B A B II
MATERI PENUNJANG

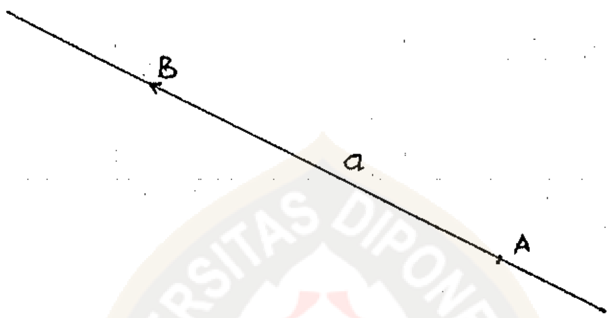
Dalam tugas akhir ini diperlukan beberapa materi penunjang yang akan membantu dalam memahami materi inti yang akan dibahas pada bab III. Materi penunjang ini terdiri dari Vektor dan Matriks, digunakan karena dalam bab inti banyak menggunakan dasar-dasar pengertian vektor dan matriks. Kemudian Deret Taylor yang akan digunakan untuk proses linierisasi, Persamaan linier yang membahas bentuk dan sifat-sifat dari persamaan linier. Dan Metoda Iterasi Gauss Seidell untuk menyelesaiakan persamaan linier simultan dari model akhir yang terbentuk. Terakhir Konvergensi Metoda Iterasi Gauss Seidell, yang diperlukan agar persamaan linier simultan yang terbentuk dapat diselesaikan dengan metoda iterasi Gauss Seidell.

2.1. Vektor dan Matriks

Definisi 2.1.1.

Vektor adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah.

Lihat gambar 2.1.1. , titik awal dari vektor tersebut adalah A, dan titik ujungnya adalah titik B. Garis lurus yang melalui AB disebut garis pembawa dari vektor tersebut.



gambar 2.1.1.

Definisi 2.1.2.

Vektor a disebut vektor posisi (radius vektor) dari titik A, jika vektor a mempunyai titik awal O(0,0) dan titik ujungnya titik $A(a_1, a_2)$.

Kita pandang suatu koordinat yang tegak lurus (disebut pula susunan koordinat cartesian) di R^n , maka dapat dinyatakan hal - hal sebagai berikut :

(1) Vektor posisi dari titik $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ adalah

$OA = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$

(2) Vektor bertitik awal di $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dan bertitik ujung di $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ adalah

$PQ = [q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n]$

(3) Panjang vektor a = $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ adalah

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

jarak 2 titik $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dan $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ adalah panjang vektor PQ, yaitu :

$$|PQ| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \ldots + (q_n - p_n)^2}$$

Definisi 2.1.3.

Himpunan m buah vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ disebut bergantung linier (*linierly dependent,* tidak bebas linier) bila terdapat skalar - skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m = 0$.

Didalam hal lain himpunan $\{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ disebut bebas linier (*linierly independent*), dengan perkataan lain apabila $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Teorema 2.1.1.

Jika sebagian (himpunan bagian) dari m vektor - vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ bergantung linier, maka keseluruhan m vektor - vektor tersebut adalah bergantung linier.

Bukti :

Misalkan p vektor, p < m bergantung linier, katakanlah $u_1, u_2, \ldots, u_p$ maka terdapat skalar - skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$ ....(*)

kita ambil kemudian $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_m = 0$. (*) menjadi : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \ldots + \lambda_m u_m = 0$, dimana $\lambda_i \neq 0$ (λ_i antara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$). Jadi , m vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.1.2.

Jika himpunan m vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ bebas linier maka sebagian (himpunan bagiannya) juga bebas linier.

Bukti :

Andaikata himpunan bagian tersebut bergantung linier, menurut teorema 2.1.1. keseluruhan m vektor adalah bergantung liner. Terjadi suatu kontradiksi. Pengandaian diatas tidak benar, jadi haruslah himpunan bagian tersebut bebas linier.

