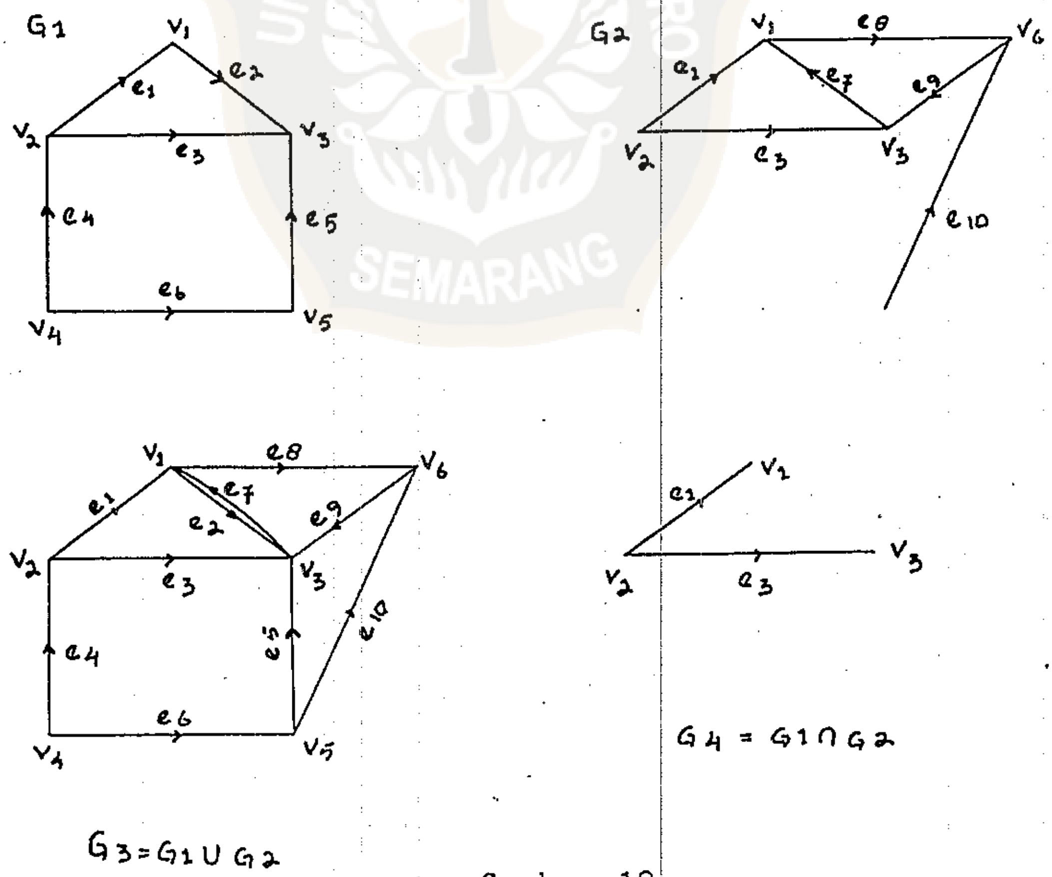
2.2.2.1 DEFINISI-DEFINISI

Definisi 21

Union dari dua graph $G_1=(V_1,E_1)$ dan $G_2=(V_2,E_2)$ adalah graph lain G_3 yang ditulis $G_3=G_1 \cup G_2$, dimana himpunan vertexnya $V_3 = V_1 \cup V_2$ dan himpunan edgenya $E_3=E_1 \cup E_2$.

Definisi 22

Irisan dari dua graph G_1 dan G_2 adalah graph lain G_5 yang ditulis $G_5 = G_1 \cap G_2$, dimana himpunan vertexnya $V_5 = V_1 \cap V_2$ dan himpunan edgenya $E_5 = E_1 \cap E_2$.



