BAB II
MATERI PENUNJANG

Bab ini akan menjelaskan beberapa definisi dan teorema sebagai materi penunjang dalam permodelan matematika untuk menentukan posisi obyek statik menggunakan metoda *Absolute Positioning* dengan pengukuran *Carrier Phase*. Antara lain akan dijelaskan Ruang Bilangan Berdimensi Tiga karena penentuan posisi diberikan dalam koordinat tiga dimensi, Matriks dan Determinan karena persamaannya disajikan dalam bentuk matriks, Sistem Persamaan Linier, Deret Taylor yang digunakan dalam linearisasi, Metoda Pengali Lagrange, Penurunan dari bentuk kuadratik, dan Penyesuaian Kuadrat Terkecil untuk penyelesaian model matematika.

2.1 Ruang Bilangan Berdimensi Tiga.

Definisi 2.1.1

Himpunan semua tripel terurut bilangan riel dinamakan ruang bilangan berdimensi tiga dan dinyatakan dengan R^3. Setiap tripel terurut (x, y, z) dinamakan titik di dalam ruangan bilangan berdimensi tiga.

Definisi 2.1.2

i. Jika A(x_1 , y, z) dan B(x_2 , y, z) adalah dua titik yang terletak pada suatu garis yang sejajar dengan sumbu x, maka jarak berarah dari A ke B yang dinyatakan dengan $\overline{AB}$ diberikan oleh :

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

ii. Jika C(x, y_1 , z) dan D(x, y_2 , z) adalah dua titik yang terletak pada suatu garis yang sejajar dengan sumbu y, maka jarak berarah dari C ke D yang dinyatakan dengan $\overline{CD}$ diberikan oleh :

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

iii. Jika E(x, y, z_1) dan F(x, y, z_2) adalah dua titik yang terletak pada suatu garis yang sejajar dengan sumbu z, maka jarak berarah dari E ke F yang dinyatakan dengan $\overline{EF}$ diberikan oleh :

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

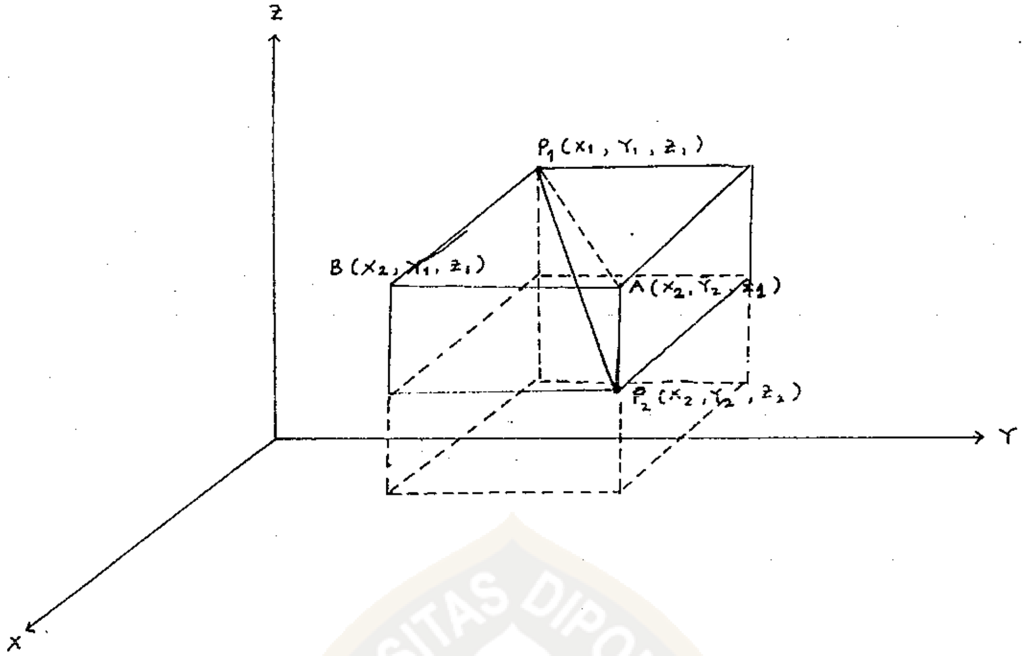
Teorema 2.1.1

Jarak tak berarah antara titik $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ dan $P_2(x_2 , y_2 , z_2)$ diberikan oleh :

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Bukti :

Buatlah suatu paralelepipedum siku-siku dengan P_1 dan P_2 sebagai dua titik sudut yang berhadapan dan sisi-sisinya sejajar dengan bidang-bidang koordinat (lihat gambar 2.1.1).