Definisi 2.1.4.

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor - vektor $\{ u_1 , u_2 , ... , u_n \}$ bila terdapat skalar - skalar $\{ \lambda_1 ,\lambda_2 , ... , \lambda_n \}$ sedemikian sehingga $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + . . . + \lambda_n u_n$.

Teorema 2.1.3.

Jika satu diantara m vektor $\{ u_1 , u_2 , ... , u_m \}$ adalah kombinasi linier dari vektor selebihnya, maka m vektor tersebut bergantung linier.

Bukti :

Misalnya u_p adalah kombinasi linier dari $\{ u_1 , u_2 , ...,$ $u_{p-1} ,u_{p+1} , ..., u_m \}$, maka :

$u_p = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + . . . + \lambda_{p-1} u_{p-1} + . . . + \lambda_m u_m$.

Bila u_p pindah ruas diperoleh :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_{p-1} u_{p-1} - u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + ... + \lambda_m u_m = 0$

Jelas tidak semua koefisien λ_i nol, karena $\lambda_p = -1 \neq 0$.

Jadi m vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.1.4.

Jika m vektor $\{ u_1 , u_2 , ... , u_m \}$ bebas linier dan (m+1) vektor - vektor $\{ u_1 , u_2 , ... , u_m , v \}$ bergantung linier, maka v adalah kombinasi linier dari $\{ u_1 , u_2 , ... , u_m \}$.

Bukti :

Karena { u_1 , u_2 , . . . , u_m, v } bergantung linier, pada persamaan $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ . \ . \ . + \lambda_m u_m + \lambda_{m+1} v = 0$ terdapat $\lambda_i \neq 0$. Dalam hal ini haruslah $\lambda_{m+1} \neq 0$, karena bila tidak demikian terjadi kontradiksi yaitu $\lambda_1 \neq 0$ adalah diantara i=1,2,...,m, yang mana

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ . \ . \ . + \lambda_m u_m + 0\ v = 0 \quad \text{sehingga :}$$

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ . \ . \ . + \lambda_m u_m = 0$ berakibat { u_1 , u_2 , ... , u_m} bergantung linier. Maka bila λ_{m+1} v pindah ruas, diperoleh :

$$-\lambda_{m+1} v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ . \ . \ . + \lambda_m u_m, \text{ dan karena } \lambda_{m+1} \neq 0:$$

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} u_2 - \ . \ . \ . - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} u_m$$

$$= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ . \ . \ . + \mu_m u_m$$

Jadi v kombinasi linier dari { u_1 , u_2 , ... , u_m}.

Akibat : Bila { u_1 , u_2 , ... , u_m} bebas linier dan v bukan kombinasi linier dari { u_1 , u_2 , ... , u_m} maka { u_1 , u_2 , ... , u_m, v } bebas linier.

Definisi 2.1.5.

Suatu ruang vektor v dikatakan berdimensi n bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor – vektor $\in$ V yang bebas linier , sedangkan setiap himpunan (n+1) vektor – vektor $\in$ V selalu bergantung linier, dengan perkataan lain banyaknya maksimum vektor – vektor $\in$ V yang bebas linier adalah n.

Definisi 2.1.6.

Matriks adalah himpunan bilangan yang disusun / dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Bilangan-bilangan itu disebut elemen matriks. Untuk batasnya diberikan :

$$\left(\qquad \right) \text{ atau } \left[\qquad \right] \text{ atau } \left\| \qquad \right\|$$

Secara umum :

Pandang sebuah matriks A = (a_{ij}), i = 1,2, ... ,m dan j = 1,2, ... ,n ; yang mana berarti bahwa banyaknya baris = m serta banyaknya kolom = n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Boleh pula kita tuliskan matriks $A_{(m\times n)} = (a_{ij})$, $(m\times n)$ disebut ukuran (ordo) dari matriks.