Gambar 10

2.2.2.2 SIFAT-SIFAT OPERASI DALAM GRAPH

1. $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$

Bukti :

$G_1 = (V_1, E_1)$ —— $V_1 = \{V_{11}, V_{12}, V_{13}, \ldots\ldots\ldots, V_{1m}\}$

$E_1 = \{l_{11}, l_{12}, l_{13}, \ldots\ldots\ldots, l_{1i}\}$

$G_2 = (V_2, E_2)$ —— $V_2 = \{V_{21}, V_{22}, V_{23}, \ldots\ldots\ldots, V_{2n}\}$

$E_2 = \{l_{21}, l_{22}, l_{23}, \ldots\ldots\ldots, l_{2j}\}$

$G_1 \cup G_2 = G_3 = (V_3, V_3)$

$V_3 = V_1 \cup V_2 = \{V_{11}, V_{12}, V_{13}, \ldots\ldots V_{1m}\} \cup \{V_{21}, V_{22}, .V_{2n}\}$

$= \{V_{11}, V_{12}, \ldots\ldots V_{1m}, V_{21}, V_{22}, \ldots\ldots V_{2n}\}$

$= \{V_{21}, V_{22}, \ldots\ldots V_{2n}, V_{11}, V_{12}, \ldots\ldots V_{1m}\}$

$= \{V_{21}, V_{22}, \ldots\ldots V_{2n}\} \cup \{V_{11}, V_{12}, \ldots. V_{1m}\}$

$= V_2 \cup V_1$.

$E_3 = E_1 \cup E_2 = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, .., e_{1i}\} \cup \{e_{21}, e_{22}, ..e_{2j}\}$

$\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, .., e_{1i}, e_{21}, e_{22}, ..e_{2j}\}$

$\{e_{21}, e_{22}, \ldots., e_{2j}, e_{11}, e_{12}, ..e_{2j}\}$

$\{e_{21}, e_{22}, \ldots., e_{2j}\} \cup \{e_{11}, e_{12}, ..e_{1i}\}$

2. $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$

$G_1 \cap G_2 = G_4 = (V_4, E_4)$

$V_4 = V_1 \cap V_2$ = himpunan vertex dalam V_1 dan V_2 yang bersamaan

= himpunan vertex dari vertex dalam V_2 dan V_1 yang bersamaan

$= V_2 \cap V_1$.

$E_4 = E_1 \cap E_2$ = himpunan edge dari edge dalam E_1 dan E_2 yang bersamaan.

$= \text{himpunan edge dari edge dalam } E_2$ dan E_1 yang bersamaan.

$= E_2 \cap E_1$

3. $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$

$$G_1 \oplus G_2 = (V_5, E_5) \longrightarrow V_5 = V_1 \cup V_2$$

$$= V_2 \cup V_1$$

$$E_5 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$$

$$= (E_2 \cup E_1) - (E_2 \cap E_1)$$

$$= G_2 \oplus G_1$$

4. $G \cup G = G \cap G = G$

$$G = (V, E)$$

$$G \cup G = (V \cup V, E \cup E)$$

$$= (V, E) = G$$

$$G \cap G = (V \cap V. E \cap E)$$

$$(V, E) = G$$

5. $G \oplus G$ = null Graph

$$G \oplus G = (V, E)$$

$$V = V \cup V$$

$$= V$$

$$E = (E \cup E) - (E \cap E)$$

$$= E - E$$

$$= E \cap E^c$$

$$= \emptyset$$

$G \oplus G = (V, \emptyset) \longrightarrow = \emptyset$ berarti graph tanpa edge atau null graph.