Gambar 2.1.1

Menurut teorema phytagoras

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1A}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \qquad \text{<2.1.2>}$$

karena

$$|\overline{P_1A}| = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 \qquad \text{<2.1.3>}$$

dengan substitusi <2.1.3> ke <2.1.2> akan diperoleh :

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \qquad \text{<2.1.4)}$$

Dengan menerapkan definisi 2.1.2 ke ruas kanan pada <2.1.4> didapatkan :

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

terbukti.

2.2 Matriks dan Determinan

Suatu matriks berukuran m×n adalah suatu jajaran bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri dari m baris dan n kolom. Matriks tersebut ditulis dalam bentuk :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \langle 2.2.1 \rangle$$

Setiap bilangan a_{jk} dalam matriks ini dinamakan *elemen (unsur)*. Indeks j dan k berturut-turut menyatakan baris dan kolom dari unsur matriks tersebut. Jika banyaknya baris m dan kolom n sama, matriksnya dinamakan matriks bujur sangkar berukuran n×n.

Determinan

Jika A yang disajikan pada <2.2.1> adalah suatu matriks bujur sangkar, maka

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dinamakan *determinan* dari A dengan ukuran n, ditulis det (A). Untuk mendefinisikan nilai suatu determinan, maka harus dikenal beberapa konsep berikut :

1. *Minor*. Diberikan suatu unsur a_{jk} dari Δ. Suatu determinan berukuran (n-1) yang diperoleh dengan menghilangkan semua unsur baris ke-j dan kolom ke-k dinamakan minor dari a_{jk}.

2. *Kofaktor*. Jika minor dari a_{jk} dikalikan dengan $(-1)^{j+k}$, maka hasilnya dinamakan kofaktor dari a_{jk} dan dinyatakan dengan A_{jk}.

Nilai determinan didefinisikan sebagai jumlah dari hasil kali unsur-unsur pada suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian, dan ini dinamakan *uraian Laplace*. Dalam lambang ditulis :

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \qquad <2.2.2>$$

$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn}$ dengan j sebarang, disebut *uraian baris ke-j*

$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$ dengan k sebarang, disebut *uraian kolom ke-k.*

Contoh :

Menghitung determinan berukuran 3.

Misalkan determinannya adalah $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Kofaktor dari unsur-unsur dibaris pertama adalah

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Nilai determinannya adalah :

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

2.2.1 Transpose dari suatu matriks.

Pandang suatu matriks $A = (a_{jk})$ berukuran $(m \times n)$ maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran $(n \times m)$ yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-j dari A, j = 1, 2, ... ,m sebagai kolom ke-j dari A^T. Dengan perkataan lain $A^T = (a_{kj})$.

2.2.2 Invers suatu matriks.

Jika untuk suatu matriks bujur sangkar A terdapat suatu matriks B sehingga AB = I, maka B dinamakan *invers* dari A dan dinyatakan dengan A^{-1}.

Pandang matriks A = (a_{jk}) pada persamaan <2.2.1>. Kofaktor dari a_{jk} dinyatakan dengan A_{jk}, maka transpose dari matriks (A_{jk}) disebut matriks adjoin dari A.

$$\text{adj.}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Dengan pertolongan matriks adjoin dapat dicari invers suatu matriks dengan menggunakan rumus :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{\det(A)}, \text{ dengan syarat } \det(A) \neq 0$$

Mencari matriks invers dengan sekatan/partisi.

Kalau matriks berukuran besar, kadang-kadang lebih mudah bila dikerjakan secara bertahap , dengan membagi matriks tersebut menjadi sub matriks-sub matriks (membuat sekatan/partisi).

Sebuah sub matriks (matriks bagian) dari matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dari A dengan menghapuskan beberapa baris atau kolom A. Apabila suatu matriks A dipecah-pecah menjadi sub matriks-sub matriks dengan memberi sekatan-sekatan garis horisontal diantara dua baris dan garis vertikal diantara dua kolom, maka matriks A tadi dikatakan telah dipartisi.

Pandang matriks bujur sangkar A berordo n yang mempunyai invers $A^{-1} = B$. Lakukan partisi sebagai berikut

$$A = \left[\begin{array}{c:c} \underset{(p \times p)}{A_{11}} & \underset{(p \times q)}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{(q \times p)}{A_{21}} & \underset{(q \times q)}{A_{22}} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c:c} \underset{(p \times p)}{B_{11}} & \underset{(p \times q)}{B_{12}} \\ \hdashline \underset{(q \times p)}{B_{21}} & \underset{(q \times q)}{B_{22}} \end{array}\right]$$

dimana $p + q = n$.