Terdapat beberapa jenis matriks sebagai berikut :

1. Suatu matriks dengan banyaknya baris = banyaknya kolom = n disebut matriks bujur sangkar berukuran n (berordo n). Barisan elemen $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A tersebut.
2. Matriks diagonal ialah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utama adalah nol.
3. Matriks Identity (satuan) ialah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utamanya semua = 1.
4. Matriks segitiga bawah (*lower triangular*) : matriks bujur sangkar yang semua elemen diatas diagonal utama = 0.
5. Matriks segitiga atas (*upper triangular*) : matriks bujur sangkar yang semua elemen dibawah diagonal utama = 0.

Definisi 2.1.7.

Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A. Rank kolom dari matriks A adalah dimensi ruang kolom matriks A . Akan ternyata bahwa rank baris = rank kolom, maka rank matriks A didefinisikan sebagai harga rank baris = rank kolom dari matriks A tersebut, ditulis r(A).

Sehingga menurut definisi 2.1.5, rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier.

2.2. Deret Taylor

Definisi 2.2.1.

Fungsi f dikatakan analitik di titik z_o, apabila terdapat suatu sekitar dari z_o sedemikian sehingga $f'(z)$ ada untuk setiap titik z di dalam sekitar itu. Suatu fungsi dikatakan analitik dalam suatu domin, jika ia analitik di setiap titik dalam domin itu.

Teorema 2.2.1.

Diketahui fungsi f yang analitik di dalam lingkaran C_o yang berpusatkan titik z_o dan dengan jari - jari r_o. Maka untuk setiap titik z di dalam C_o, berlaku :

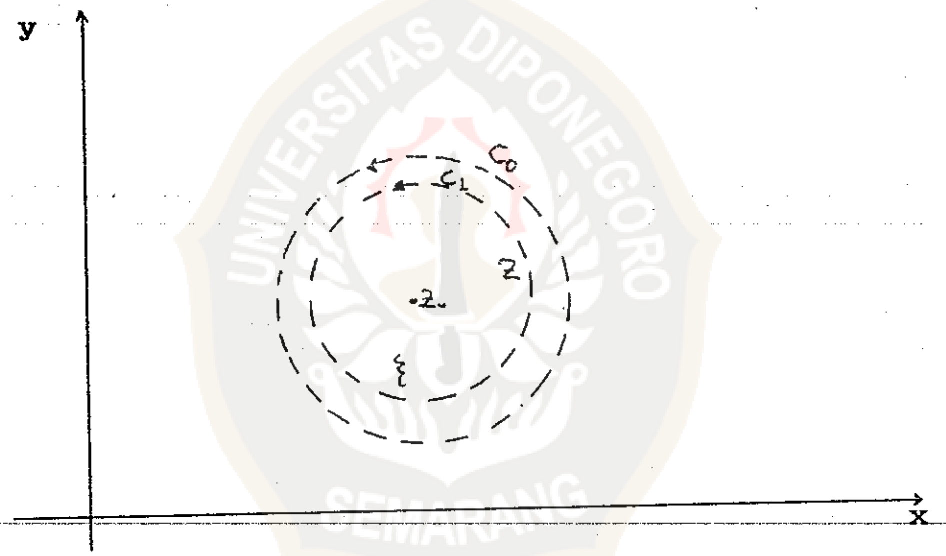
$$f(z) = f(z_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n \qquad \langle 2.2.1 \rangle$$

yaitu deret ruas kanan konvergen ke f(z).

Deret ruas kanan dalam <2.2.1> disebut deret Taylor dari f(z) disekitar titik z_o.

Bukti :

Misalkan z adalah titik tetap didalam C_o dan $|z-z_o|=r$, jadi $r<r_o$. Misalkan ζ sembarang titik pada lingkaran C_1 , $|\zeta - z_o| = r_1$ dimana $r<r_1<r_o$. Jadi z didalam C_1 dan C_1 didalam C_o, sehingga f analitik didalam dan pada C_1.



gambar 2.2.1.