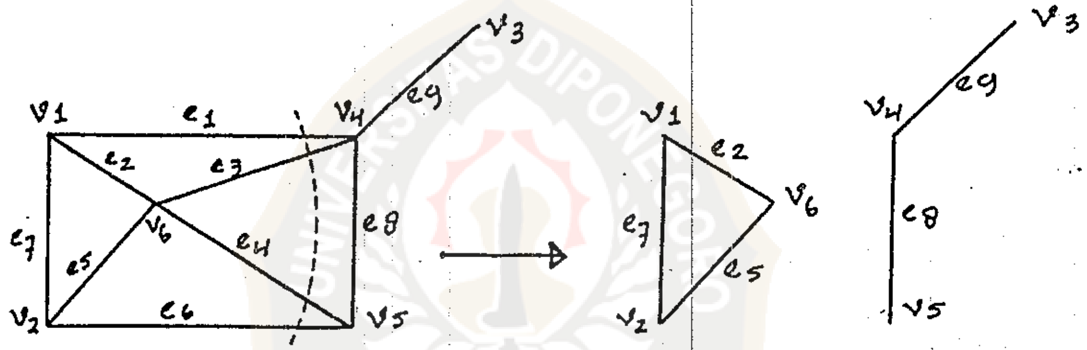
2.3. HIMPUNAN POTONG

2.3.1. PENGERTIAN

Dalam graph terhubung G, Himpunan potong adalah himpunan garis (edge) graph yang apabila himpunan garis (edge) graph tersebut dihilangkan dari graph G akan menghasilkan graph G yang tak terhubung (Disconected).

Contoh :

Gambar 11



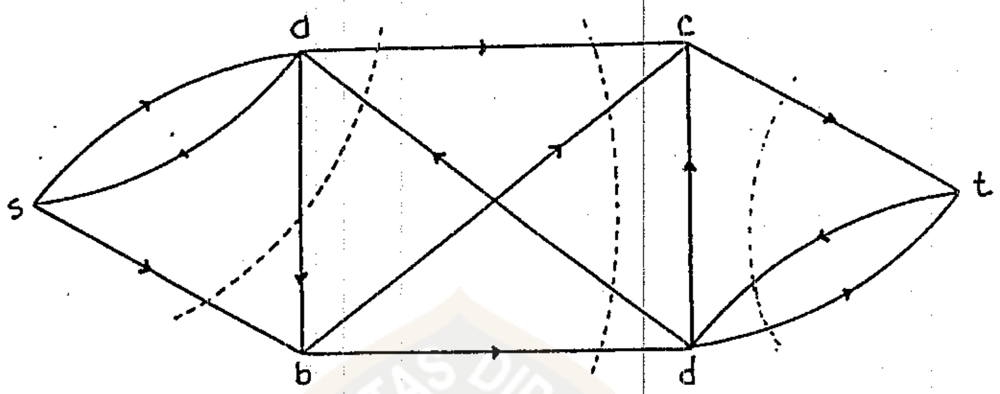
Himpunan edge {e_1, e_3, e_4, e_6} dalam graph terhubung G adalah merupakan himpunan potong, sebab jika garis-garis tersebut dihilangkan dari G maka G akan menjadi graph tak terhubung (seperti gambar di atas). Sedangkan himpunan edge {e_2, e_4, e_5, e_6} bukan merupakan himpunan potong, sebab jika edge-edge tersebut dihilangkan, G tetap terhubung.

Definisi 23

Himpunan potong dari graph berarah G (V,E,c,f) adalah subgraph yang terdiri dari himpunan garis graph minimal pada graph terhubung G yang apabila dihilangkan dari graph tersebut akan mengurangi rank graph dengan satu.

Contoh :

Gambar di bawah ini menunjukkan bagaimana himpunan potong, memotong graph G:



Gambar 12

Subgraph {(a,c),(d,a),(a,b),(s,b)},{(a,c),(d,a),(b,c),(b,d)} {(c,t),(t,d),(d,t)} adalah merupakan himpunan potong, sebab apabila edge-edge tersebut dihilangkan, maka akan mengurangi rank graph dengan satu.

Sedangkan subgraph {(a,c),(d,a),(a,b),(s,b),(c,t),(t,d),(d,t)} adalah bukan merupakan himpunan potong. Sebab jika edge-edge tersebut dihilangkan, akan mengurangi rank graph terhubung G dengan 2.

Definisi 24

Jumlah titik-titik dalam suatu graph disebut order dari graph .

Defini 25

Rank r dari graph dengan n titik dan c graph terhubung ditulis r = n - c.

Rank dari null graph adalah nol.