Karena $AB = BA = I_n$ maka diperoleh :

(i). $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p$

(ii). $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$

(iii). $B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0$

(iv). $B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q$

Misalkan $B_{22} = L^{-1}$, dari (ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1}$

dari (iii) $B_{21} = -L^{-1}(A_{21}A_{11})^{-1}$

dari (i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$

$= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$

dan bila disubstitusikan ke-(iv) :

$$-L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + L^{-1}A_{22} = I_q \qquad L = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12}$$

$$= A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$$

2.3 Sistem Persamaan Linier

Suatu sistem dari m persamaan linier (himpunan dari m persamaan linier simultan) dalam n tak diketahui x_1, x_2, ... ,x_n adalah suatu himpunan persamaan yang berbentuk :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad \langle 2.3.1 \rangle$$

a_{jk} adalah bilangan-bilangan yang diketahui, yang disebut koefisien dari sistem <2.3.1>, b_i juga bilangan-bilangan yang diketahui. Jika semua b_i nol, maka <2.3.1> disebut sistem homogen.

Penyelesaian <2.3.1> adalah suatu himpunan x_1, x_2, ... ,x_n yang memenuhi semua m persamaan itu. Suatu penyelesaian vektor dari <2.3.1> adalah suatu vektor x yang komponen-komponennya merupakan penyelesaian dari <2.3.1>. Jika sistem tersebut homogen , sistem ini paling sedikit mempunyai penyelesaian trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... , $x_n = 0$. Dengan perkalian matrik terlihat bahwa m persamaan dari <2.3.1> dapat ditulis sebagai berikut :

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b} \qquad \langle 2.3.2 \rangle$$

dengan matriks koefisien A = (a_{jk}) adalah matriks m × n.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan } \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

merupakan vektor kolom.

Andaikan koefisien a_{jk} tidak semuanya nol, sehingga A bukan matriks nol. Perhatikan bahwa x mempunyai n komponen dan b mempunyai m komponen, matriks

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

disebut matriks lengkap (*augmented matrix*) dari sistem <2.3.1>. $\tilde{A}$ diperoleh dengan menggabungkan kolom A dan kolom b. Matrik $\tilde{A}$ menentukan sistem <2.3.1> dengan lengkap, karena $\widetilde{A}$ memuat semua bilangan yang diberikan yang ada didalam <2.3.1>.

2.4 Metoda Pengali Lagrange

Akan ditentukan maksimum atau minimum relatif $f(x,y) = 0$ terhadap beberapa syarat kendala $\phi(x,y) = 0$. Untuk mengerjakan ini andaikan bahwa $\phi(x,y) = 0$ mendefinisikan secara tunggal y sebagai fungsi x yaitu $y = g(x)$ mempunyai turunan pertama yang kontinu $g'(x)$. Maka harus ditentukan maksimum atau minimum fungsi :

$$f(x,y) = f(x,g(x))$$

Dengan membuat turunan pertamanya terhadap x sama dengan nol yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{atau} \quad f_x + f_y\, g'(x) = 0 \qquad \text{<2.4.1>}$$

Juga dari $\phi(x,y) = 0$ mempunyai kesamaan $\phi(x,g(x)) = 0$ sehingga :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{atau} \quad \phi_x + \phi_y\, g'(x) = 0$$

$$\phi_y\, g'(x) = -\phi_x$$

$$g'(x) = -\phi_x/\phi_y \qquad \text{<2.4.2>}$$

substitusikan persamaan <2.4.2> pada persamaan <2.4.1> sehingga :

$$f_x - \frac{f_y}{\phi y} \phi x = 0 \qquad \langle 2.4.3\rangle$$

Dengan memandang h(x,y) = f(x,y) + K ϕ(x,y) dan membuat $\partial h/\partial x = 0$, $\partial h/\partial y = 0$ akan didapatkan

$$K = - f_x/\phi_x \quad \text{atau} \quad f_y + K\,\phi_y = 0$$

sehingga <2.4.3> menjadi $f_x + K\,\phi_x$.

Konstanta K dinamakan suatu pengali Lagrange (Lagrange Multiplier). Perluasan untuk fungsi lebih dari dua peubah dapat dikerjakan dengan cara yang sama.

2.5 Differensiasi dari bentuk kuadratik

Andaikan bentuk kuadratik diberikan sebagai berikut :

$$W = {}_1X^T_u \; {}_uA_u \; {}_uY_1 \qquad \langle 2.5.1\rangle$$

Elemen dari matriks A konstan. Variabelnya adalah u komponen dari masing-masing vektor X dan Y. Karena <2.5.1> adalah matriks <1×1> ini menunjukkan bahwa :

$$W = X^T A Y = Y^T A^T X \qquad \langle 2.5.2\rangle$$

Jumlah differensial dW diperoleh dengan mengambil turunan parsialnya melalui semua variabel. Salah satunya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial X} dX + \frac{\partial W}{\partial Y} dY \qquad \langle 2.5.3\rangle$$

Vektor dX dan dY memuat differensial dari masing-masing komponen X dan Y.