Harga f(z) menurut rumus integral Cauchy dapat ditulis :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{<2.2.2>}$$

Untuk deret ukur berhingga dimana p<1, kita mempunyai rumus:

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} = \frac{1 - p^n}{1 - p} = \frac{1}{1 - p} - \frac{p^n}{1 - p} ,$$

sehingga

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} + \frac{p^n}{1 - p} = \frac{1}{1 - p} \qquad \langle 2.2.3 \rangle$$

kalau kita tulis

$$\frac{1}{(\zeta - z)} = \frac{1}{(\zeta - z_o) - (z - z_o)} = \frac{1}{\zeta - z_o} \quad \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_o}{\zeta - z_o}}$$

maka mengingat rumus <2.2.3> kita peroleh

$$\frac{1}{(\zeta - z)} = \frac{1}{\zeta - z_o} + \frac{z - z_o}{(\zeta - z_o)^2} + \ldots + \frac{(z - z_o)^{n-1}}{(\zeta - z_o)^n} + \frac{(z - z_o)^n}{(\zeta - z_o)^n (\zeta - z)}$$

$$\langle 2.2.4 \rangle$$

Dari <2.2.2> dan <2.2.4> kita memperoleh

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)(z - z_o)}{(\zeta - z_o)^2} \, d\zeta + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)(z - z_o)^{n-1}}{(\zeta - z_o)^n} \, d\zeta + P_n$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \{(z - z_o)^k \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{k+1}} \, d\zeta\}$$

$$+ P_n \qquad \langle 2.2.5 \rangle$$

dimana $$P_n = \frac{(z-z_o)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_o)^n (\zeta - z)}$$

mengingat rumus derivatif dari fungsi analitik, maka hasil diatas dapat ditulis :

$$f(z) = f(z_o) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} (z - z_o)^k + P_n$$

sehingga teorema Taylor akan terbukti apabila dapat dibuktikan bahwa $P_n \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$.

Jika M harga maximum dari $|f(\zeta)|$ untuk ζ pada C_1, maka untuk harga ζ ini berlaku :

$$|f(\zeta)| \le M,\ |\zeta - z_o| = r_1 \text{ dan}$$

$$|\zeta - z| \ge |\zeta - z_o| - |z - z_o| = r_1 - r, \text{ sehingga}$$

$$|P_n| = \frac{r^n}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_o)^n (\zeta - z)} \le \frac{r^n}{2\pi} \frac{M}{(r_1 - r)\, r_1^n} 2\pi\, r_1$$

$$= \frac{M}{1 - \frac{r}{r_1}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

Karena $0 \le \frac{r}{r_1} < 1$, maka dari ketidaksamaan itu jelas bahwa $P_n \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$ dan dengan demikian terbuktilah teorema Taylor.

Deret taylor pada <2.2.1> merupakan deret taylor untuk fungsi satu peubah. Dengan mengacu pada <2.2.1>, dapat dibentuk deret taylor untuk fungsi dua peubah atau lebih sebagai berikut :

*> Deret taylor untuk fungsi dua peubah f(x,y) disekitar $x=x_o$ dan $y=y_o$:

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) + f_x(x_o,y_o)(x-x_o) + f_y(x_o,y_o)(y-y_o) + \frac{1}{2!}\Big[f_{xx}(x_o,y_o)(x-x_o)^2 + 2f_{xy}(x_o,y_o)(x-x_o)(y-y_o) + f_{yy}(x_o,y_o)(y-y_o)^2 \Big] + \ldots \qquad \text{<2.2.6>}$$

*> Deret taylor untuk fungsi tiga peubah f(x,y,z) disekitar $x=x_o$, $y=y_o$, dan $z=z_o$:

$$f(x,y,z) = f(x_o,y_o,z_o) + f_x(x_o,y_o,z_o)(x-x_o) + f_y(x_o,y_o,z_o)(y-y_o) + f_z(x_o,y_o,z_o)(y-z_o) + \ldots \qquad \text{<2.2.7>}$$

2.3. Persamaan Linier

Definisi 2.3.1.