Contoh :

Order pada gambar 12 = 6 (n=6)

Banyaknya graph terhubung = 1 (c=1)

Sehingga rank = 6 - 1 = 5

Subgraph {(a,c),(d,a),(a,b),(s,b)},{(a,c),(d,a),(b,c),(b,d)},{(c,t),(t,d),(d,t)} adalah himpunan potong. Sebab jika garis-garis tersebut dihilangkan, maka akan terdapat dua graph terhubung. Sehingga ranknya = 6-2=4 (mengurangi rank graph dengan 1,yaitu dari 5 menjadi 4) Subgraph {(a,c),(d,a),(a,b),(s,b),(c,t),(t,d),(d,t)} adalah bukan himpunan potong, sebab jika garis-garis tersebut dihilangkan, akan terdapat tiga graph terhubung. Sehingga ranknya = 6 - 3 = 3 (mengurangi rank graph dengan 2, yaitu dari 5 menjadi 3)

Definisi 26

Himpunan potong dari node s ke t (s-t cut set) dari graph berarah adalah himpunan garis minimal, dimana jika garis tersebut dihilangkan akan memecah path berarah dari s ke t dalam graph berarah.

Contoh :

Untuk memahami definisi tersebut, diperlukan beberapa penjelasan. Himpunan s atau subgraph w dikatakan minimal dengan sifat P jika tidak ada subset s atau tidak ada subgraph w yang mempunyai sifat P.

Untuk mempermudah notasi, ambil X,Y adalah 2 subset dari node set V dalam G (V,E,c,f). Kita gunakan simbol (X,Y) untuk menunjukkan himpunan dari semua garis (x,y) berarah dari $x \in X$ ke $y \in Y$, untuk sembarang fungsi g dari himpunan garis E, ditulis :

$$g(X, Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} g(x,y)$$

Demikian juga, jika digunakan fungsi h dari node set V, dapat ditulis :

$$h(X) = \sum_{x \in X} h(x)$$

Dimana :

h (x) adalah bobot untuk node x. Untuk lebih mudahnya, digunakan himpunan yang hanya berisi satu elemen. Jadi jika x hanya berisi node tunggal x, ditulis :

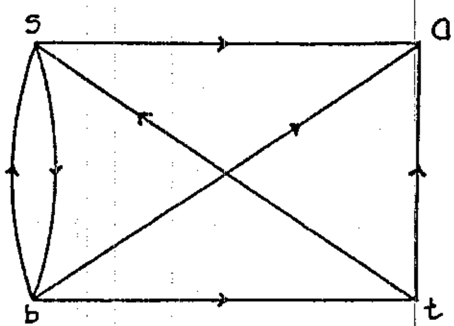
(x,y), (g(x,Y), atau h(x) sebagai pengganti dari ({x},Y), g({x},Y) atau ({x},Y).

Definisi 27

Potongan dari s ke t (s.t cut) pada graph berarah G (V,E) adalah himpunan dari garis $(x,\bar{x})$ dalam G dengan $s \in X$ dan $t \in \bar{x}$, dimana x adalah subset dari V dan $\bar{x} = V - X$

Dikatakan potongan dari s ke t (s-t cut) mungkin bukan himpunan potongan (s-t cut set).

Contoh:



Gambar 13 Graph berarah G (V,E)

Diambil $x = \{s,b\}$, $(x,\bar{x}) = \{(s,a),(b,a),(b,t)\}$

Dimana :

$\bar{x} = \{a,t\}$ adalah s-t cut, tapi bukan himpunan potong (cut set). Sebab $\{(b,t)\}$ adalah subset sejati dari $(x,\bar{x})$ dan menghilangkan (b,t) dari G juga akan memecah semua path berarah dai s ke t. Tetapi dapat ditunjukkan bahwa setiap himpunan potong (s-t cut set) pasti cut.

Untuk menunjukkan hal itu, diambil ϑ = cut set dari graph berarah G (V,E). Didefinisikan subset x dalam V sebagai berikut :

1. $s \in X$
2. Jika $x \in X$ dan $(x,y) \in E-\vartheta$, maka $y \in X$.

Jika $t \in \bar{x} = V - X$, kita dapat menunjukkan setiap garis $(x,y) \in (x, \bar{x})$, $x \in X$, dan $Y \in \bar{x}$.

Andaikan (x,y) tidak dalam ϑ, maka dalam $E-\vartheta$ ada lintasan (path) berarah dari s ke y dibentuk oleh path berarah dari s ke x melalui (x,y).