Dari <2.5.2> dan <2.5.3> diperoleh :

$$dW = Y^T A^T dX + X^T A dY \qquad \text{<2.5.4>}$$

Jika matriks A simetris yaitu $A = A^T$ dan jika hanya satu vektor dari variabel-variabel diandaikan , ini berarti bahwa dari <2.5.1> dan <2.5.4> jumlah differensialnya :

$$V = {}_1X^T_u \; {}_uA_u \; {}_uX_1 \qquad \text{<2.5.5>}$$

$$dV = 2 X^T A dX \qquad \text{<2.5.6>}$$

2.6 Deret Taylor

Teorema 2.6.1

Jika f(z) adalah analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C, dan jika z dan a keduanya didalam (*interior*) C maka :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} + Rn \qquad \text{<2.6.1>}$$

dimana :

$$Rn = (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)\,dw}{(w-a)^n (w-z)}$$

Bukti :

Dengan rumus integral Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)\,dw}{w-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)}{w - a} \left[\frac{1}{1 - (z-a)/(w-a)} \right] dw$$

<2.6.2>

Dengan menggunakan rumus :

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1 - u}$$

dimana u < 1.

Untuk $\frac{1}{1 - (z-a)/(w-a)}$ **akan diperoleh**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)}{w - a} \left[1 + \left(\frac{z - a}{w - a} \right) + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^{n-1} + \frac{(z - a)^n/(w - a)^n}{1 - (z - a)/(w - a)} \right] dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)dw}{w - a} + \frac{z - a}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)dw}{(w - a)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)dw}{(w-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)dw}{(w-a)^n (w-z)}$$

Dari rumus integral Cauchy terdahulu, pada titik z=a akan diperoleh :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)dw}{w - a}$$

maka

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + \dots +$$

$$f^{(n-1)}(a)\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} + Rn \qquad \text{<2.6.3>}$$

dimana :

$$Rn = (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)\ dw}{(w-a)^n (w-z)}$$

Terbukti.

2.7 Penyesuaian Kuadrat Terkecil

Penyesuaian Kuadrat Terkecil berdasarkan pada persamaan-persamaan dimana pengamatannya ditekankan sebagai fungsi dari variabel yang tidak diketahui.

Model persamaan linier simultan dapat ditulis dalam notasi vektor matriks sebagai berikut :

$$\bar{L} = \bar{A}\bar{x} \qquad \text{<2.7.1>}$$

Pada penyesuaian kuadrat terkecil diperlukan matriks kofaktor $\bar{Q}_l$ yang dicari dengan rumus :

$$\bar{Q}_l = \frac{1}{\sigma_o^2}\bar{\Sigma} \qquad \text{<2.7.2>}$$

atau bobot matriks $\bar{P}$ yang diperoleh dari :

$$\bar{P} = \bar{Q}_l^{-1} = \sigma_o^2\ \bar{\Sigma}^{-1} \qquad \text{<2.7.3>}$$

dimana : σ_0^2 .... varians awal

$\bar{\Sigma}$ .... matriks kovarians

Andaikan pada <2.7.1> terdapat n pengamatan dan u variabel yang tidak diketahui dan A berisi n baris dan u kolom. Untuk $n \geq u$ sistem persamaan <2.7.1> overdetermine dan umumnya tidak konsisten, karena adanya eror pengamatan atau noise. Agar konsisten maka pada vektor pengamatan ditambahkan noisenya dan persamaan <2.7.1> menjadi :

$$\bar{L} + \bar{n} = \bar{A}\bar{x} \qquad \text{<2.7.4>}$$

Solusi dari sistem ini menjadi unik (tunggal) dengan prinsip kuadrat terkecil $\bar{n}^T\bar{P}\bar{n}$ = minimum. Aplikasikan prinsip minimum ini pada <2.7.4> sehingga menjadi persamaan normal :

$$\bar{A}^T\bar{P}\bar{A}\bar{x} = \bar{A}^T\bar{P}\bar{L} \qquad \text{<2.7.5>}$$

dengan solusi

$$\bar{x} = (\bar{A}^T\bar{P}\bar{A})^{-1}\ \bar{A}^T\bar{P}\bar{L} \qquad \text{<2.7.6>}$$