Bentuk $a_1x_1+a_2x_2+ \ldots +a_nx_n = b$ kita sebut persamaan linier.

a_i dan b adalah skalar, dimana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan. x_i : $x_1,x_2, \ldots ,x_n$

disebut anu (*undeterminants, unknowns atau variables*). Sekumpulan harga dari anu katakanlah, $x_1=k_1, x_2=k_2, \ldots, x_n = k_n$, disebut jawab atau solusi dari persamaan, apabila terpenuhi : $a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n = b$. Jawab tersebut dapat kita tulis dalam notasi vektor $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ atau $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$ dan disebut jawab vektor dari persamaan.

Pandang m buah persamaan - persamaan linier dengan n anu

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
\qquad \langle 2.3.1 \rangle
$$

Dengan perkalian matriks , persamaan - persamaan diatas dapat ditulis :

$AX = B$, dimana $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ berukuran (mxn) dan disebut matriks koefisien dari <2.3.1>, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ adalah vektor - vektor kolom anu dan konstanta.

Teorema 2.3.1.

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab (*consistent*) apabila rank matriks koefisien = rank matriks lengkap atau r(A) = r(A,B).

Matriks lengkap (A,B) adalah matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

Bukti :

Persamaan <2.3.1> diatas dapat pula ditulis sebagai :

$A_1x_1 + A_2x_2 + \ . \ . \ . \ + A_nx_n = B$ <2.3.2>

dimana $A_1, A_2, \ . \ . \ . \ , A_n$ adalah vektor - vektor kolom dari A. Yang menjadi persoalan apakah ada $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n$, yaitu skalar - skalar yang memenuhi persamaan <2.3.2>. Kalau ada maka haruslah B merupakan kombinasi linier dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (sesuai definisi 2.1.4) dengan perkataan lain banyaknya vektor - vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \ . \ . \ .$

$,A_n$, sama dengan banyak vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$. Jadi r(A) = r(A,B).

Definisi 2.3.2.

Kalau semua konstanta $b_i = 0$, persamaan <2.3.1> menjadi AX = 0 dan disebut susunan persamaan linier homogen.

Jelas : r(A) = r(A,0), jadi menurut teorema 2.3.1 susunan persamaan linier homogen selalu mempunyai jawab. Harga - harga $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ jelas selalu memenuhi susunan diatas. Jadi [0,0, . . . ,0] pasti merupakan jawab dari susunan persamaan homogen yag manapun.

Maka suatu susunan persamaan linier homogen selalu mempunyai paling sedikit satu jawab [0,0, . . . ,0] yang disebut jawab nol atau jawab trivial.

Definisi 2.3.3.

Suatu susunan persamaan linier disebut bebas atau tidak bebas linier tergantung dari apakah vektor - vektor barisnya (vektor - vektor baris dari matriks koefisien) bebas linier atau tidak.

Definisi 2.3.4.

Pandang susunan persamaan linier AX=B, dimana $B \neq 0$ maka susunan persamaan linier tersebut disebut non homogen.

Teorema 2.3.2.

Semua jawab vektor dari susunan persamaan linier non homogen AX=B berbentuk z=x'+y , dimana x' adalah suatu jawab khusus non homogen AX=B dan y adalah jawab umum homogen AX=0.

Bukti :

z suatu jawab, berlaku :

$A_1z_1+A_2z_2+ \ . \ . \ . \ +A_nz_n= B$, sedangkan x' suatu jawab pula maka

$A_1x_1'+A_2x_2'+ \ . \ . \ . \ +A_nx_n'= B$, kalau dikurangkan didapat

$A_1(z_1-x_1')+A_2(z_2-x_2')+ \ . \ . \ . \ +A_n(z_n-x_n') = B - B = 0$

Jadi $[z_1-x_1', z_2-x_2', \ . \ . \ . \ , z_n-x_n']$ atau z-x' adalah jawab homogen, sebut y, maka z-x'=y atau z=x'+y.