Ini berarti bahwa $y \in x$ kontradiksi. Pengandaian salah, jika ada garis $(x,y) \in \vartheta$ tetapi tidak dalam $(x,\bar{x})$, maka ϑ bukan cut set sebab dengan menghilangkan $(x,\bar{x})$ subset sejati dalam ϑ, juga dalam memecahkan semua lintasan (path) berarah dari s ke t. jadi setiap cut set pasti cut. Pada gambar 1 (b,t) adalah sebuah himpunan potong (cutset). $X=\{s,a,b\}$ maka: $(x,\bar{x})$: $\{s,a,b\},t) = \{(b,t)\}$.

Kapasitas dari s.t cut $(x,\bar{x})$ dalam net G (V,E,c,f) didefinisikan sebagai :

$$c(x, \bar{x}) = \sum_{(x,y)\in(x,\bar{x})\}.} c(x,y)$$

Minimum s-t cut c min adalah s-t cut dengan kapasitas minimum dari semua s-t cut):

$$c\,(C\ min) = min\ \{c\,(xi,\bar{x}i)\}$$

Dimana :

$(xi,\bar{x}i)$ adalah s-t cut dalam G, begitu juga kapasitas s-t cutset ϑ dalam G didefinisikan sebagai :

$$c(\vartheta) = \sum_{(x,y)\in\vartheta} c\,(x,y)$$

Minimum s-t cutset ϑ min adalah s-t cutset dengan kapasitas minimum dari semua s-t cutset.:

$c\,(\vartheta\ min) = min\ \{c(\vartheta k)\}$, dimana :

ϑK adalah s-t cut set dalam G. Jika kapasitas semua garis positif, maka :

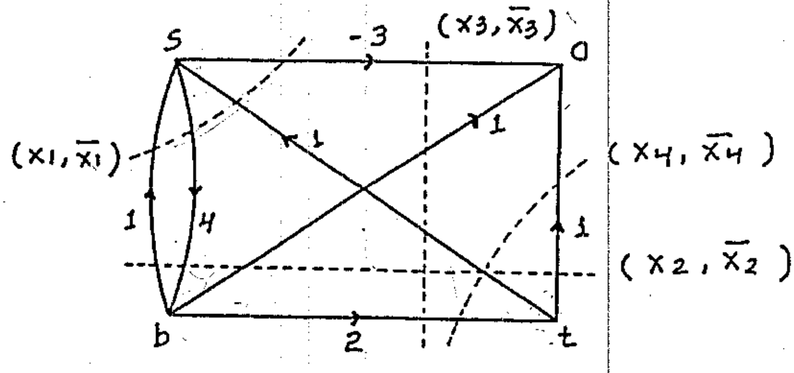
$$c\,(c\ min) = min\ \{c\,(xi,\ \bar{x}i)\}$$
$$= min\ \{c(\vartheta k)\}$$
$$= c\,(\vartheta\ min)$$

Sesuai definisi 25 maka :

$C\ (\ (min) \leq C\ (\vartheta\ min)$ 2

Untuk bukti lengkap, kita tunjukkan dengan kebalikannya, jika c min = minimum s-t cut dan semua kapasitas positif, tidak ada subset sejati dalam c min yang menjadi s-t cut. Sebaliknya s-t cut yang dibentuk oleh subset sejati akan mempunyai kapasitas yang lebih pendek dari pada c min. Ini berarti tidak ada subset sejati dari c min dapat memecah semua path berarah dari s ke t dalam G. Maka C min adalah minimal himpunan garis, yang jika digeser akan memecah path berarah dari s ke t dalam G. Ini berarti :

c (C min) ≥ c (ϑ min). Lihat persamaan 1 dan 2 :



Gambar 14.