Teorema 2.3.3.

Kalau r(A)=n maka persamaan homogennya hanya mempunyai jawab nol. Sehingga z=x'+y menjadi z=x' , maka jawab akan tunggal (unik).

Kalau r(A)<n maka persamaan homogen dari AX = B akan mempunyai jawab non trivial. Jadi karena z=x' +y , dimana y tidak hanya nol maka z yaitu jawab non homogen tidak tunggal.

Bukti :

Kalau r(A)=n, maka himpunan $A = \{A_1, A_2, \ . \ . \ . \ , A_n\}$ adalah bebas linier karena rank matrik A [r(A)] adalah jumlah maksimum dari vektor kolom A yang bebas linier. Karena itu jika $z_1, z_2, \ldots, z_n$ merupakan penyelesaian dari <2.3.2>, maka :

$$A_1 z_1 + A_2 z_2 + \ . \ . \ . + A_n z_n = B \qquad \text{<2.3.3>}$$

Misal ada penyelesaian lain $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, maka

$$A_1 x_1' + A_2 x_2' + \ . \ . \ . + A_n x_n' = B \qquad \text{<2.3.4>}$$

sehingga dari <2.3.3> dan <2.3.4> akan diperoleh :

$$A_1 z_1 + A_2 z_2 + \ . \ . \ . + A_n z_n = A_1 x_1' + A_2 x_2' + \ . \ . \ . + A_n x_n'$$

berarti :

$$(z_1 - x_1')\ A_1 + (z_2 - x_2')\ A_2 + \ . \ . \ . + (z_n - x_n')\ A_n = 0.$$

Sehingga menurut definisi bebas linier (definisi 2.1.3) $z_1 - x_1' = 0, \ldots, z_n - x_n' = 0$ yang berarti $z_1 = x_1'$, $z_2 = x_2'$, $\ldots$, $z_n = x_n'$ Jadi skalar-skalar $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ dalam <2.3.2> ditentukan secara unik.

Kalau r(A)<n, ada himpunan K yang bebas linier dari r(A) buah vektor kolom A. Sehingga n-r(A) buah vektor kolom A yang lain merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor itu. Dari sini terlihat bahwa n buah vektor kolom tersebut bergantung linier. Jika $z_1, z_2, \ldots, z_n$ merupakan penyelesaian dan $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ juga merupakan penyelesaian, maka

$$(z_1 - x_1')\ A_1 + (z_2 - x_2')\ A_2 + \ . \ . \ . + (z_n - x_n')\ A_n = 0.$$

Karena n buah vektor tersebut bergantung linier, maka menurut definisi 2.1.3 ada $z_i - x'_i$ yang tidak sama dengan nol $i = 1,2, \ldots ,n$. Misal $z_p - x'_p = y_p$ dengan $1 \leq p \leq n$, maka $z_p = y_p + x'_p$ sehingga sistem persamaan <2.3.2> mempunyai penyelesaian yang tidak unik.

2.4. Metoda Iterasi Gauss Seidell

Metoda Iterasi Gauss Seidell ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan jumlah persamaan sama dengan jumlah variabel yang tidak diketahui. Dengan perkataan lain pada sistem persamaan <2.3.1> dapat diselesaikan dengan iterasi Gauss Seidell jika $m = n$. Sehingga persamaan <2.3.1> menjadi :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

<2.4.1>

Dari persamaan linier simultan pada <2.4.1> akan diperoleh :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn}x_n}{a_{nn}} \qquad <2.4.2>$$

Penyelesaian dengan menggunakan iterasi Gauss Seidell dimulai dengan memberi nilai pendekatan awal untuk penyelesaian yang dimaksud, misal $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ... ,$x_n^{(0)}$. Kemudian dari persamaan <2.4.2> diperoleh harga pendekatan baru sebagai berikut :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)})$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)})$$

<2.4.3>

Langkah selanjutnya adalah menghitung harga-harga $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, ... ,$x_n^{(2)}$ dengan menggunakan harga-harga yang diperoleh dari <2.4.3>. Dilakukan kembali perhitungan untuk mendapatkan harga-harga x_i (i = 1,2, ... ,n) dengan menggunakan harga - harga x_i (i = 1,2, ... ,n) yang diperoleh sebelumnya. Pengulangan perhitungan ini akan dihentikan sesudah diperolehnya nilai yang dianggap sama untuk setiap x_i (i = 1,2, ... ,n) pada suatu langkah perhitungan yang dilakukan sebelumnya.

Untuk memperoleh algoritma iterasi Gauss Seidell ini, akan dicari formula umum untuk iterasi ini. Asumsikan bahwa a_{jj} = 1 untuk j = 1,2, ... ,n (ini dapat diperoleh jika disusun kembali persamaan tersebut sedemikian sehingga koefisien diagonalnya tidak nol, kemudian masing-masing persamaan tersebut dibagi dengan koefisien diagonalnya). Sekarang dapat ditulis :

$$A = I + L + U \qquad \langle 2.4.4 \rangle$$

dimana I matrik unit (n×n), L matrik segitiga bawah, dan U matrik segitiga atas. Jika disubstitusikan <2.4.4> ke bentuk AX = B akan diperoleh :

$$(I + L + U)\, X = B$$

Dengan meletakkan LX dan UX diruas kanan, akan diperoleh

$$X = B - LX - UX \qquad \langle 2.4.5 \rangle$$

Dengan mengingat proses iterasi Gauss Seidell, akan diperoleh dari <2.4.5> formula iterasi yang diinginkan sebagai berikut :

$$X^{(m+1)} = B - LX^{(m+1)} - UX^{(m)} \qquad \text{<2.4.6>}$$

dimana $X^{(m)} = [X_j^{(m)}]$ adalah nilai pendekatan ke-m dan $X^{(m+1)} = [X_j^{(m+1)}]$ adalah nilai pendekatan ke-(m+1). Selanjutnya algoritma iterasi Gauss Seidell dapat dilihat pada tabel 2.4.1.

Tabel 2.4.1

ALGORITMA GAUSS SEIDELL $(A,B,x^{(0)},\varepsilon,N)$

Algoritma ini menghitung nilai x dari sistem AX = B dengan diberikan nilai pendekatan awal $x^{(0)}$, dimana $A = [a_{jk}]$ adalah matrik (n×n) dengan $a_{jj} \neq 0$, j=1, ... ,n

INPUT : A, B, nilai pendekatan awal $x^{(0)}$, toleransi $\varepsilon > 0$, maksimun iterasi N.

OUTPUT : Solusi nilai pendekatan $X^{(m)} = [X_j^{(m)}]$ atau pesan gagal jika $X^{(N)}$ tidak memenuhi kondisi toleransi.

For m = 0, . . . , N-1, do :

For j = 1, . . . , n, do :

$$X_j^{(m+1)} = -\frac{1}{a_{jj}} \left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} X_k^{(m+1)} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} X_k^{(m)} - b_j \right)$$

End

If $\max_j |X_j^{(m+1)} - X_j^{(m)}| < \varepsilon$ Then output $X^{(m+1)}$.Stop

End.

Output : "Tidak terdapat solusi yang memenuhi kondisi toleransi setelah N kali iterasi". Stop.

2.5. Konvergensi Metoda Iterasi Gauss Seidell

Penyelesaian persamaan linier simultan dengan iterasi Gauss Seidell akan menghasilkan penyelesaian nyata apabila persamaan linier tersebut konvergen. Dengan kata lain solusi nyata x_i akan selalu didekati dalam setiap tahap iterasi.