Ambil net G (V,E,c,f), terdapat 4 s-t cut :

$(X_1, \bar{X}_1) = (s, \{a,b,t\}) = \{(s,a), (s,b)\}$

$(X_2, \bar{X}_2) = (\{s,a\}, \{b,t\}) = \{(s,b)\}$

$(X_3, \bar{X}_3) = (\{s,b\}, \{a,t\}) = \{(b,t), (b,a), (s,a)\}$

$(X_4, \bar{X}_4) = (\{s,a,b\}, t) = \{(b,t)\}$

Dengan kapasitasnya :

$c(X_1, \bar{X}_1) = c(s,a) + c(s,b) = -3+4=1$

$c(X_2, \bar{X}_2) = c(s,b) = 4$

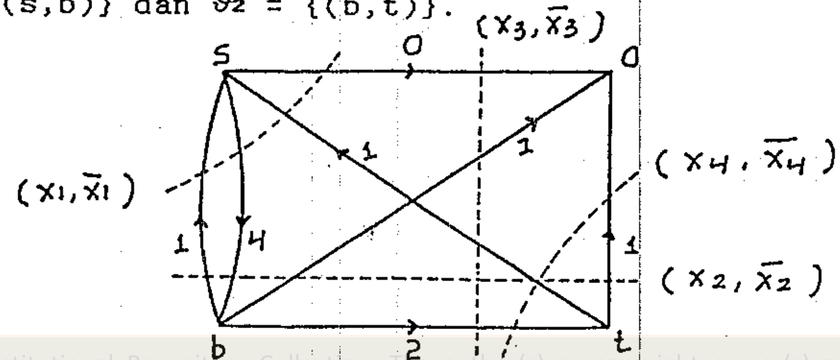
$c(X_3, \bar{X}_3) = c(b,t) + c(b,a) + c(s,a)$

$= 2 + 1 - 3 = 0$

$c(X_4, \bar{X}_4) = c(b,t) = 2$

Di sisi lain terdapat 2 s-t cut set yaitu :

$\vartheta_1 = \{(s,b)\}$ dan $\vartheta_2 = \{(b,t)\}$.



Gambar 15

$\subset (\vartheta_1) = \subset (s,b) = 4$

$\subset (\vartheta_2) = \subset (b,t) = 2$

Terlihat bahwa C min = 0 dan ϑ min = 2. Hal ini karena dalam jaringan (net) gambar 14 terdapat garis (s,a) dengan kapasitas negatif $\subset (s,a) = -3$. Akhirnya dikatakan $\vartheta_1 = (x_2,\bar{x}_2)$ dan $\vartheta_2 = (x_4,\bar{x}_4)$ menyatakan setiap s-t cut set juga merupakan s-t cut. Dengan memilih jaringan yang memuat kapasitas negatif, berlaku juga untuk jaringan dengan kapasitas tak negatif, termasuk 0.

Gambar 15 adalah jaringan dengan kapasitas garis = 0, yaitu garis (s,a). Jaringan pada gambar 14 dan gambar 15 adalah isomorphic, sebab mempunyai s-t cut dan s-t cut set yang sama.

Adapun kapasitasnya berbeda seperti :

$\subset (x_1, \bar{x}_1) = \subset (s,a) + \subset (s,b) = 4$

$\subset (x_2, \bar{x}_2) = \subset (s,b) = 4$

$\subset (x_3, \bar{x}_3) = \subset (b,t) + \subset (b,a) + \subset (s,a) = 3$

$\subset (x_4, \bar{x}_4) = \subset (b,t) = 2$

$\subset (\vartheta_1) = \subset (s,b) = 4$

$\subset (\vartheta_2) = \subset (b,t) = 2$

Nampak bahwa C min = ϑ min = 2

Jika s-t cut bukan cutset, maka subset sejati s-t cut adalah s-t cutset. Jika kapasitas semua garis tak negatif, kapasitas s-t cutset disebut min s-t cut. Akhirnya dikatakan arah sirkuit l dari G adalah persamaan dengan s-t cut $(x,\bar{x})$ dan s-t cut $(\bar{x},x)$. Dimana :

$(x,\bar{x}) \cup (\bar{x},x)$ selalu = 0

Jika s-t cut $(x, \bar{x})$ memecah semua path berarah dari s ke t, ini jelas bahwa nilai f_{st} dari aliran (flow) f dalam G (V,E,c,f) tidak akan melebihi kapasitas s-t cut.