Persamaan linier simultan dalam <2.4.1> dapat dibentuk menjadi :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &= b_1 - \qquad -a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \\
a_{22}x_2 &= b_2 - a_{21}x_1 \qquad - \cdots - a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n &= b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}
\end{aligned}
\qquad <2.5.1>
$$

dan secara umum proses iterasi Gauss Seidell dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(v+1)} &= b_1 - \qquad -a_{12}x_2^{(v)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(v)} \\
a_{22}x_2^{(v+1)} &= b_2 - a_{21}x_1^{(v+1)} \qquad - \cdots - a_{2n}x_n^{(v)} \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n^{(v+1)} &= b_n - a_{n1}x_1^{(v+1)} - a_{n2}x_2^{(v+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(v+1)}
\end{aligned}
$$

<2.5.2>

Untuk memperoleh konvergensi metoda iterasi Gauss Seidell ini, diambil :

$$z_i^{(v)} = x_i^{(v)} - x_i \qquad \text{<2.5.3>}$$

yang merupakan error pada langkah iterasi ke-v. Dari sini akan diperoleh persamaan error homogen sebagai berikut :

$$\begin{array}{l}
a_{11}z_1^{(v+1)} = b_1 - \qquad -a_{12}z_2^{(v)} - \ldots -a_{1n}z_n^{(v)} \\
a_{22}z_2^{(v+1)} = b_2 - a_{21}z_1^{(v+1)} \qquad - \ldots -a_{2n}z_n^{(v)} \\
\vdots \\
a_{nn}z_n^{(v+1)} = b_n - a_{n1}z_1^{(v+1)} - a_{n2}z_2^{(v+1)} - \ldots -a_{nn-1}z_{n-1}^{(v+1)}
\end{array} \qquad \text{<2.5.4>}$$

Selanjutnya didefinisikan sebagai berikut :

$$|a_{ik}| = \bar{a}_{ik} \;,\; |z_i^{(v)}| = \bar{z}_i^{(v)} \qquad \text{<2.5.5>}$$

dan error iterasi ke-v :

$$\varepsilon_v = \text{Max } \bar{z}_i^{(v)} \qquad \text{<2.5.6>}$$

Dari sini diperoleh pertidaksamaan :

$$z_1^{(v+1)} \le \frac{1}{\bar{a}_{11}} (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{13} + \ldots + \bar{a}_{1n}) \, \varepsilon_v = \alpha_1 \varepsilon_v$$

$$z_2^{(v+1)} \le \frac{1}{\bar{a}_{22}} (\bar{a}_{21}\alpha_1 + \bar{a}_{23} + \ldots + \bar{a}_{2n}) \, \varepsilon_v = \alpha_2 \varepsilon_v$$

$$\vdots$$

$$z_n^{(v+1)} \le \frac{1}{\bar{a}_{nn}} (\bar{a}_{n1}\alpha_1 + \bar{a}_{n2}\alpha_2 + \ldots + \bar{a}_{nn-1}\alpha_{n-1}) \, \varepsilon_v = \alpha_2 \varepsilon_v$$

<2.5.7>

Sehingga dari <2.5.7> ini dapat disusun lagi sebagai berikut

$$\bar{a}_{11}\alpha_1 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{13} + \ldots + \bar{a}_{1n}$$

$$\bar{a}_{22}\alpha_2 = \bar{a}_{21}\alpha_1 + \bar{a}_{23} + \ldots + \bar{a}_{2n}$$

$$\vdots$$

$$\bar{a}_{nn}\alpha_n = \bar{a}_{n1}\alpha_1 + \bar{a}_{n2}\alpha_2 - \ldots + \bar{a}_{nn-1}\alpha_{n-1}$$

<2.5.8>

Sehingga nilai error akan selalu turun (mengecil) dan metoda ini akan konvergen terhadap solusi, jika semua nilai $\alpha_i < 1$ atau

$$\max_i \alpha_i = \alpha < 1 \qquad \langle 2.5.9\rangle$$

Dan nilai α_i ini dapat dihitung sebagai berikut :

$$\alpha_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ik}| \qquad \langle 2.5.10\rangle$$